Handleiding

Analyse 2

E.P. van den Ban

Mathematisch Instituut
Universiteit Utrecht
Voorjaar 1998

1 De stelling van Bolzano-Weierstrass

Inleiding

In de Handleiding Analyse 1, §4, werd het volgende resultaat genoemd als één van de hoofdresultaten van de analyse.

Stelling (Maximum-minimum stelling) *Zij $I = [a, b]$ een gesloten en begrensd interval in $\mathbb{R}$ en $f : I \to \mathbb{R}$ een continue functie. Dan neemt f op I zijn minimum en zijn maximum aan; d.w.z. er zijn punten $p, q \in I$ zo dat*

$$f(p) \leq f(x) \leq f(q)$$

voor alle $x \in I$.

Doel van dit hoofdstuk is een bewijs van deze stelling te geven. Hiertoe ontwikkelen we enige theorie die zal culmineren in de Stelling van Bolzano-Weierstrass (Stelling 1.30). Met behulp van de laatste stelling zullen we de maximum-minimum stelling kunnen bewijzen. Tevens zullen we deze stelling generaliseren naar $\mathbb{R}^p$, voor $p \geq 1$.

1.1 Limieten van rijen

In deze paragraaf veronderstellen we dat (V, d) een metrische ruimte is. Deze structuur is behandeld in de Handleiding Analyse 1, §6. We herhalen hier kort de definitie.

Definitie 1.1 Zij V een verzameling. Onder een afstand (of metriek) op V verstaan we een afbeelding $d : V \times V \to [0, \infty[$, zo dat voor alle $x, y, z \in V$ het volgende geldt:

(a) $d(x, y) \geq 0$; voorts: $d(x, y) = 0 \iff x = y$;

(b) $d(x, y) = d(y, x)$ (symmetrie);

(c) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (driehoeksongelijkheid).

Onder een metrische ruimte verstaan we een paar (V, d) met V een verzameling en d een metriek op V.

We veronderstellen dat u bekend bent met het begrip metrische ruimte en met daarmee samenhangende begrippen als inwendig punt en verdichtingspunt van een verzameling, inwendige, afsluiting en rand van een verzameling, open en gesloten verzameling. Tevens veronderstellen we hier dat u bekend bent met het limietbegrip voor afbeeldingen tussen metrische ruimten. Het is verstandig de betreffende paragrafen 6 en 7 uit de Handleiding Analyse 1 nog eens door te nemen.

We herhalen hier nog eens de voor ons belangrijke voorbeelden van metrische ruimten.

Voorbeelden 1.2 (a) Is $(E, \|\cdot\|)$ een genormeerde lineaire ruimte, dan wordt door $d(v, w) = \|v - w\|$ een afstand op E gedefinieerd. Hiermee is (E, d) een metrische ruimte.

(b) Op $\mathbb{R}^p$ is de Euclidische norm gedefinieerd door

$$\|x\| = (\sum_{j=1}^{p} x_j^2)^{\frac{1}{2}} \qquad (x \in \mathbb{R}^p).$$

Hiermee is $(\mathbb{R}^p, \|\cdot\|)$ een genormeerde lineaire ruimte. De volgens (a) gedefinieerde afstand $d(x,y) = \|x-y\|$ heet de Euclidische afstand op $\mathbb{R}^p$.

(c) Zij X een verzameling. Met $\mathrm{Func}(X,\mathbb{R}^p)$ noteren we de lineaire ruimte van functies $f : X \to \mathbb{R}^p$. Zo'n functie f heet begrensd als er een $M > 0$ bestaat zo dat $\|f(x)\| \le M$ voor alle $x \in X$. De collectie van begrensde functies $f : X \to \mathbb{R}^p$ wordt genoteerd met $B(X,\mathbb{R}^p)$; het is een lineaire deelruimte van $\mathrm{Func}(X,\mathbb{R}^p)$. We schrijven ook wel $B(X)$ voor $B(X,\mathbb{R}^p)$. Op $B(X,\mathbb{R}^p)$ is de uniforme norm (of sup-norm) gedefinieerd door

$$\|f\| := \sup\{\|f(x)\| \mid x \in X\}.$$

In de Handleiding Analyse 1, formule (6.6), wordt deze definitie slechts gegeven in het geval $p = 1$. Met de daar gegeven redenering volgt echter ook in het geval $p > 1$ dat $\|\cdot\|$ een norm op $B(X,\mathbb{R}^p)$ is. De bij de uniforme norm horende metriek heet ook wel de uniforme metriek op $B(X,\mathbb{R}^p)$.

Voorbeeld 1.3 Het volgende voorbeeld zal voor ons belangrijk zijn, maar is niet behandeld in Analyse 1. We beschouwen een metrische ruimte (V,d) en een deelverzameling $A \subset V$. We definiëren de afbeelding $d_A : A \times A \to [0,\infty[$ als de beperking van $d : V \times V \to [0,\infty[$ tot $A \times A$. Met andere woorden, voor alle $a, b \in A$ geldt dat $d_A(a,b) = d(a,b)$. Uiteraard voldoet de afbeelding d_A aan de eigenschappen (a)-(c) van Definitie 1.1, voor alle $x, y, z \in A$. Derhalve is d_A een metriek op A; het paar (A, d_A) is een metrische ruimte. De metriek d_A heet de (door d) op A geïnduceerde metriek.

In de volgende definitie zullen we vastleggen wat we onder een rij in V verstaan. Een rij in V dient zoiets te zijn als een gegeven (aftelbaar oneindig) stel elementen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ van V. Daaronder mogen gelijken voorkomen. Merk op dat zo'n stel elementen vastligt als voor iedere $n \in \mathbb{N}$ een element $a_n \in V$ gegeven is. Weer anders gezegd, als de afbeelding $n \mapsto a_n$ van $\mathbb{N}$ naar V gegeven is.

Definitie 1.4 Onder een rij in V verstaan we een afbeelding $n \mapsto a_n$, $\mathbb{N} \to V$. Deze afbeelding wordt ook wel genoteerd met $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, met $(a_n)_{n\ge 0}$ of met $(a_n)_{n=0}^{\infty}$.

U bent gewend dat een afbeelding $\mathbb{N} \to V$ genoteerd wordt met $\alpha : n \mapsto \alpha(n)$. De notatie van de bovenstaande definitie hanteren we als we α ook daadwerkelijk als een rij willen zien. Het komt ook wel eens voor dat we spreken over de rij $(\alpha(n))_{n\in\mathbb{N}}$ in V.

Het is soms handig de elementen van een rij vanaf 1 (of, algemener, een groter geheel getal) te nummeren, dus $(a_n)_{n\ge 1}$. Dit is bijvoorbeeld om voor de hand liggende redenen het geval bij de rij $a_n := \frac{1}{n}$. Men kan door herbenoemen altijd herleiden tot de bovenstaande situatie, door te schrijven $b_n = a_{n+1}$ voor $n \ge 0$ en de rij $(b_n)_{n\ge 0}$ te beschouwen; in het gegeven voorbeeld dus de rij $(\frac{1}{1+n})_{n\ge 0}$.

Voorbeeld 1.5 We beschouwen $V = \mathbb{R}$. Voorbeelden van rijen in $\mathbb{R}$ zijn:

$$a_n := \frac{1}{n} \ \ (n \ge 1); \quad b_n := n; \quad c_n := \frac{n}{1+n}; \quad d_n := (1 + \frac{1}{n})^n \ \ (n \ge 1).$$

Voorbeeld 1.6 Volgens Voorbeeld 1.2 (c) is $B := B([1,2])$, voorzien van de uniforme metriek, een metrische ruimte. Voor $n \in \mathbb{N}$ definiëren we de functie $f_n : [1,2] \to \mathbb{R}$ door $f_n(x) = \frac{n}{n+x}$. Maak zelf een schets van de grafiek van f_n en merk op dat $f_n \in B$. Hiermee is een rij $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ van functies in B vastgelegd. U kunt zich deze rij visueel voorstellen door te denken aan de rij van grafieken. Maar soms is het verstandig de voorstelling abstracter te houden door bij iedere f_n te denken aan een punt in de ruimte B. Welke voorstelling het beste werkt is afhankelijk van de context.

