Aantekeningen bij het college Convexe Analyse

E.P. van den Ban

Voorjaar 2000

Inleiding

Deze aantekeningen dienen ter ondersteuning van het college Convexe Analyse, Voorjaar 1999. Basistekst bij het college is de syllabus: Convexe Analyse, J. van Tiel, MC Syllabus 40, 1979.

1 Bij Stelling 2.14

In het bewijs van Stelling 2.14 in de syllabus wordt de stelling van gemajoreerde convergentie voor Lebesgue-integratie gebruikt. Hieronder presenteren we een eenvoudiger bewijs, waarbij slechts de elementaire eigenschappen van convexe funkties en Riemann-integratie gebruikt worden. Laat $I \subset \mathbb{R}$ een interval zijn.

Lemma 1.1 *Zij $f : I \to \mathbb{R}$ convex, dan geldt voor alle $a, b \in I$ dat*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'_+(t)\, dt = \int_a^b f'_-(t)\, dt.$$

Bewijs: Het is voldoende de gelijkheden te bewijzen in het geval $a < b$. Veronderstel daarom dat deze ongelijkheid geldt.

Zij $\mathcal{V}$ de collectie van alle verdelingen van het interval $[a, b]$ en zij $V \in \mathcal{V}$. Dan bestaat V uit een aantal punten $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Is $1 \leq k \leq n$ dan schrijven we I_k voor het interval $[x_{k-1}, x_k]$. Uit de convexiteit van f volgt, voor iedere $1 \leq k \leq n$, dat

$$f'_+(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \leq f(x_k) - f(x_{k-1}) \leq f'_-(x_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Hieruit volgt dat

$$\inf_{I_k} f'_+ \cdot (x_k - x_{k-1}) \leq f(x_k) - f(x_{k-1}) \leq \sup_{I_k} f'_- \cdot (x_k - x_{k-1}).$$

Sommeren van de bovenstaande uitdrukkingen over $k \in \{1, \ldots, n\}$ geeft

$$\underline{S}(f'_+, V) \leq f(b) - f(a) \leq \overline{S}(f'_-, V). \tag{1}$$

Hierbij hebben we de uit Analyse 1 bekende notaties van onder- en bovensom gebruikt.

De funkties $f'_\pm$ zijn monotoon, dus Riemannintegreerbaar. Hieruit volgt dat

$$\int_a^b f'_+(t)\, dt = \sup_{V \in \mathcal{V}} \underline{S}(f'_+, V) \quad \text{en} \quad \int_a^b f'_-(t)\, dt = \inf_{V \in \mathcal{V}} \overline{S}(f'_+, V)$$

De schatting (1) geldt voor elke verdeling $V \in \mathcal{V}$. Het linkerlid mag derhalve vervangen worden door het supremum over $\mathcal{V}$ en het uiterst rechterlid door het infimum over $\mathcal{V}$. We concluderen dat

$$\int_a^b f'_+(t)\, dt \leq f(b) - f(a) \leq \int_a^b f'_-(t)\, dt.$$

Anderzijds volgt uit $f'_- \leq f'_+$ dat de integraal in het rechterlid ten hoogste gelijk is aan de integraal in het linkerlid. Hieruit volgen de gewenste identiteiten. $\square$

Stelling 1.2 *Zij $f : I \to \mathbb{R}$ een funktie en zij $c \in I$. Dan zijn de volgende beweringen gelijkwaardig.*

(a) *De funktie f is convex.*

(b) *Er bestaat een monotoon stijgende funktie $g : I \to \mathbb{R}$ zo dat*

$$f(x) = f(c) + \int_c^x g(t)\, dt$$

voor alle $x \in I$.

Is voldaan aan (a) dan is de in (b) genoemde funktie g uniek bepaald als tevens geëist wordt dat g rechtscontinu is. In dat geval is namelijk $g = f'_+$.

Bewijs: Laat (a) gelden. Dan is de funktie $g := f'_+$ monotoon stijgend en rechtscontinu. Uit het bovenstaande lemma volgt dat (b) geldt.

