Herziene Opgave 4.13

Gegeven is het hypervlak $H := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = a\}$ in $\mathbb{R}^n$, $(n \geq 1)$, waarin $a > 0$. We beschouwen het deel H_+ van H bestaande uit de punten $x \in H$ met $x_j \geq 0$ voor alle $1 \leq j \leq n$ en het deel H_{++} van H bestaande uit de punten $x \in H_n$ met $x_j > 0$ voor alle $1 \leq j \leq n$.

Gegeven is verder de functie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, gedefinieerd door

$$f(x) := \sum_{j=1}^{n} x_j^k;$$

hierin is $k \in \{2, 3, \ldots\}$. Doel van deze opgave is te bewijzen dat f op H_+ de minimale waarde $\mathbf{m}_n := n^{1-k} a^k$ aanneemt.

(a) Toon aan dat f op H_+ de waarde $\mathbf{m}_n$ aanneemt.

(b) Toon aan dat f op H_+ een minimale waarde μ_n aaneemt.

In het vervolg gebruiken we inductie naar $n \geq 1$ om aan te tonen dat

$$\mu_n = \mathbf{m}_n, \qquad (*)$$

(c) Toon aan dat (*) geldt voor $n = 1$.

Veronderstel nu dat $n > 1$ en dat (*) geldt voor strikt kleinere waarden van n.

(d) Toon aan dat de waarde μ_n in H_{++} aangenomen wordt.

(e) Gebruik de methode van Lagrange om aan te tonen dat (*) geldt.

(f) Interpreteer de bewering (*) meetkundig voor $k = 2$.