We bepalen de sup-norm $\|f_n\|$ van f_n. Eerst merken we op dat $f_n \geq 0$, zodat $|f_n(x)| = f_n(x)$. Omdat f_n monotoon dalend is op $[1,2]$, geldt $|f_n(x)| = f_n(x) \leq f_n(1) = \frac{n}{n+1}$ voor alle $n \geq 1$. Hieruit volgt dat $\frac{n}{n+1}$ een bovengrens is voor $|f_n(x)|$, $x \in [1,2]$. Deze bovengrens wordt bovendien aangenomen (in 1), en is daarom de kleinste bovengrens; er volgt dat $\|f_n\| = \frac{n}{n+1}$. Voor de uniforme afstand van f_n tot de nul-functie geldt derhalve: $d(0, f_n) = \|f_n - 0\| = \|f_n\| = \frac{n}{n+1}$.

Men kan spreken over de limiet van een rij.

Definitie 1.7 Is $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij en a een element in V, dan betekent

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \tag{1}$$

dat er voor iedere $\varepsilon > 0$ een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zo dat

$$n \geq N \Rightarrow d(a_n, a) < \varepsilon. \tag{2}$$

In plaats van (1) schrijven we soms ook wel $a_n \to a$ $(n \to \infty)$ (spreek uit: a_n nadert tot a als n naar oneindig gaat).

Opmerking 1.8 (a) Merk op dat de uitspraak (2) equivalent is met de volgende meer meetkundig getinte uitspraak:

$$n \geq N \Rightarrow a_n \in B(a;\varepsilon).$$

Hierbij is $B(a;\varepsilon) := \{x \in V \mid d(x,a) < \varepsilon\}$ de open ε-bol rond a.

(b) Een rij heeft ten hoogste één limiet. Dit zien we als volgt in. Stel $b \in V$ en ook $\lim_{n\to\infty} a_n = b$. Het is dan voldoende aan te tonen dat $a = b$.

Volgens de driehoeksgelijkheid geldt, voor elke $n \in \mathbb{N}$:

$$d(a,b) \leq d(a,a_n) + d(a_n,b) = d(a_n,a) + d(a_n,b).$$

Zij nu $\varepsilon > 0$. Dan is er een $N_1 > 0$ zo dat $n \geq N_1 \Rightarrow d(a_n,a) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Tevens is er een $N_2 > 0$ zo dat $n \geq N_2 \Rightarrow d(a_n,b) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Zij $N = \max\{N_1, N_2\}$, dan geldt voor $n \geq N$ dat $d(a_n,a) + d(a_n,b) < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$, dus ook $d(a,b) < \varepsilon$. Het getal $d(a,b)$ ligt dus in $[0,\varepsilon[$ voor iedere $\varepsilon > 0$. Dit impliceert dat $d(a,b) = 0$, dus $a = b$.

Definitie 1.9 De rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in V heet convergent (in V) als er een element $a \in V$ bestaat zo dat $a_n \to a$ $(n \to \infty)$. Een niet-convergente rij heet divergent.

Het element a in de bovenstaande definitie is noodzakelijkerwijs uniek; dit hebben we aangetoond in Opmerking 1.8 (b).

Voorbeeld 1.10 We beschouwen nog eens de rijen $(a_n)_{n\geq 1}$ en $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uit Voorbeeld 1.5.

We zullen uit de definitie laten zien dat de rij (a_n) convergeert met limiet 0, terwijl de rij (b_n) divergeert.

Zij $\varepsilon > 0$. Kies $N \in \mathbb{N}$ zo dat $N > \frac{1}{\varepsilon}$. (Merk op dat deze N groter is naarmate ε dichter bij nul ligt.) Dan geldt voor alle $n \geq N$ dat $n > \frac{1}{\varepsilon}$, dus ook $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Hieruit blijkt dat $n \geq N \Rightarrow a_n \in B(0;\varepsilon)$. De rij (a_n) convergeert derhalve met limiet 0.

Stel dat de rij (b_n) convergeert. Dan is er een $b \in \mathbb{R}$ met $b_n \to b$ voor $n \to \infty$. Wegens de definitie van limiet (met $\varepsilon = 1$) is er dan een $N \in \mathbb{N}$ zo dat $n \geq N \Rightarrow b_n \in B(b;1)$. In het bijzonder geldt dan $n \geq N \Rightarrow n < b+1$, tegenspraak. De rij (b_n) kan dus niet convergeren; we concluderen dat hij divergeert.

Voorbeeld 1.11 We beschouwen nog eens Voorbeeld 1.6. We zullen laten zien dat de rij $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $B = B[1,2]$ convergeert met als limiet de constante functie $f : x \mapsto 1$. Hiertoe onderzoeken we de functie $f_n - f$. Voor $x \in [1,2]$ geldt $f_n(x) - f(x) = \frac{n}{n+x} - 1 = \frac{-x}{n+x}$. Derhalve: $|f_n(x) - f(x)| = \frac{|x|}{n+x} \leq \frac{2}{n+1}$ voor alle $x \in [1,2]$. Met de definitie van de sup-norm volgt nu dat

$$\|f_n - f\| \leq \frac{2}{n+1}, \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Zij $\varepsilon > 0$. Kies $N \in \mathbb{N}$ zo dat $N > \frac{2}{\varepsilon} - 1$. (Merk op dat deze N groter is naarmate ε dichter bij nul gelegen is). Dan geldt voor $n \geq N$ dat $n > \frac{2}{\varepsilon} - 1$ waaruit volgt

$$\|f_n - f\| \leq \frac{2}{n+1} < \varepsilon.$$

Hiermee is aangetoond dat $f_n \to f$ als $n \to \infty$.

Opmerking 1.12 Merk op dat Definitie 1.7 grote gelijkenis vertoont met de definitie van een limiet van de vorm $\lim_{x\to a} f(x)$, met f een afbeelding tussen metrische ruimten, zie Handleiding Analyse 1, Definitie 7.1. Net als in die definitie kan men $\varepsilon > 0$ zien als tevoren gegeven nauwkeurigheid. De (van ε afhankelijke) N is een index voorbij welke alle elementen van de rij ε-dicht bij a liggen.

Het is zelfs mogelijk de definitie van limiet van een rij zo te herformuleren dat hij een bijzonder geval wordt van Definitie 7.1 uit de Handleiding Analyse 1. Dit gaat als volgt. Aan $\mathbb{N}$ voegen we een element toe dat we noteren met ∞. De zo verkregen uitbreiding van $\mathbb{N}$ noteren we met

$$\widehat{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

Het idee is nu een metriek op $\widehat{\mathbb{N}}$ te kiezen, ten aanzien waarvan verzamelingen van de vorm $\{N, N+1, \ldots, \infty\}$ omgevingen van ∞ worden. Hiertoe spreken we af dat we $2^{-\infty}$ als notatie voor het element $0 \in \mathbb{R}$ gebruiken, en definiëren de afbeelding $d : \widehat{\mathbb{N}} \times \widehat{\mathbb{N}} \to [0,\infty[$ door

$$d(n,m) = |2^{-n} - 2^{-m}| \qquad (n, m \in \widehat{\mathbb{N}}).$$

We zullen aantonen dat d een metriek op $\widehat{\mathbb{N}}$ definieert. Zij A de deelverzameling van $\mathbb{R}$ bestaande uit de elementen 0 en 2^{-n}, $n \in \mathbb{N}$. Zij d_A de metriek op A die geïnduceerd wordt door de Euclidische metriek (zie Opmerking 1.3). Dan is $d_A(a,b) = |a-b|$ voor alle $a, b \in A$. De afbeelding $\varphi : \widehat{\mathbb{N}} \to A, n \mapsto 2^{-n}$ is een bijectie. In het bijzonder is $\varphi(\infty) = 2^{-\infty} = 0$. Voor de hierboven gedefinieerde afbeelding $d : \widehat{\mathbb{N}} \times \widehat{\mathbb{N}} \to [0, \infty[$ geldt nu $d(n, m) = d_A(\varphi(n), \varphi(m))$, m.a.w. via de bijectie φ kunnen we $(\widehat{\mathbb{N}}, d)$ identificeren met (A, d_A). Aangezien d_A een metriek op A is, is d een metriek op V.