Veronderstel nu dat (b) geldt. Zij $p, q \in I$ met $p < q$. Dan geldt:

$$g(p)(q-p) = \int_p^q g(p)\, dt \leq \int_p^q g(t)\, dt \leq \int_p^q g(q)\, dt = g(q)(q-p).$$

De integraal in het middelste lid is gelijk aan $f(q) - f(p)$. Er volgt dat

$$g(p) \leq \frac{f(q) - f(p)}{q - p} \leq g(q). \tag{2}$$

Zij nu $a, b \in I$ met $a < b$ en zij $a < x < b$. Passen we de bovenstaande schatting toe met $p = a, q = x$ en ook met $p = x, q = b$, dan vinden we

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq g(x) \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}.$$

De ongelijkheid tussen het eerste en het derde lid is gelijkwaardig met

$$f(x) - f(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Hieruit volgt (vanwege de definitie) de convexiteit van de funktie f.

Tenslotte veronderstellen we dat g bovendien rechtscontinu is. Dan volgt uit (2) door de limiet voor $q \downarrow p$ te nemen dat $g(p) = f'_+(p)$ voor elke $p \in I$. $\square$

2 Bij de ongelijkheid van Jensen, Stelling 2.15

Het in de syllabus gegeven bewijs komt op mij over als een truc. Er is een mijns inziens natuurlijker bewijs, dat ik heb ondergebracht in de volgend opgave.

Opgave 2.1 Gegeven zijn een convexe funktie $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ en een continue funktie $g : [c, d] \to \langle a, b \rangle$. Het getal

$$p = \frac{1}{d-c} \int_c^d g(t)\, dt$$

staat bekend als het gemiddelde van de funktie g over het interval $[c, d]$.

(a) Voor $n \geq 1$ noteren we met V_n de verdeling van $[c, d]$ in n gelijke stukken. Deze verdeling bestaat uit een $(n+1)$-tal punten $c = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = d$. Geef een formule voor x_j, $0 \leq j \leq n$.

(b) Toon aan dat

$$S_j = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} g(x_j)$$

een Riemann-som voor de integraal p is.

(c) Toon aan dat

$$f(S_j) \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(g(x_j)).$$

(d) Bewijs de ongelijkheid van Jensen, d.w.z.:

$$f(p) \leq \frac{1}{d-c} \int_c^d f(g(t))\, dt.$$

3 Geconjugeerde funktie

Doel van de volgende opgaven is inzicht in de geconjugeerde funktie van een convexe funktie te krijgen.

Opgave 3.1 We veronderstellen dat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven wordt door $f(x) = a|x - x_0| + b$, met $a, b > 0$ en $x_0 \in \mathbb{R}$.

(a) Teken de grafiek van f. Toon aan dat f convex is.

(b) Bepaal de geconjugeerde convexe funktie g. Bepaal het effectieve domein van g en teken de grafiek van g op dat domein.

Opgave 3.2 Gegeven is een convexe funktie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Laat $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ de geconjugeerde funktie zijn. We schrijven $M = \sup_{x \in \mathbb{R}} f'_+(x)$ (waarbij de waarde $+\infty$ toegelaten is). Voorts $m = -\inf_{x \in \mathbb{R}} f'_-(x)$ (waarbij de waarde $-\infty$ toegelaten is).

(a) Toon aan dat ook geldt:

$$M = \sup_{x \in \mathbb{R}} f'_-(x) \quad \text{en} \quad m = \inf_{x \in \mathbb{R}} f'_+(x).$$

(b) Toon aan dat voor elke $y \in \mathbb{R} \setminus [m, M]$ geldt: $g(y) = \infty$.

(c) Toon aan dat voor elke $y \in \langle\, m, M \,\rangle$ een $\xi \in \mathbb{R}$ bestaat zo dat

$$f'_-(\xi) \leq y \leq f'_+(\xi).$$

(d) Toon aan: als $\xi \in \mathbb{R}$ en $f'_-(\xi) \leq y \leq f'_+(\xi)$, dan is

$$g(y) = \xi y - f(\xi).$$

4 Hoekpunten van een convex polytoop

Deze paragraaf dient als commentaar op §3.9, 3.10 en Opgaven 3.5, 3.7. We veronderstellen dat V een reële lineaire ruimte is en $C \subset V$ een convex polytoop. Dus C is een verzameling van de vorm $\mathrm{co}\,(x_1, \ldots, x_n)$, met $x_j \in V$ voor $1 \leq j \leq n$.

Definitie 4.1 Onder een collectie hoekpunten van C verstaan we een minimale eindige deelverzameling $H \subset C$ met $\mathrm{co}\,(H) = C$. (Met minimaliteit bedoelen we hier dat H geen echte deelverzameling H_0 bevat met $\mathrm{co}\,(H_0) = C$.)

