Voor rijen van reële getallen geldt weer een insluitstelling.

Lemma 3.20 (Insluitstelling) *Laat* (a_n), (b_n) *en* (c_n) *rijen in* $\mathbb{R}$ *zijn, en veronderstel dat*

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

voor alle $n \in \mathbb{N}$. *Zijn de rijen* (a_n) *en* (c_n) *convergent met dezelfde limiet* $\lambda \in \mathbb{R}$, *dan is ook de rij* (b_n) *convergent met limiet* λ.

Bewijs: Wegens Lemma 3.11 volgt dit uit de overeenkomstige insluitstelling voor $\mathbb{R}$-waardige functies op een metrische ruimte, zie § 2.4, Lemma 1.35'. □

We eindigen deze paragraaf met de behandeling van de veel voorkomende limiet $\lim_{n\to\infty} a^n$, voor $0 \leq a < 1$. De volgende schatting dient ter voorbereiding.

Lemma 3.21 *Zij* $x \geq 0$. *Voor alle* $n \in \mathbb{N}$ *geldt* $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Bewijs: We bewijzen de uitspraak met inductie naar n. Voor $n = 0$ en $n = 1$ is de uitspraak waar. Laat de uitspraak bewezen zijn voor $n = k \geq 1$. Dan geldt

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) \geq (1+kx)(1+x) = 1 + (k+1)x + kx^2 \geq 1 + (k+1)x.$$

De uitspraak is dus ook waar voor $n = k + 1$. □

Opmerking 3.22 Ga na dat de bovenstaande schatting ook verkregen kan worden door gebruik te maken van het bij de infinitesimaalrekening behandelde binomium van Newton.

Lemma 3.23 *Zij a een reëel getal met* $0 \leq a < 1$. *Dan is* $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$.

Bewijs: Voor $a = 0$ is het resultaat waar. We mogens ons daarom beperken tot het geval dat $0 < a < 1$. In dit geval is $a^{-1} > 1$, dus $a^{-1} = 1 + \delta$ voor een zekere $\delta > 0$. Hieruit volgt voor elke $n \in \mathbb{N}$ dat

$$a^{-n} = (1+\delta)^n \geq 1 + n\delta,$$

wegens Lemma 3.21. Uit deze schatting volgt weer dat

$$0 \leq a^n \leq \frac{1}{1+n\delta} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\frac{1}{n}+\delta}\right).$$

Met behulp van de rekenregels voor limieten volgt uit Lemma 3.7 dat het rechterlid van de bovenstaande ongelijkheid limiet 0 heeft voor $n \to \infty$. Met behulp van de insluitstelling, Lemma 3.20, concluderen we dat $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$. □