We komen nu aan het limietbegrip. De verzameling $\mathbb{N}$ is een deel van de metrische ruimte $\widehat{\mathbb{N}}$. De rij (a_n) is een afbeelding $\widehat{\mathbb{N}} \supset \mathbb{N} \to V$ die we ook noteren met $\alpha : n \mapsto \alpha(n) = a_n$. In de context van metrische ruimten betekent de uitspraak

$$\lim_{n\to\infty} \alpha(n) = a \tag{3}$$

dat er voor iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zo dat

$$\alpha(\mathbb{N} \cap B_{\widehat{\mathbb{N}}}(\infty; \delta)) \subset B(a, \varepsilon). \tag{4}$$

Nu is $d(n, \infty) = 2^{-n}$, dus $\mathbb{N} \cap B_{\widehat{\mathbb{N}}}(\infty; \delta) = \{n \in \mathbb{N} \mid 2^{-n} < \delta\}$. Hieruit blijkt dat (4) equivalent is met

$$n \in \mathbb{N},\ \ 2^{-n} < \delta \quad \Rightarrow \quad d(a_n, a) < \varepsilon. \tag{5}$$

Als (5) geldt, dan geldt (2) met $N \in \mathbb{N}$ zo dat $2^{-N} < \delta$. Geldt omgekeerd (2), dan geldt (5) met $0 < \delta < 2^{-N}$. We concluderen, voor iedere $\varepsilon > 0$, dat het bestaan van een N zo dat (2) gelijkwaardig is met het bestaan van een $\delta > 0$ zo dat (4). Hieruit volgt dat (1) gelijkwaardig is met (3).

De kracht van de bovenstaande opmerking is dat eerder afgeleide stellingen over limieten van afbeeldingen tussen metrische ruimten zich direct laten vertalen naar stellingen over rijen in een metrische ruimte. Hieronder behandelen we enkele van die stellingen.

Stelling 1.13 (Somregel voor limieten van rijen) *Zij E een genormeerde lineaire ruimte en (a_n), (b_n) een tweetal rijen in E, en zij $a, b \in E$. Stel dat*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \text{en} \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

Dan geldt:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b.$$

Opmerking 1.14 Merk op dat met de laatste uitspraak bedoeld wordt: $c_n = a_n + b_n$ definieert weer een rij in E en er geldt dat $\lim_{n\to\infty} c_n = a + b$.

Bewijs: We gebruiken Opmerking 1.12 en leiden dit resultaat af uit de overeenkomstige Stelling 7.1 uit de Handleiding Analyse 1, door in die stelling $E = Y$, $V = \widehat{\mathbb{N}}$, $D = \mathbb{N}$, $f : n \mapsto a_n$, $g : n \mapsto b_n$, $a = \infty$ en $y = a$, $z = b$ te nemen. $\square$

De volgende stelling is een direct gevolg van de overeenkomstige Stellingen 7.2 en 7.5 uit de Handleiding Analyse 1.

Stelling 1.15 (Product- en quotiëntregel voor limieten) *Zij E een genormeerde lineaire ruimte, (λ_n) een rij in $\mathbb{R}$, en (a_n) een rij in E. Zij $\lambda \in \mathbb{R}$, $a \in E$ en stel dat*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda \qquad \text{en} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Dan geldt:

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda_n a_n) = \lambda a.$$

Is bovendien $\lambda \neq 0$, *dan is* $\lambda_n \neq 0$ *voor voldoend grote* $n \in \mathbb{N}$ *en:*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n^{-1} a_n = \lambda^{-1} a.$$

Voorbeeld 1.16 We beschouwen nog eens de rij (c_n) uit Voorbeeld 1.5. Voor alle $n \geq 1$ geldt

$$c_n = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}.$$

In Voorbeeld 1.10 werd aangetoond dat $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Met behulp van Stelling 1.13 volgt nu dat $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}) = 1+0 = 1$, en met Stelling 1.15 volgt tenslotte dat

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{1}{1} = 1.$$

Tenslotte is er ook nog een nuttige variant van de substitutieregel (Stelling 7.3 uit de Handleiding Analyse 1, daar kettingregel voor limieten genoemd).

Stelling 1.17 (Substitutie van rijen in limieten) *Laten* (V, d_V) *en* (W, d_W) *metrische ruimten zijn en* $g : V \supset S \to W$ *een afbeelding. Zij voorts* $a \in V$, $b \in W$ *en veronderstel dat* $\lim_{x\to a} g(x) = b$. *Is* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *een rij in* S *met* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, *dan geldt*

$$\lim_{n\to\infty} g(a_n) = b.$$

Bewijs: Wegens Opmerking 1.12 volgt dit resultaat uit Stelling 7.3 in de Handleiding Analyse 1, door $X = \hat{N}$, $D = \mathbb{N}$, $f : n \mapsto a_n$, $Y = V$, $Z = W$, $E = S$, $g = g$, $a = \infty$ en $b = a$, $c = b$ te nemen. □

Voorbeeld 1.18 We zullen aantonen dat de rij (d_n) uit Voorbeeld 1.5 convergeert met limiet e. Daartoe beschouwen we de functie $g : \mathbb{R} \supset]0,\infty[\to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $g(x) = x^{-1}\log(1+x)$. Uit de stelling van Taylor met rest volgt dat $\lim_{x\to 0} g(x) = 1$. Voor alle $n \geq 1$ geldt $\frac{1}{n} \in]0,\infty[$, terwijl $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Met behulp van de bovenstaande stelling volgt nu dat

$$\lim_{n\to\infty} g(\frac{1}{n}) = 1.$$

Vervolgens definiëren we de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y \mapsto e^y$. Deze functie is continu in 1, dus $\lim_{y\to 1} f(y) = f(1) = e$. Met de bovenstaande stelling concluderen we nu dat

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} f(g(\frac{1}{n})) = e.$$

Voor rijen van reële getallen is de volgende stelling erg nuttig.

Stelling 1.19 (Insluitstelling) *Laten (a_n), (b_n) en (c_n) rijen in $\mathbb{R}$ zijn, en veronderstel dat*

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

voor alle $n \in \mathbb{N}$. Zijn de rijen (a_n) en (c_n) convergent met dezelfde limiet $\lambda \in \mathbb{R}$, dan is ook de rij (b_n) convergent met limiet λ.

Bewijs: Zij $\varepsilon > 0$. Dan is er een getal $N_1 \in \mathbb{N}$ zo dat

$$n \geq N_1 \Rightarrow a_n \in B(\lambda, \varepsilon) =]\,\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[.$$

Tevens is er een $N_2 \in \mathbb{N}$ zo dat

$$n \geq N_2 \Rightarrow c_n \in]\,\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[.$$

Zij $N = \max\{N_1, N_2\}$. Dan geldt voor $n \geq N$ dat a_n en c_n beide tot het interval $]-\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon[$ behoren. Aangezien b_n tussen a_n en c_n ligt, geldt ook $b_n \in]\,\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[$. Dus $n \geq N \Rightarrow b_n \in B(\lambda, \varepsilon)$. Volgens de definitie van limiet van een rij geldt dus dat $b_n \to \lambda$ $(n \to \infty)$. □

In $\mathbb{R}^p$ kan men de convergentie van een rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ onderzoeken door te schrijven $a_n = (a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{np})$ en voor elke $1 \leq j \leq p$ de convergentie in $\mathbb{R}$ van de rij $(a_{nj})_{n\geq 0}$ der j-de coördinaten te onderzoeken.

Om dit in te zien hebben we de volgende schatting nodig die de Euclidische norm in $\mathbb{R}^p$ vergelijkt met de lengten der coördinaten.

Lemma 1.20 (Relaties tussen norm en coördinaten) *Voor elke $x \in \mathbb{R}^p$ geldt:*

(a) $|x_i| \leq \|x\|$ *voor alle* $1 \leq i \leq p$.

(b) $\|x\| \leq \sum_{i=1}^{p} |x_i|$.

Bewijs: De eerste ongelijkheid volgt uit

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{p} |x_j|^2 \geq |x_i|^2.$$

De tweede ongelijkheid volgt uit de herhaalde driehoeksongelijkheid. Immers

$$\|x\| = \|x_1 e_1 + \cdots + x_p e_p\| \leq |x_1|\|e_1\| + \cdots + |x_p|\|e_p\| = |x_1| + \cdots + |x_p|.$$ □

Lemma 1.21 *Zij (a_n) een rij in $\mathbb{R}^p$. De rij (a_n) is convergent dan en slechts dan als voor iedere $1 \leq j \leq p$ geldt dat de rij $(a_{nj})_{n\in\mathbb{N}}$ van de j-de componenten convergent is in $\mathbb{R}$. Bovendien geldt in dat geval dat de j-de component van de limiet gegeven wordt door:*

$$(\lim_{n\to\infty} a_n)_j = \lim_{n\to\infty} a_{nj}.$$

Bewijs: Veronderstel eerst dat de rij (a_n) convergent is, en noem de limiet α (we wijken hier af van de naam a om te vermijden dat a_n zowel een element van de rij als de n-de coördinaat zou betekenen). Voor de j–de componenten geldt:

$$0 \leq |a_{nj} - \alpha_j| \leq \|a_n - \alpha\|$$

(zie Lemma 1.20 (a)). Door toepassing van de insluitstelling voor rijen in $\mathbb{R}$ (Stelling 1.19) concluderen we hieruit dat $\lim_{n\to\infty} a_{nj} = \alpha_j$.