Uit §3.9 van het boek blijkt dat C een collectie hoekpunten heeft, namelijk de daar gevonden collectie $\{a_1, \ldots, a_k\}$. We zullen verderop zien dat C precies één collectie van hoekpunten heeft. Deze collectie valt samen met de collectie $\mathrm{ext}\,(C)$ van extremaalpunten van C; voor dit laatste begrip verwijzen we naar de definitie in §3.10 in het boek.

Opgave 4.2

(a) Laat zien dat ieder extremaalpunt p van C tot $\{x_1, \ldots, x_n\}$ behoort. Hint: schrijf p als convexe combinatie $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ en veronderstel dat $\lambda_1 \neq 0$. Laat zien dat $p = \lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1) q$ met $q \in \mathrm{co}\,(x_2, \ldots, x_n)$ en gebruik de eigenschap van een extremaalpunt.

(b) Zij H een collectie hoekpunten van C. Toon aan dat $\mathrm{ext}\,(C) \subset H$.

(c) Zij H een collectie hoekpunten van C. Toon aan dat $H \subset \mathrm{ext}\,(C)$. Hint: schrijf $H = \{a_1, \ldots, a_k\}$, en veronderstel dat a_1 niet extremaal is. Schrijf a_1 als convexe combinatie van $p, q \in C \setminus \{a_1\}$. Schrijf vervolgens p en q als convexe combinaties van $a_1, \ldots, a_k$ en beredeneer dat $a_1 \in \mathrm{co}\,(a_2, \ldots, a_k)$.

(d) Toon aan dat C precies één collectie van hoekpunten heeft en dat deze collectie samenvalt met de collectie $\mathrm{ext}\,(C)$. In het bijzonder zien we dus dat de collectie van extremaalpunten van een convex polytoop eindig is.

5 Andere bewijzen van stellingen uit Hoofdstuk 5

We geven een ander bewijs van Stelling 5.9, die een belangrijke rol speelt in het bewijs van de scheidingsstelling in $\mathbb{R}^n$ (Stelling 5.11).

Stelling 5.1 *Laat $T : V \to W$ een lineaire afbeelding tussen eindig dimensionale lineaire ruimten zijn. Zij $C \subset V$ een convexe verzameling. Dan geldt:*

$$\mathrm{ri}\,(T(C)) = T(\mathrm{ri}\,(C)).$$

Bewijs: Als $C = \emptyset$, dan is het resultaat triviaal. We veronderstellen daarom dat $C \neq \emptyset$.

We geven het bewijs eerst in het geval dat $0 \in C$. Zij $V_0 = \mathrm{aff}\,(C)$. Dan bevat V_0 de oorsprong, dus V_0 is een lineaire deelruimte. Zij $W_0 = T(V_0)$. Dan is $T_0 := T|V_0 : V_0 \to W_0$ een surjectieve lineaire afbeelding. Een surjectieve lineaire afbeelding is open, zie het onderstaande lemma. Er geldt dat $\mathrm{ri}\,(C)$ gelijk is aan het inwendig $\mathrm{int}\,(C)$ van C, gezien als deel van V_0. We zullen laten zien dat $T_0(\mathrm{int}\,(C))$ gelijk is aan $\mathrm{int}\,(T_0(C))$, het inwendige van $T_0(C)$ ten aanzien van W_0. Hieruit volgt het gestelde. Omdat T_0 open is, is $T_0(\mathrm{int}\,(C))$ een open deel van W_0, bevat in $T_0(C)$, dus in $\mathrm{int}\,(T_0(C))$. We zien dat $T_0(\mathrm{int}\,(C)) \subset \mathrm{int}\,(T_0(C))$. In het bijzonder zien we dat C en $T_0(C)$ convexe lichamen zijn.

De omgekeerde inclusie bewijzen we als volgt. Kies $x \in C$, dan is $x \in \mathrm{int}\,(C)$ terwijl $T_0(x) \in \mathrm{int}\,(T_0(C))$. Zij $z \in \mathrm{int}\,(T_0(C))$. Dan is er een $\delta > 0$ zo dat het element $z' = z + \delta(z - T_0(x))$ tot $T_0(C)$ behoort. We merken op dat $z \in [T_0(x), z'\rangle$. Er is een $y' \in C$ met $T_0(y') = z'$. Omdat C een convex lichaam is, is $[x, y'\rangle \subset \mathrm{int}\,(C)$. Hieruit volgt dat $[T_0(x), z'\rangle = T_0([x, y'\rangle) \subset T_0(\mathrm{int}\,(C))$, dus in het bijzonder dat $z \in T_0(\mathrm{int}\,(C))$. Hiermee is ook de omgekeerde inclusie bewezen.

