Extra opgaven bij Analyse A

Opgave E.1 Laat zien dat voor alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ geldt:

(a) $(1 + \|x + y\|) \leq (1 + \|x\|)(1 + \|y\|)$;
(b) $(1 + \|x + y\|) \geq \frac{1+\|x\|}{1+\|y\|}$. Aanwijzing: gebruik (a) en merk op dat $\|y\| = \|-y\|$.

Opgave E.2 Laat zien dat voor alle $x \in \mathbb{R}$ met $|x| > 1$ geldt:

(a) $\frac{1}{|1-x|} \leq \frac{1}{|x|-1}$,
(b) $\frac{1}{|1+x|} \leq \frac{1}{|x|-1}$.

Opgave E.3 Gegeven zijn een functie $f : \mathbb{R}^n \supset\!\!\to \mathbb{R}^m$ en een tweetal punten $a \in \mathbb{R}^n$ en $b \in \mathbb{R}^m$. Veronderstel dat

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

Toon aan dat:

$$a \in \mathrm{Dom}(f) \Rightarrow f(a) = b.$$

Opgave E.4 Laat a, b een tweetal verschillende punten in $\mathbb{R}^n$ zijn. We merken op dat $d = d(a, b) > 0$ (waarom is dat zo?). Bewijs dat voor alle reële getallen $r_1, r_2 > 0$ geldt:

(a) $B(a; r_1) \cap B(b; r_2) \neq \emptyset \Rightarrow r_1 + r_2 > d$.
(b) $r_1 + r_2 \leq d \Rightarrow B(a; r_1) \cap B(b; r_2) = \emptyset$.
(c) $r_1 + r_2 \leq d \iff B(a; r_1) \cap B(b; r_2) = \emptyset$.

Opgave E.5 Laat $f, g : \mathbb{R} \supset\!\!\to \mathbb{R}$ een tweetal functies zijn, $a \in \mathbb{R}$ en $M > 0$. Veronderstel dat $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ en $|g(x)| \leq M$ voor alle $x \in \mathrm{Dom}(g)$. Bewijs dat $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = 0$.

Opgave E.6 Zij $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar in 0 en veronderstel dat $f(0) = 0$ en $f'(0) = 1$. Laat zien dat f zowel positieve waarden als negatieve waarden heeft, dwz er bestaan $p, q \in \mathbb{R}$ met $f(p) > 0$ en $f(q) < 0$.

Opgave E.7 Definieer de functie $f(x) = |x|^3 \cos \frac{1}{x}$ op het maximaal mogelijke domein en laat zien dat $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$. Zet f voort tot heel $\mathbb{R}$ door middel van $f(0) := 0$ en ga na waar de zo gedefinieerde functie f differentieerbaar is.

Opgave E.8 De bedoeling van deze opgave is een principe te verduidelijken dat al twee keer op college aan de orde is geweest.

Gegeven is een functie $f : \mathbb{R}^n \supset\!\!\to \mathbb{R}^m$. Gegeven zijn voorts $a \in \mathbb{R}^n$ en $b \in \mathbb{R}^m$. Is $S \subset \mathbb{R}^n$ dan spreken we af dat we met

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in S}} f(x) = b \qquad (*)$$

bedoelen dat

$$\lim_{x \to a} f_S(x) = b,$$

waarbij $f_S : \mathbb{R}^n \supset\!\!\to \mathbb{R}^m$ de functie is met domein $\mathrm{Dom}(f_S) := \mathrm{Dom}(f) \cap S$ terwijl $f_S = f$ op $\mathrm{Dom}(f_S)$.

(a) Laat zien dat (*) gelijkwaardig is met

$$\forall_{\epsilon > 0}\, \exists_{\delta > 0} \quad f(B(a;\delta) \cap \mathrm{Dom}(f) \cap S) \subset B(b;\epsilon).$$

(b) Laat zien: als $S, T \subset \mathbb{R}^n$ en $S \cup T = \mathbb{R}^n$, dan zijn de volgende beweringen gelijkwaardig:

  (i) $\lim_{x \to a} f(x) = b$;

  (ii) $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in S}} f(x) = b$ en $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in T}} f(x) = b$.

(c) Laat zien: f is continu in a dan en slechts dan als $a \in \mathrm{Dom}(f)$ en

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = f(a).$$

Opgave E.9 Deze opgave doet een methode aan de hand om aan te tonen dat een limiet niet bestaat.

We veronderstellen dat $f : \mathbb{R}^n \supset\!\!\to \mathbb{R}^m$ een functie is, en dat $a \in \mathbb{R}^n$. We beschouwen de volgende twee uitspraken:

(1) $\lim_{x \to a} f(x)$ bestaat;

(2) $\forall_{\epsilon > 0}\, \exists_{\delta > 0}\, \forall_{x, x' \in \mathrm{Dom}(f) \cap B(a;\delta)} \quad d(f(x), f(x')) < \epsilon$.

(a) Laat zien dat (1) $\Rightarrow$ (2). Hint: veronderstel $\lim_{x \to a} f(x) = b \in \mathbb{R}^m$ en gebruik de definitie van limiet.

(b) Gebruik (a) om te laten zien dat

$$\lim_{x \to 0} \sin(\frac{1}{x})$$

niet bestaat.

Men kan laten zien dat ook geldt (2) $\Rightarrow$ (1). Op dit moment beschikken wij nog niet over voldoende techniek om dit aan te tonen. In het college Analyse B zullen we een techniek ontwikkelen die dit wel mogelijk maakt.

Voor ons is voorlopig vooral van belang dat uit deze opmerking volgt dat de voor (b) gebruikte methode in principe altijd werkt.