Veronderstel nu omgekeerd dat voor iedere $1 \leq j \leq p$ de rij (a_{nj}) convergeert, en noem de limiet α_j. Zij $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$. Dan geldt wegens Lemma 1.20 (b) dat

$$0 \leq \|a_k - \alpha\| \leq \sum_{j=1}^{p} |a_{kj} - \alpha_j|.$$

Door toepassing van de somregel en de insluitstelling voor rijen in $\mathbb{R}$ concluderen we hieruit dat $\lim_{k\to\infty} \|a_k - \alpha\| = 0$, dus de rij $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergeert met limiet α. □

1.2 De stelling van Bolzano-Weierstrass

In deze paragraaf behandelen we de Stelling van Bolzano-Weierstrass. Deze stelling berust uiteindelijk op de volledigheid van de ordening op $\mathbb{R}$. Voor een bespreking van deze volledigheid verwijzen we naar de Handleiding Analyse 1, §4, blz. 20, en naar de Naslagtekst Analyse 1, §3.4. We recapituleren hier kort de belangrijkste aspecten van deze volledigheid.

Zij A een deelverzameling van $\mathbb{R}$. Onder een bovengrens van A verstaan we een reëel getal b met de eigenschap dat $a \leq b$ voor alle $a \in A$. De verzameling A heet naar boven begrensd als A een bovengrens bezit. Is b_0 een bovengrens van A, en voldoet iedere bovengrens b van A aan $b_0 \leq b$, dan heet b_0 een kleinste bovengrens of supremum van A. Het is uit de definities gemakkelijk af te leiden dat iedere deelverzameling A van $\mathbb{R}$ ten hoogste één supremum kan hebben. Heeft A een supremum dan noteren we dat met $\sup A$. De volledigheid van de ordening op $\mathbb{R}$ wordt nu tot uitdrukking gebracht in het volgende resultaat.

Stelling 1.22 (Supremum-stelling) *Zij A een naar boven begrensde niet-lege deelverzameling van $\mathbb{R}$. Dan heeft A een supremum* $\sup A$.

Opmerking 1.23 Op soortgelijke wijze definiëren we de begrippen ondergrens en grootste ondergrens (of infimum) van een verzameling. Equivalent met de supremum-stelling is dan de infimum-stelling: iedere naar onderen begrensde niet-lege deelverzameling A van $\mathbb{R}$ heeft een infimum $\inf A$.

In het bewijs van de Stelling van Bolzano-Weierstrass zullen we een gevolg van de supremum stelling voor monotoon stijgende rijen gebruiken.

Een rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heet monotoon stijgend als $a_n \leq a_{n+1}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Hij heet strikt monotoon stijgend als $a_n < a_{n+1}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. De rij (a_n) heet naar boven begrensd als er een $M \in \mathbb{R}$ bestaat zo dat $a_n \leq M$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Op analoge wijze definiëren we wanneer een rij (strikt) monotoon dalend of naar onderen begrensd is.

Lemma 1.24 *Zij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij in $\mathbb{R}$. Als de rij (a_n) monotoon stijgend en naar boven begrensd is, dan is hij convergent.*

Bewijs: De deelverzameling $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ van $\mathbb{R}$ is niet-leeg en bevat in $]-\infty, M]$, dus naar boven begrensd. Wegens de supremum-stelling heeft A een kleinste bovengrens $s = \sup A \in \mathbb{R}$. We zullen aantonen dat $a_n \to s$ $(n \to \infty)$.

Uit het feit dat s een bovengrens is voor A volgt dat $a_n \leq s$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Zij $\varepsilon > 0$. Dan is $s - \varepsilon$ strikt kleiner dan s, dus geen bovengrens van A. Derhalve is er een $N \in \mathbb{N}$ zo dat $s - \varepsilon < a_N$. Voor alle $n \geq N$ geldt $a_N \leq a_n$ en $a_n \leq s$. Er volgt dat voor alle $n \geq N$ geldt $s - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq s$, dus $a_n \in B(s, \varepsilon)$. Voor elke $\varepsilon > 0$ is zo'n N te vinden; derhalve is $\lim_{n\to\infty} a_n = s$. □

Opmerking 1.25 (a) Omgekeerd kan men de supremum-stelling afleiden uit het bovenstaande lemma. Het lemma is dus equivalent met de supremum-stelling.

(b) Op soortgelijke wijze ziet men in dat de infimum-stelling equivalent is met de uitspraak dat iedere naar onder begrensde monotoon dalende rij in $\mathbb{R}$ convergent is.

Op $\mathbb{R}^p$ $(p > 1)$ hebben we geen ordening die zich goed gedraagt ten aanzien van de optelling en de scalarvermenigvuldiging. Dit maakt dat de supremum-stelling, of het bovenstaande resultaat, niet direct te generaliseren zijn naar $\mathbb{R}^p$. De Stelling van Bolzano-Weierstrass voor $\mathbb{R}$ is een andere equivalente stelling over rijen; in de formulering ervan speelt de ordening geen rol. Deze stelling laat zich daarom wel generaliseren naar $\mathbb{R}^p$.

Een deelverzameling A van $\mathbb{R}^p$ $(p \geq 1)$ heet begrensd als er een $R > 0$ bestaat zo dat $A \subset B(0; R)$, met andere woorden als $\|a\| < R$ voor alle $a \in A$. Een rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heet begrensd als de bijbehorende verzameling $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ begrensd is, met andere woorden, als er een $R > 0$ bestaat zo dat

$$\|a_n\| < R \qquad \text{voor alle} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Voor de formulering van de stelling van Bolzano-Weierstrass hebben we het begrip deelrij van een rij nodig.

Definitie 1.26 Zij (V, d) een metrische ruimte en $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij in V. Onder een deelrij van (a_n) verstaan we een rij van de vorm $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, met $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ een rij in $\mathbb{N}$ die strikt monotoon stijgend is, d.w.z. $n_k < n_{k+1}$ voor alle $k \geq 0$.

Voorbeeld 1.27 (a) We beschouwen de rij $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots$ in $\mathbb{R}$. Hiervan is de rij $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \ldots$ een deelrij. Immers schrijf $a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$, dan is de eerste rij gelijk aan $(a_n)_{n\geq 1}$. De tweede rij wordt gegeven door $(a_{n_k})_{k\geq 1}$, met $n_k = 2k$. Aangezien $(2k)_{k\geq 1}$ een strikt monotoon stijgende rij is $\mathbb{N}$ is, is de tweede rij een deelrij van de eerste.

(b) We beschouwen de rij $1, -1, 1, -1, \ldots$. Schrijven we $a_n = (-1)^n$, dan is deze rij gelijk aan $(a_n)_{n\geq 0}$. Schrijven we $n_k = 2k + 1$ $(k \geq 0)$, dan is $(n_k)_{k\geq 0}$ een strikt monotoon stijgende rij van indices. Een deelrij van de bovenstaande rij is dus de rij $(a_{n_k})_{k\geq 0}$, ofwel de constante rij $-1, -1, \ldots$.

Geef zelf een bewijs van het volgende voor de hand liggende lemma.

Lemma 1.28 *Zij (V, d) een metrische ruimte en $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een convergente rij met limiet a in V. Dan is iedere deelrij van $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ook convergent met limiet a.*

Lemma 1.29 *Zij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij in $\mathbb{R}^p$. Als de rij (a_n) convergent is, dan is hij begrensd.*

Bewijs: Stel dat (a_n) convergent is met limiet $a \in \mathbb{R}^p$. Uit de definitie van limiet volgt het bestaan van een $N \in \mathbb{N}$ zo dat voor alle $n \geq N$ geldt: $a_n \in B(a; 1)$, waaruit met de driehoeksongelijkheid volgt: $\|a_n\| \leq \|a_n - a\| + \|a\| < 1 + \|a\|$. Kies nu $M > \max\{\|a_0\|, \ldots, \|a_{N-1}\|, 1 + \|a\|\}$, dan geldt voor alle $n \in \mathbb{N}$ dat $\|a_n\| < M$. □

Het omgekeerde van dit resultaat is niet geldig. Zo is de rij $1, -1, 1, -1, \ldots$ wel begrensd, maar niet convergent. Verrassend genoeg geldt wel het volgende resultaat.