Tenslotte geven we het bewijs voor een algemene convexe verzameling $C \subset V$. Kies $a \in C$. De verzameling $C_0 := -a + C$ is convex en bevat 0. Uit het eerste deel van het bewijs volgt dat $\mathrm{ri}\,(T(C_0)) = T(\mathrm{ri}\,(C_0))$. Hieruit volgt dat $\mathrm{ri}\,(T(C)) = \mathrm{ri}\,(T(a+C_0)) = \mathrm{ri}\,(T(a)+T(C_0)) = T(a) + \mathrm{ri}\,(T(C_0)) = T(a) + T(\mathrm{ri}\,(C_0)) = T(a + \mathrm{ri}\,(C_0)) = T(\mathrm{ri}\,(C))$. □

We geven ook een ander bewijs van Lemma 5.11.

Lemma 5.2 *Zij V een eindig dimensionale lineaire ruimte, $B \subset V$ een relatief open convexe deelverzameling en $a \in V$ een punt buiten B. Dan is er een hypervlak $H \subset V$ met $a \in H$ en $H \cap B = \emptyset$.*

Bewijs: Zonder verlies van algemeenheid mogen we veronderstellen dat $B \neq \emptyset$ en dat B de oorsprong bevat. Zij $V_0 = \mathrm{aff}\,(B)$. Dan is V_0 een lineaire deelruimte van V. We onderscheiden twee gevallen: (a) $a \in V_0$, (b) $a \notin V_0$.

(a) Nu is B een open convex deel van V_0 en $a \in V_0$ een punt buiten B, dus wegens een eerder bewezen scheidingsstelling is er een hypervlak H_0 in V_0 dat $\{a\}$ en B echt scheidt. Er is dus een $f_0 \in V_0^*$ zo dat $f_0(B) \geq f_0(a)$, terwijl $f_0(b) > f_0(a)$ voor een $b \in B$. Stel dat er een $b_0 \in B$ bestond met $f_0(b_0) = f_0(a)$. Dan zou er een $b' \in B$ bestaan met $b_0 \in [b, b'\rangle$. Hiervoor zou gelden $f_0(b_0) \in [f_0(b), f_0(b')\rangle$, dus $f_0(b') > f_0(b_0) = f_0(a)$, tegenspraak. We concluderen dat a bevat is in het hypervlak $H_0 : f_0 = f_0(a)$, terwijl $f_0(B) > f_0(a)$, dus $B \cap H_0 = \emptyset$. Kies een $f \in V^*$ met $f|V_0 = f_0$. Dan voldoet het hypervlak $f^{-1}(f_0(a))$ aan alle eisen.

(b) We veronderstellen nu dat $a \notin V_0$. Kies een basis $v_1, \ldots, v_k$, dan $k < n$. Breidt de basis met vectoren $v_{k+1}, \ldots, v_n$ uit tot een basis van V. Laten $a_1, \ldots, a_n$ de componenten van

a zijn ten aanzien van deze basis. Dan is $a_j \neq 0$ voor een $k < j \leq n$. Zij $f \in V^*$ de lineaire functionaal die voldoet aan $f(v_i) = \delta_{ij}$. Zij H het hypervlak $f^{-1}(a_j)$. Dan is $a \in H$, terwijl $H \cap V_0 = \emptyset$, dus $H \cap B = \emptyset$. $\square$

6 Verzamelingen gedefinieerd door convexe ongelijkheden

In deze paragraaf is E steeds een genormeerde lineaire ruimte.