Stelling 1.30 (Bolzano-Weierstrass) *Zij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij in $\mathbb{R}^p$. Als de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ begrensd is, dan heeft hij een convergente deelrij.*

We zullen dit resultaat bewijzen met inductie naar p. In het geval $p = 1$ speelt Lemma 1.24 een belangrijke rol.

Bewijs van Stelling 1.30 voor $p = 1$:
Laat $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een begrensde rij in $\mathbb{R}$ zijn. Dan is er een $R > 0$ zo dat $a_n \in I_0 := [-R, R]$. In het vervolg zal het handig zijn voor een deelverzameling $J \subset \mathbb{R}$ de volgende notatie te hanteren:

$$\mathcal{N}(J) := \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in J\},$$

in woorden: $\mathcal{N}(J)$ is de collectie van indices $n \in \mathbb{N}$ waarvoor a_n in de verzameling J ligt.

Merk op dat $\mathcal{N}(I_0) = \mathbb{N}$, dus $\mathcal{N}(I_0)$ is een oneindige verzameling. We geven nu een inductieve definitie van een rij gesloten en begrensde intervallen $I_k = [\alpha_k, \beta_k]$, $k \geq 0$ met de eigenschap dat $I_k \supset I_{k+1}$ voor $k \geq 0$, terwijl $\mathcal{N}(I_k)$ oneindig is voor elke k.

Het interval I_0 is hierboven reeds gedefinieerd. Er geldt $\alpha_0 = -R$, $\beta_0 = R$ en $\mathcal{N}(I_0)$ is oneindig. Veronderstel dat $I_0, \ldots, I_k$ reeds gedefinieerd zijn, dan definiëren we het interval I_{k+1} als volgt. We verdelen het interval I_k in twee gelijke stukken: $I_k = I_k^1 \cup I_k^2$, met $I_k^1 = [\alpha_k, \gamma_k]$ en $I_k^2 = [\gamma_k, \beta_k]$; hierin is $\gamma_k = \frac{1}{2}(\alpha_k + \beta_k)$, het gemiddelde van α_k en β_k. Voor iedere $n \in \mathbb{N}$ met $a_n \in I_k$ geldt $a_n \in I_k^1$ of $a_n \in I_k^2$; derhalve is $\mathcal{N}(I_k) = \mathcal{N}(I_k^1) \cup \mathcal{N}(I_k^2)$. Aangezien $\mathcal{N}(I_k)$ oneindig is, is minstens één $i \in \{1, 2\}$ waarvoor $\mathcal{N}(I_k^i)$ oneindig is. We kiezen de kleinste i waarvoor dit geldt, en definiëren $I_{k+1} = I_k^i$. Het linkereindpunt van dit interval noemen we α_{k+1}, het rechtereindpunt β_{k+1}. Nu geldt $I_k \supset I_{k+1}$, terwijl $\mathcal{N}(I_{k+1})$ oneindig is.

Met inductie zien we dat voor alle $k \geq 0$ het volgende geldt:

$$\begin{array}{ccccc} \alpha_k & \leq & \alpha_{k+1} & \leq & R \\ \alpha_k & \leq & \beta_k & \leq & \alpha_k + 2^{1-k}R. \end{array}$$

Met Lemma 1.24 volgt uit de eerste reeks ongelijkheden dat de rij $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergent is. Noem de limiet α. Met de optelregel voor limieten van rijen volgt dat $\alpha_k + 2^{1-k}R \to \alpha$ als $k \to \infty$. Wegens de tweede reeks ongelijkheden volgt nu met de insluitstelling (Stelling 1.19) dat $\beta_n \to \alpha$ voor $n \to \infty$.

Nu zijn we dan eindelijk zo ver dat we inductief een deelrij van (a_n) kunnen definiëren die convergent is. We definiëren een rij $(n_k)_{k\geq 0}$ in $\mathbb{N}$ inductief als volgt. Als startwaarde nemen we $n_0 = 0$, en voor $k \geq 0$ definiëren we n_{k+1} als het kleinste element n van $\mathcal{N}(I_{k+1})$ dat voldoet aan $n > n_k$ (dit element bestaat aangezien $\mathcal{N}(I_{k+1})$ oneindig is).

Uit de bovenstaande definitie volgt dat $n_k < n_{k+1}$ voor alle $k \in \mathbb{N}$. Tevens is $n_k \in \mathcal{N}(I_k)$, dus $a_{n_k} \in I_k$, ofwel:

$$\alpha_k \leq a_{n_k} \leq \beta_k$$

voor alle $k \in \mathbb{N}$. Met de insluitstelling volgt nu dat de rij $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergent is, met limiet α. Dit is een convergente deelrij van de oorspronkelijke rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Voltooiing van het bewijs van Stelling 1.30.

We voltooien het bewijs door inductie naar p. Voor $p = 1$ is de stelling reeds bewezen. Veronderstel nu dat $q \geq 1$ en dat de stelling reeds bewezen is voor $p \leq q$. Dan zullen we laten zien dat de stelling geldt voor $p = q + 1$.

Zij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een begrensde rij in $\mathbb{R}^{q+1}$. Is $x \in \mathbb{R}^{q+1}$ dan schrijven we $x' = (x_1, \dots, x_q)$ en $x'' = x_{q+1}$. Met deze definitie geldt $x = (x', x'')$. We merken op dat met de driehoeksongelijkheid volgt $\|x\| \leq \|(x', 0)\| + \|(0, x'')\| = \|x'\| + |x''|$, dus

$$\|x'\| \leq \|x\| \qquad \text{en} \qquad |x''| \leq \|x\|.$$

Passen we deze ongelijkheden toe op a_n dan zien we dat de rij $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ begrensd is in $\mathbb{R}^q$, terwijl $(a''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ begrensd is in $\mathbb{R}$. Aangezien de stelling reeds bewezen is voor $p = q$, heeft de rij $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een convergente deelrij. Er is dus een strikt monotoon stijgende rij $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ van indices, zo dat (a'_{n_k}) convergent is, zeg met limiet $\alpha' \in \mathbb{R}^q$. De rij $(a''_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ hoeft nu niet convergent te zijn, maar is een deelrij van de rij $(a''_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dus in ieder geval begrensd. Aangezien de stelling reeds bewezen is voor $p = 1$, heeft de rij $(a''_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ook een convergente deelrij. Er is dus een strikt monotoon stijgende rij $(k_j)_{j\in\mathbb{N}}$ van indices zo dat de rij $(a''_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ convergent is, zeg met limiet $\alpha'' \in \mathbb{R}$. De rij $(a'_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ is deelrij van de convergente rij $(a'_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, dus convergent met dezelfde limiet α'. Door toepassing van Lemma 1.21 concluderen we nu dat de rij $(a_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ convergent is met limiet $\alpha := (\alpha', \alpha'')$. Deze rij is de gewenste convergente deelrij. $\square$

1.3 De maximum-minimum stelling

In het vervolg veronderstellen we dat (V,d) een metrische ruimte is. Het begrip convergentie van een rij kan goed gebruikt worden om verdichtingspunten van een deelverzameling van V te karakteriseren.

Lemma 1.31 *Zij D een deelverzameling van de metrische ruimte V, en zij $a \in V$. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent.*

(a) *a is een verdichtingspunt van D.*

(b) *Er bestaat een rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D zo dat $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.*

Bewijs: '(a) $\Rightarrow$ (b)': Veronderstel dat (a) geldt. Volgens de definitie van verdichtingspunt is de doorsnede $B(a;\delta)\cap D$ niet-leeg voor elke $\delta > 0$. In het bijzonder kunnen we voor iedere $n \geq 0$ een $a_n \in B(a; \frac{1}{n+1}) \cap D$ kiezen. De rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ligt in D; is $\varepsilon > 0$ dan bestaat er een $N \in \mathbb{N}$ met $\frac{1}{1+N} < \varepsilon$. Voor iedere $n \geq N$ geldt dan $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$, dus $a_n \in B(a;\varepsilon)$. Hiermee is aangetoond dat $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

'(b) $\Rightarrow$ (a)': Veronderstel dat (b) geldt. Zij $\delta > 0$. Dan is er een $N \in \mathbb{N}$ zo dat $a_n \in B(a;\delta)$ voor elke $n \geq N$. In het bijzonder bevat de verzameling $B(a;\delta)\cap D$ het element a_N en is dus niet leeg. Met de definitie van verdichtingspunt volgt hieruit dat a een verdichtingspunt van D is. □

Een deelverzameling D van V is per definitie gesloten als elk verdichtingspunt van D tot D behoort. Uit het bovenstaande lemma kan men daarom de volgende karakterisering van geslotenheid van D afleiden.

Gevolg 1.32 *Laat D een deelverzameling van de metrische ruimte V zijn. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent.*

(a) *D is gesloten.*

(b) *Voor iedere rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D die convergent is in V geldt $\lim_{n\to\infty} a_n \in D$.*

Bewijs: '(a) $\Rightarrow$ (b)': Stel (a). Laat $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij in D zijn die convergent is in V met limiet $a \in V$. Dan is a een verdichtingspunt van D wegens Lemma 1.31. De verzameling D is gesloten, dus $a \in D$. Hiermee is (b) aangetoond.

'(b) $\Rightarrow$ (a)': Stel (b). Laat $a \in V$ een verdichtingspunt van D zijn. Wegens Lemma 1.31 bestaat er een rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D met $a_n \to a$ voor $n \to \infty$. Wegens (b) volgt dat $a \in D$. Ieder verdichtingspunt van D behoort dus tot D; daarom is D gesloten. □

Combineren we de hierboven gegeven karakteriseringen met de stelling van Bolzano-Weierstrass, dan vinden we de volgende karakterisering van gesloten en begrensde deelverzamelingen in $\mathbb{R}^p$.

Stelling 1.33 *Zij $D \subset \mathbb{R}^p$. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent.*

(a) *De verzameling D is gesloten en begrensd.*

(b) *Iedere rij in D heeft een deelrij die convergent is met een in D gelegen limiet.*

Bewijs: '(a) $\Rightarrow$ (b)' Stel (a). Zij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij in D. Dan volgt met de stelling van Bolzano-Weierstrass dat er een deelrij $(a_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ bestaat die convergent is met limiet $a \in \mathbb{R}^p$. De verzameling D is gesloten dus voldoet aan de karakterisering (b) van Gevolg 1.32. Hieruit volgt dat $a \in D$.

'(b) $\Rightarrow$ (a)' Stel (b). We tonen eerst aan dat D gesloten is. Zij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij in D die convergent is met limiet $a \in \mathbb{R}^p$. Iedere deelrij van $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is convergent met dezelfde limiet a (Lemma 1.28). Er is een deelrij die convergent is met een in D gelegen limiet; vanwege de uniciteit van de limiet (Opmerking 1.8 (b)) volgt nu dat $a \in D$. De verzameling D voldoet hiermee aan conditie (b) van Gevolg 1.32 en is derhalve gesloten.

Tenslotte tonen we aan dat D begrensd is. Hiertoe veronderstellen we dat D niet begrensd is, en leiden als volgt een tegenstrijdigheid af. Uit de veronderstelde onbegrensdheid volgt dat $D \not\subset B(0; n)$ voor iedere $n \in \mathbb{N}$. Voor iedere $n \in \mathbb{N}$ is dus een $a_n \in D$ te kiezen met $\|a_n\| \geq n$. Zij $(a_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ een (willekeurige) deelrij van de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dan geldt $a_{n_j} \geq n_j \geq j$. Hieruit volgt dat deze deelrij niet-begrensd en dus niet convergent is (Lemma 1.29). Dit is strijdig met (b). We concluderen dat D begrensd is. $\square$

De bovenstaande eigenschap (b) speelt een belangrijke rol in tal van situaties in de analyse. We geven daarom de volgende definitie.

Definitie 1.34 Zij V een metrische ruimte. Een deelverzameling $D \subset V$ heet rij-compact als iedere rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D een deelrij heeft die convergent is met een in D gelegen limiet.

Opmerking 1.35 Na deze definitie kan conditie (b) uit Stelling 1.33 afgekort worden tot

(b') *De verzameling D is rij-compact.*

In de onderstaande stelling leggen we vast dat rij-compactheid een eigenschap van verzamelingen is die invariant is onder continue afbeeldingen. Een dergelijke eigenschap noemen we wel een topologische invariant.

Stelling 1.36 *Laten V en W metrische ruimten zijn en $D \subset V$. Als $f : D \to W$ continu is en D rij-compact, dan is ook $f(D)$ rij-compact.*

Bewijs: Laat $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij in $f(D)$ zijn. Dan kunnen we voor iedere $n \in \mathbb{N}$ een $a_n \in D$ vinden met $f(a_n) = b_n$. Aangezien D rij-compact is, heeft de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een deelrij $(a_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ die convergent is met limiet $a \in D$. De afbeelding f is continu in a, dus $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Door toepassing van de substitutiestelling (Stelling 1.15) concluderen we dat $b_{n_j} = f(a_{n_j}) \to f(a)$ voor $j \to \infty$. Er volgt dat de deelrij $(b_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ van de oorspronkelijke rij (b_n) convergeert met limiet $f(a) \in f(D)$. Hiermee is aangetoond dat $f(D)$ rij-compact is. $\square$

Gevolg 1.37 *Zij D een gesloten en begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}^p$ en $f : D \to \mathbb{R}^q$ een continue afbeelding. Dan is $f(D)$ gesloten en begrensd.*

Bewijs: Wegens Stelling 1.33 is de verzameling D rij-compact (zie Opmerking 1.35). Wegens Stelling 1.36 is dus ook de beeldverzameling $f(D)$ rij-compact. Nogmaals Stelling 1.33 toepassend concluderen we tenslotte dat $f(D)$ gesloten en begrensd is in $\mathbb{R}^q$. $\square$

Gevolg 1.38 (Maximum-minimum stelling) *Zij D een gesloten en begrensd deel van $\mathbb{R}^p$ met $D \neq \emptyset$. Zij $f : D \to \mathbb{R}$ een continue functie. Dan neemt f op D een maximum en een minimum aan, d.w.z. er zijn $a, b \in D$ zo dat*

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b) \qquad \text{voor alle} \quad x \in D.$$

Bewijs: De verzameling $E = f(D)$ is een gesloten en begrensde niet lege deelverzameling van $\mathbb{R}$. Derhalve heeft E een supremum $s := \sup E$ en een infimum $r := \inf E$. Uit het onderstaande lemma volgt dat r een verdichtingspunt van E is. Uit de geslotenheid van E volgt dat $r \in E = f(D)$. Er is derhalve een $a \in D$ zo dat $f(a) = r$. Maar r is een ondergrens van $f(D)$, dus $f(a) \leq f(x)$ voor elke $x \in D$. Op soortgelijke wijze ziet men in dat $s \in E$, dus er bestaat een $b \in D$ zo dat $f(b) = s$. Voor alle $x \in D$ geldt derhalve $f(x) \leq f(b)$. $\square$

Lemma 1.39 *Laat E een niet lege deelverzameling van $\mathbb{R}$ zijn.*
(a) *Is E naar boven begrensd, dan is* $\sup E$ *een verdichtingspunt van E.*
(b) *Is E naar onderen begrensd, dan is* $\inf E$ *een verdichtingspunt van E.*

Bewijs: Geef zelf een bewijs. $\square$

2 Niveauverzamelingen en extrema

Als toepassing van de maximum-minimum stelling behandelen we § 2.2 uit het dictaat Analyse 2. Ter introductie behandelen we eerst enige algemeenheden die in die tekst gebruikt zullen worden.

Als V en W verzamelingen zijn, dan gebruiken we wel de notatie

$$f : V \rightarrowtail W$$

voor een afbeelding naar W die partieel gedefinieerd is op V. Met dit laatste bedoelen we dat er een deelverzameling $\mathrm{Dom}(f) \subset V$ bestaat zo dat f gedefinieerd is op $\mathrm{Dom}(f)$. Deze verzameling heet het domein van f. De bovenstaande notatie kan gezien worden als samentrekking van $f : V \supset \mathrm{Dom}(f) \to W$.

Veronderstel nu dat V, W metrische ruimten zijn en $f : V \rightarrowtail W$ een afbeelding. We brengen in herinnering dat f continu heet in het punt $a \in V$ indien $a \in D := \mathrm{Dom}(f)$ en $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. De laatste uitspraak betekent dat er voor elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zo dat

$$f(B(a;\delta) \cap D) \subset B(f(a);\varepsilon). \tag{6}$$

De afbeelding f heet kortweg continu als hij continu is in elk punt $a \in D$.