Lemma 6.1 *Veronderstel dat $C \subset E$ een convexe verzameling is. Is $x_0 \in C$, dan is $\partial\delta_C(x_0)$ de collectie van continue lineaire funktionalen $x' \in E'$ met $(C - x_0|x') \leq 0$. In het bijzonder geldt voor $x_0 \in \operatorname{int}(C)$ dat $\partial\delta_C(x_0) = \{0\}$.*

Bewijs: Zij $x' \in E'$. Dan geldt dat $x' \in \partial\delta_C(x_0)$ dan en slechts dan als $\delta_C(x) \geq (x - x_0 \mid x')$ voor alle $x \in E$. Voor $x \in E \setminus C$ is deze schatting automatisch vervuld. Voor $x \in C$ betekent de schatting precies dat $0 \geq (x - x_0 \mid x')$. Hieruit volgt de gewenste karakterisering van de subdifferentiaal. Is $x_0 \in \operatorname{int}(C)$, dan is er een open omgeving U van x_0 die in C gelegen is. $U - x_0$ is derhalve een open omgeving van 0 die in $C - x_0$ gelegen is. Zij $x' \in \partial\delta_C(x_0)$; dan is $x' \leq 0$ op de omgeving $U - x_0$ van 0. Voor iedere $x \in E$ bestaat er een $\varepsilon > 0$ zo dat $\pm\varepsilon x \in U - x_0$. Hieruit volgt dat $x' \leq 0$ op zowel λx als $-\lambda x$; dus $(\lambda x \mid x') = 0$, waaruit volgt dat $x' = 0$. We concluderen dat $\partial\delta_C(x_0) \subset \{0\}$; de omgekeerde inclusie is evident. $\square$

Uit de bovenstaande karakterisering blijkt dat $\partial\delta_C(x_0)$ een convexe puntkegel is, voor alle $x_0 \in C$.

In het vervolg bestuderen we enige eigenschappen van verzamelingen van de vorm

$$C := \{x \in E \mid g(x) \leq 0\}, \tag{3}$$

met $g : E \to \mathbb{R}$ een convexe funktie. Het materiaal dient ter vervanging van materiaal uit H7 van het boek, en als voorbereiding op de theorie in H8.

Zoals bekend volgt uit de convexiteit van de funktie g de convexiteit van de verzameling C. In het vervolg veronderstellen we dat de funktie g continu is. Zoals bekend is een voldoende voorwaarde daarvoor dat er een punt $x_0 \in E$ bestaat waarin g lokaal naar boven begrensd is, zie Stelling 6.20. Is $E = \mathbb{R}^n$, dan is deze conditie automatisch vervuld en de continuïteit van g is dan een direkt gevolg van de convexiteit van g, zie Stelling 6.23.

We merken op dat uit de continuïteit van g volgt dat de verzameling C gesloten is. Tevens is de funktie g subdifferentieerbaar in elk punt van E, zie Stelling 6.35.

Lemma 6.2 *Veronderstel dat er een $x_1 \in E$ bestaat zo dat $g(x_1) < 0$ (voorwaarde van Slater). Dan is C een convex lichaam. Bovendien geldt:*

$$\operatorname{int}(C) = \{x \in E \mid g(x) < 0\}, \qquad \operatorname{fr}(C) = \{x \in E \mid g(x) = 0\}.$$

Bewijs: Is $g(x) < 0$, dan volgt uit de continuïteit van g het bestaan van een open omgeving U van x zo dat $g(U) < 0$, dus $U \subset C$. Hieruit volgt dat $x \in \operatorname{int}(C)$. In het bijzonder geldt $x_1 \in \operatorname{int}(C)$; dus C is een convex lichaam. Bovendien hebben we aangetoond dat $\{x \in E \mid g(x) < 0\} \subset \operatorname{int}(C)$. Om de omgekeerde inclusie te bewijzen veronderstellen we dat $x \in \operatorname{int}(C)$. Dan is er een $x_2 \in C$ zo dat $x \in \langle x_1, x_2\rangle$. Er geldt dat $g(x_2) \leq 0$ en, wegens het gegeven, dat $g(x_1) < 0$. Met de convexiteit van g volgt hieruit dat $g < 0$ op $[x_1, x_2\rangle$, dus in het bijzonder $g(x) < 0$. Hieruit volgt de omgekeerde inclusie.

We voltooien het bewijs door op te merken dat

$$\operatorname{fr}(C) = \overline{C} \setminus \operatorname{int}(C) = C \setminus \operatorname{int}(C) = \{x \in E \mid g(x) = 0\}.$$

$\square$

Lemma 6.3 *Laat $g : E \to \mathbb{R}$ een continue convexe funktie zijn die voldoet aan de voorwaarde van Slater. Zij $C \subset E$ gedefinieerd door (3). Dan geldt voor elke $x_0 \in E$ met $g(x_0) = 0$ dat*

$$\partial\delta_C(x_0) = \mathbb{R}_+\partial g(x_0).$$

Met andere woorden, $\partial\delta_C(x_0)$ is de puntkegel in E' voortgebracht door de verzameling $\partial g(x_0)$.