Lemma 2.1 *Laten V, W metrische ruimten zijn en $f : V \rightarrowtail W$ een afbeelding. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent.*

(a) *De afbeelding f is continu als afbeelding $V \rightarrowtail W$.*

(b) *De afbeelding f is continu als afbeelding $\mathrm{Dom}(f) \to W$ waarbij $\mathrm{Dom}(f)$ voorzien is van de geïnduceerde metriek.*

Bewijs: De metriek op V noteren we met d_V. Het domein D van f is, voorzien van de door d_V geïnduceerde metriek (zie Voorbeeld 1.3), zelf weer een metrische ruimte. Als $a \in D$, dan schrijven we $B_D(a;\delta)$ voor de open bol met middelpunt a en straal δ in de metrische ruimte D. Dan is

$$B_D(a;\delta) = \{x \in D \mid d_V(x,a) < \delta\} = B(a;\delta) \cap D.$$

De bovenstaande conditie (6) kan dus herschreven worden als $f(B_D(a;\delta)) \subset B(f(a);\varepsilon)$. Hieraan zien we dat $f : V \rightarrowtail W$ continu is in a dan en slechts dan als $a \in D$ en $f : D \to W$ is continu in a. Hieruit blijkt de gelijkwaardigheid van de condities (a) en (b). □

Opmerking 2.2 Wegens het bovenstaande kunnen we de definitie van continuïteit van een partieel gedefinieerde afbeelding $f : V \rightarrowtail W$ ook als volgt in twee stappen geven. Eerst definiëren we continuïteit van een (overal op V gedefinieerde) afbeelding $f : V \to W$. Daarna definiëren we dat een *partieel gedefinieerde* afbeelding $f : V \rightarrowtail W$ continu is als f continu is als (overal op $\mathrm{Dom}(f)$ gedefinieerde) afbeelding $\mathrm{Dom}(f) \to W$, waarbij $\mathrm{Dom}(f)$ voorzien is van de geïnduceerde metriek. In tal van leerboeken wordt continuïteit op deze manier gedefinieerd.

Open en gesloten verzamelingen kunnen gebruikt worden om continuïteit van een afbeelding te karakteriseren. Ter voorbereiding herinneren we u aan de volgende stelling uit Analyse

1. Is A een deelverzameling van een verzameling V dan is zijn complement (in V) gedefinieerd door:

$$V \setminus A = \{x \in V \mid x \notin A\}.$$

We merken op dat het complement van $V \setminus A$ gelijk is aan A.

Lemma 2.3 *Zij V een metrische ruimte, $A \subset V$ een deelverzameling en B zijn complement. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent.*

(a) *A is open.*

(b) *B is gesloten.*

We brengen nu de definitie van volledig origineel in herinnering. Laten V, W verzamelingen zijn en $f : V \to W$ een afbeelding. Is $B \subset W$ een deelverzameling, dan is het volledig origineel van B onder f gedefinieerd door

$$f^{-1}(B) := \{x \in V \mid f(x) \in B\}.$$

Lemma 2.4 *Laten V, W verzamelingen zijn, $B \subset W$ en $f : V \to W$ een afbeelding. Dan is*

$$f^{-1}(W \setminus B) = V \setminus f^{-1}(B).$$

Bewijs: Geef het bewijs zelf. Het is daarbij handig eerst de inclusie '$\subset$' en vervolgens de inclusie '$\supset$' aan te tonen. $\square$

Lemma 2.5 *Laten V, W metrische ruimten zijn en $f : V \to W$ een afbeelding. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent.*

(a) *De afbeelding f is continu.*

(b) *Voor iedere open deelverzameling $O \subset W$ geldt dat $f^{-1}(O)$ open is in V.*

(c) *Voor iedere gesloten deelverzameling $S \subset W$ geldt dat $f^{-1}(S)$ gesloten is in V.*

Bewijs: '(a) $\Rightarrow$ (b)': Veronderstel dat f continu is en laat $O \subset W$ een open deel zijn. Volgens de definitie van open verzameling moeten we aantonen dat ieder punt van $f^{-1}(O)$ een inwendig punt is. Dit doen we als volgt. Zij $a \in f^{-1}(O)$. Dan is $f(a) \in O$; dit is een inwendig punt van O aangezien O open is. Er bestaat dus een $\varepsilon > 0$ zo dat $B(f(a); \varepsilon) \subset O$. Wegens de continuïteit van f bestaat er een $\delta > 0$ zo dat $f(B(a; \delta)) \subset B(f(a); \varepsilon) \subset O$, dus $B(a; \delta) \subset f^{-1}(O)$. Het punt a is derhalve een inwendig punt van $f^{-1}(O)$.

'(b) $\Rightarrow$ (a)': Veronderstel dat (b) geldt en zij $a \in V$. Het is dan voldoende aan te tonen dat f continu is in a, d.w.z. dat

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a). \tag{7}$$

Zij $\varepsilon > 0$. Dan is $B(f(a); \varepsilon)$ een open deel van W, dus wegens (b) is het volledig origineel $U := f^{-1}(B(f(a); \varepsilon))$ een open deel van V. Nu is $a \in U$, dus a is een inwendig punt van U; er bestaat derhalve een $\delta > 0$ zo dat $B(a; \delta) \subset U$. Hieruit volgt dat $f(B(a; \delta)) \subset B(f(a); \varepsilon)$. We concluderen dat (7) geldt.

We voltooien het bewijs door aan te tonen dat (b) gelijkwaardig is met (c).

'(b) $\Rightarrow$ (c)': Stel (b). Zij S een gesloten deel van W. Dan is $W \setminus S$ open in W (Lemma 2.3), dus $V \setminus f^{-1}(S)$ is open in V; wegens Lemma 2.4 is $V \setminus f^{-1}(S) = f^{-1}(V \setminus S)$, dus $f^{-1}(S)$ is gesloten in V. We concluderen dat (c) geldt.

'(c) $\Rightarrow$ (b)': Stel (c). Zij $O \subset W$ een open deel. Dan is $W \setminus O$ gesloten in W, dus $V \setminus f^{-1}(O) = f^{-1}(W \setminus O)$ is gesloten in V, dus $f^{-1}(O)$ is open in V. Derhalve geldt (b). $\square$

Voorbeelden 2.6 (a) We beschouwen de eenbladige hyperboloïde H in $\mathbb{R}^3$ die gegeven wordt door de vergelijking

$$H: \quad x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

Met behulp van het bovenstaande zien we gemakkelijk in dat deze hyperboloïde een gesloten deelverzameling is van $\mathbb{R}^3$. Immers, de functie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, gedefinieerd door $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, is continu. De verzameling $\{1\}$ is gesloten in $\mathbb{R}$, dus $H = f^{-1}(\{1\})$ is gesloten in $\mathbb{R}^3$.

(b) We beschouwen het deel G van $\mathbb{R}^3$ bestaande uit de punten (x, y, z) met $x^2 + y^2 < 1$, $z > 0$ en $x + y + z < 3$ (een scheef afgesneden cilinder). Door het bovenstaande te gebruiken zien we gemakkelijk in dat de verzameling G open is. Immers de functies $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f_1(x, y, z) = x^2 + y^2$, $f_2(x, y, z) = z$ en $f_3(x, y, z) = x + y + z$ zijn continu. Nu is $G = U_1 \cap U_2 \cap U_3$, waarbij

$$U_1 = f_1^{-1}(]-\infty, 1[), \quad U_2 = f_2^{-1}(]\,0, \infty\,[), \quad U_3 = f_3^{-1}(]-\infty, 3\,[).$$

De verzamelingen U_i $(1 \leq i \leq 3)$ zijn volledige originelen van open deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ onder continue afbeeldingen, dus open in $\mathbb{R}^3$. Hun (eindige) doorsnede G is derhalve ook open.

Is $f : \mathbb{R}^p \rightarrowtail \mathbb{R}$ een functie en $c \in \mathbb{R}$, dan definiëren we de niveauverzameling $N_c = N_{f,c}$ van f bij niveau c door:

$$N_c = f^{-1}(\{c\}) = \{x \in \mathrm{Dom}(f) \mid f(x) = c\}.$$

Als f continu is, dan is f continu als afbeelding $\mathrm{Dom}(f) \to \mathbb{R}$, waarbij $\mathrm{Dom}(f)$ voorzien is van de geïnduceerde metriek (Lemma 2.1). Wegens Lemma 2.5 is iedere niveauverzameling N_c gesloten in $\mathrm{Dom}(f)$. Waarschuwing: Als $\mathrm{Dom}(f) \subsetneq \mathbb{R}^p$, dan betekent dit laatste niet noodzakelijkerwijs dat N_c ook gesloten is in $\mathbb{R}^p$, zie het onderstaande voorbeeld.