Bewijs: We beginnen met de opmerking dat

$$\delta_C(x) \geq g(x)$$

voor alle $x \in E$. Immers voor $x \in C$ geldt $\delta_C(x) = 0 \geq g(x)$, terwijl voor $x \in E \setminus C$ geldt $\delta_C(x) = \infty > g(x)$. Merk op dat de bovenstaande formule met $=$ in plaats van $\geq$ geldt dan en slechts dan als $g(x) = 0$, dus als $x \in \mathrm{fr}\,(C)$.

Veronderstel nu eerst dat $x' \in \partial g(x_0)$. Dan geldt voor alle $x \in C$ dat

$$\delta_C(x) \geq g(x) \geq g(x_0) + (x - x_0 \mid c') = \delta_C(x_0) + (x - x_0 \mid x'),$$

waaruit blijkt dat $x' \in \partial\delta_C(x_0)$. We concluderen dat $\partial g(x_0) \subset \partial\delta_C(x_0)$, en omdat de laatste verzameling een puntkegel in E' is dus ook dat

$$\mathbb{R}_+\partial g(x_0) \subset \partial\delta_C(x_0). \tag{4}$$

Om in te zien dat ook de omgekeerde inclusie, en dus de gelijkheid van de twee verzamelingen in (4) geldt, veronderstellen we dat $x' \in \delta_C(x_0)$. Is $x' = 0$, dan is het evident dat $x' \in \mathbb{R}_+\partial g(x_0)$. Veronderstel daarom dat $x' \neq 0$. Wegens Lemma 6.1 geldt voor alle $x \in C$ dat $0 \geq (x - x_0 \mid x')$, dus

$$(x_0 \mid x') \geq (x \mid x').$$

Hieruit blijkt dat C aan één kant van het gesloten hypervlak $H_0 : x' = \beta_0$ ligt, met $\beta_0 = (x_0 \mid x')$. In het bijzonder volgt dat $\mathrm{int}\,(C)$ een lege doorsnede met H_0 heeft. Zij $A := \mathrm{epi}\,(g)$. Dan is A een convexe deelverzameling van $E \oplus \mathbb{R}$. Het inwendige van A bestaat uit de punten $(x, \lambda) \in E \oplus \mathbb{R}$ met $\lambda > g(x)$. Hieruit volgt dat

$$\mathrm{int}\,(A) \cap (E \times \{0\}) = \{(x, 0) \mid x \in E,\ g(x) < 0\} = \mathrm{int}\,(C) \times \{0\},$$

waaruit weer blijkt dat $\mathrm{int}\,(A)$ een lege doorsnede met de convexe verzameling $H_0 \times \{0\}$ heeft.

Met de scheidingsstelling, Stelling 4.8, volgt nu het bestaan van een gesloten hypervlak H dat $A = \mathrm{epi}\,(g)$ en $H_0 \times \{0\}$ echt scheidt. Uit $(x_0, 0) \in A \cap (H_0 \times \{0\})$ volgt dat $(x_0, g(x_0)) = (x_0, 0) \in H$. Derhalve is H een stuthypervlak van $\mathrm{epi}\,(g)$ in het punt $(x_0, g(x_0))$. Aangezien $x_0 \in E = \mathrm{int}\,(\mathrm{dom}\,(g))$, is het hypervlak H niet-verticaal, zie Lemma 6.33. Derhalve is er een $x_0' \in E'$ zo dat H gekarakteriseerd kan worden als de verzameling van punten $(x, \lambda) \in E \oplus \mathbb{R}$ die voldoen aan de vergelijking: $\lambda = (x - x_0 \mid x_0')$. Er geldt dat $\mathrm{epi}\,(g)$ aan één kant van H ligt, en dit impliceert dat $\mathrm{epi}\,(g)$ 'boven' H ligt (ga na). Dus $x_0' \in \partial g(x_0)$.

We voltooien het bewijs van de omgekeerde inclusie door aan te tonen dat $x' \in \mathbb{R}_+ x_0'$. Zoals gezegd ligt het punt $(x_0, 0)$ in H. Het punt ligt ook in $H_0 \times \{0\}$, terwijl de affiene variëteit $H_0 \times \{0\}$ aan één kant van H ligt. Hieruit volgt dat $H_0 \times \{0\}$ bevat is in H (ga na!). We schrijven $H_0 = x_0 + L$, met $L := \ker x'$ een gesloten lineaire deelruimte van E van codimensie 1. Voor alle punten $x \in L$ geldt dat $x + x_0 \in H_0$, dus $(x + x_0, 0) \in H$, waaruit volgt dat $0 = (x \mid x_0')$. We concluderen dat $x_0' = 0$ op L. Met behulp van het onderstaande lemma concluderen we hieruit dat $x_0' = cx'$ voor een $c \in \mathbb{R}$. Kies tenslotte een $x \in \mathrm{int}\,(C)$. Dan is $0 > g(x) \geq (x - x_0 \mid x_0') = c(x - x_0 \mid x')$, maar ook $0 = \delta_C(x) \geq (x - x_0 \mid x')$. Hieruit leiden we af dat $c > 0$, en we concluderen dat $x' = c^{-1}x_0' \in \mathbb{R}_+\partial g(x_0)$. □

Lemma 6.4 *Zij $x', y' \in E'$. Dan geldt dat*

$$\ker x' \subset \ker y' \iff y' \in \mathbb{R}x'.$$

Bewijs: De implicatie '$\Leftarrow$' is evident. We volstaan met het aantonen van '$\Rightarrow$'. Veronderstel dat $\ker x' \subset \ker y'$. Uit $x' = 0$ volgt $E = \ker x' \subset \ker y'$, dus $y' = 0 \in \mathbb{R}x'$. Veronderstel daarom dat $x' \neq 0$. Kies een $v \in E$ met $x'(v) = 1$. Dan is $E = \ker x' \oplus \mathbb{R}v$. Laat $y' \in E'$ verdwijnen op $\ker x'$ en schrijf $c = y'(v)$. Dan is $y' = cx'$ op $\ker x'$ en op v, dus op E. □

Opgaven bij H8

Opgave 8.1

We beschouwen de verzameling $C \subset \mathbb{R}^2$ bestaande uit de punten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ met $x > 0$, $xy \geq 1$. Voorts beschouwen we een convexe funktie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Toon aan: f neemt op C een absoluut minimum aan in een punt $(a, b) \in C$ dan en slechts dan als aan één van de volgende condities is voldaan

(a) $ab > 1$ en $0 \in \partial f(a, b)$.

(b) $ab = 1$ en er is een $\lambda \geq 0$ met $\lambda(b, a) \in \partial f(a, b)$;

We beschouwen nu de funktie $f : (x, y) \mapsto x^2 + 2y^2$. Toon aan dat f convex is (Hint: gebruik de Hessiaan van f). Bepaal alle punten $(a, b) \in C$ waarin $f|_C$ een globaal minimum aanneemt.

Opgave 8.2

Reken Voorbeeld 8.10 uit het boek geheel door met de stelling van Kuhn-Tucker.

Opgave 8.3

We beschouwen de verzameling C bestaande uit de punten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ met $x^2 + y^2 \leq 1$ en $(x + 1)^2 + y^2 \leq 1$. We beschouwen voorts de funktie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(x, y) = y^2 - x$. Teken C en schets enkele niveaulijnen van f. Wat verwacht u voor de globale minima van $f|_C$? Reken nu het voorbeeld door met behulp van de stelling van Kuhn-Tucker.

Opgave 8.4

We beschouwen de verzameling $C \subset \mathbb{R}^2$ bestaande uit de punten (x, y) met $x^2 + y^2 \leq 1$ en $x + y \leq 0$. Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(x, y) = x^2 - y$. Gebruik de stelling van Kuhn-Tucker om alle globale minima van $f|_C$ te bepalen. Controleer uw berekening met een schets.

Opgave 8.5

In $\mathbb{R}^3$ beschouwen we de verzameling C van punten bestaande uit alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ met $x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 1$ en $2x^2 + 2y^2 + z^2 \leq 1$. Bepaal alle globale minima van $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto x + y - z$ op de verzameling C, door gebruik te maken van de stelling van Kuhn-Tucker.

Antw: f heeft precies één globaal minimum, n.l. in $-\frac{1}{6}\sqrt{6}(1, 1, -\sqrt{2})$.