Voorbeeld 2.7 We beschouwen de open verzameling $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 < 1\}$ in $\mathbb{R}^2$, zie Figuur 1. De verzameling $S = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1\}$ niet gesloten in $\mathbb{R}^2$. Immers, $(1, 0)$ en $(-1, 0)$ zijn verdichtingspunten van S, maar behoren niet tot S. Anderzijds is S wel gesloten in U. Immers de functie $f : U \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto y$ is continu en er geldt: $S = N_{f,0}$. Ten slotte merken we op dat de verdichtingspunten $(1, 0)$ en $(-1, 0)$ niet in U gelegen zijn. Uit de geslotenheid van S in U volgt dat alle in U gelegen verdichtingspunten van S wel in S gelegen zijn.

Figuur 1: S is gesloten in U

In het algemeen zullen we de volgende terminologie hanteren. Is D een deelverzameling van een metrische ruimte V dan noemen we een deelverzameling $A \subset D$ open in D als A open is ten aanzien van de op D geïnduceerde metriek. We noemen A gesloten in D als A gesloten is in D ten aanzien van de geïnduceerde metriek. Ter volledigheid geven we tenslotte de volgende karakteriseringen van deze begrippen.

Lemma 2.8 *Zij D een deel van een metrische ruimte V. Zij $A \subset D$.*

(a) *De verzameling A is gesloten in D dan en slechts dan als er een gesloten deel $S \subset V$ bestaat zo dat $A = D \cap S$.*

(b) *De verzameling A is open in D dan en slechts dan als er een open deel $O \subset V$ bestaat zo dat $A = D \cap O$.*

Bewijs: (a): Veronderstel dat $A = D \cap S$, met S gesloten in V. Zij $a \in D$ een verdichtingspunt van A ten aanzien van de geïnduceerde metriek. Dan geldt voor iedere $\varepsilon > 0$ dat $B_D(a;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Nu is $B_D(a;\varepsilon) \cap A \subset B(a;\varepsilon) \cap S$, dus ook de laatste doorsnede is niet-leeg voor elke $\varepsilon > 0$. Het punt a is derhalve een verdichtingspunt van S en we concluderen dat $a \in S$, dus $a \in D \cap S = A$. Hieruit volgt dat A gesloten is.

Stel omgekeerd dat A gesloten is in D. Zij S de afsluiting van A in V. Dit is een gesloten verzameling. Het is dus voldoende aan te tonen dat $A = D \cap S$. Het is duidelijk dat $A \subset D \cap S$. Om de omgekeerde inclusie aan te tonen veronderstellen we dat een punt $a \in D \cap S$ gegeven is. Het punt a is een verdichtingspunt van A in V dat in D ligt. Voor iedere $\varepsilon > 0$ geldt $B(a;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$; uit $A \subset D$ volgt $B(a;\varepsilon) \cap A = B_D(a;\varepsilon) \cap A$, dus ook de laatste doorsnede is niet leeg. Hieruit volgt dat a een verdichtingspunt van A is in de metrische ruimte D. Uit de geslotenheid van A in D volgt nu dat $a \in A$. Hiermee is ook de omgekeerde inclusie aangetoond, dus inderdaad geldt $A = D \cap S$.

(b): Stel dat A open is in D. Dan is $D \setminus A$ gesloten in D, dus er is wegens (a) een gesloten $S \subset V$ zo dat $D \setminus A = D \cap S$. Hieruit volgt dat $A = D \setminus (D \setminus A) = D \setminus (D \cap S) = D \setminus S = D \cap (V \setminus S)$. Derhalve is $A = D \cap O$, met $O = V \setminus S$ open in V.

Stel anderzijds dat O open is in V. Dan is $V \setminus O$ gesloten in V, dus wegens (a) is $D \cap (V \setminus O)$ gesloten in D. Deze verzameling is echter gelijk aan $D \setminus O = D \setminus (D \cap O)$, dus $D \cap O$ is open in D. $\square$

Verwijzing 2.9 Bestudeer nu Paragraaf 2.2 uit het Analyse 2 dictaat.

3 Uniforme continuïteit

In deze paragraaf zijn (V, d_V) en (W, d_W) steeds metrische ruimten. We brengen in herinnering dat een afbeelding $f : V \to W$ per definitie continu is als hij continu is in elk punt $a \in V$, met andere woorden, als voor elke $a \in V$ geldt dat $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Combineren we dit met de definitie van limiet, dan zien we dat de volgende uitspraken equivalent zijn:

(a) De afbeelding $f : V \to W$ is continu.

(b) Voor iedere $a \in V$ en iedere $\varepsilon > 0$ bestaat er een $\delta = \delta_{a,\varepsilon} > 0$ zo dat voor alle $x \in V$ geldt:
$$d_V(x, a) < \delta \Rightarrow d_W(f(x), f(a)) < \varepsilon. \tag{8}$$

In de bovenstaande uitspraak (b) hebben we $\delta = \delta_{a,\varepsilon}$ geschreven om tot uitdrukking te brengen dat de δ waarvan sprake is in het algemeen afhankelijk is van $\varepsilon > 0$ en van $a \in V$. We verduidelijken dit aan de hand van een voorbeeld.

Voorbeeld 3.1 Laten V en W beide gelijk zijn aan het interval $]\,0, \infty\,[$, voorzien van de geïnduceerde metriek. Laat $f :\ V \to W$ gedefinieerd zijn door $f(x) = 1/x$. Zij $a \in V$ en zij $\varepsilon > 0$ zo dat $\varepsilon < \frac{1}{a}$. Dan is het interval $]\, f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon\,[$ bevat in W. We merken nu op dat f een strikt monotoon dalende bijectieve functie $V \to W$ is. Hieruit volgt dat
$$]\, f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon\,[= f(]\, c^-, c^+\,[),$$
waarbij $c^- = f^{-1}(f(a) + \varepsilon) = (1/a + \varepsilon)^{-1}$ en $c^+ = f^{-1}(f(a) - \varepsilon) = (1/a - \varepsilon)^{-1}$. Met een eenvoudige berekening zien we dat $c^- = a - \delta^-_{a,\varepsilon}$ en $c^+ = a + \delta^+_{a,\varepsilon}$, met
$$\delta^-_{a,\varepsilon} := \frac{a^2\varepsilon}{1 + a\varepsilon} \qquad \text{en} \qquad \delta^+_{a,\varepsilon} := \frac{a^2\varepsilon}{1 - a\varepsilon}.$$
Uit deze formules blijkt dat $\delta^-_{a,\varepsilon} \leq \delta^+_{a,\varepsilon}$. Uit het bovenstaande volgt dat
$$f(]\, a - \delta^-_{a,\varepsilon}, a + \delta^+_{a,\varepsilon}\,[) =]\, f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon\,[. \tag{9}$$
Veronderstel nu dat $\delta = \delta_{a,\varepsilon} > 0$ een positief getal is zo dat (8) geldt voor alle $x \in]\,0, \infty\,[$. Dan geldt $f(\,]\,a - \delta, a + \delta\,[\cap V) \subset]\, f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon\,[$. Door dit te combineren met (9) en de bijectiviteit van f vinden we dat $]\,a - \delta, a + \delta\,[\subset]\,a - \delta^-_{a,\varepsilon}, a + \delta^+_{a,\varepsilon}\,[$. Hieruit volgt dat $\delta_{a,\varepsilon} = \delta \leq \min(\delta^-_{a,\varepsilon}, \delta^+_{a,\varepsilon}) = \delta^-_{a,\varepsilon}$. Uit
$$\lim_{a \downarrow 0} \delta^-_{a,\varepsilon} = 0$$
volgt nu dat $\delta_{a,\varepsilon}$ bij gegeven $\varepsilon > 0$ niet hetzelfde te kiezen is voor alle $a \in]\,0, \infty\,[$. Maak zelf een schets van de grafiek van f waaruit de betekenis van de hierboven geïntroduceerde constanten $a, \varepsilon, \delta^{\pm}_{a,\varepsilon}$ blijkt.

We zullen de afbeelding $f : V \to W$ uniform continu noemen indien bij iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta = \delta_\varepsilon$ te kiezen is die onafhankelijk is van $a \in V$ (ofwel uniform in $a \in V$) en zo dat (8) geldt voor alle $a \in V$ en $x \in V$. Met andere woorden, indien
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, a \in V) \qquad d_V(x, a) < \delta \;\Rightarrow\; d_W(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$
In de bovenstaande formule is er geen verschil in de rol die de variabelen a en x spelen. We brengen dit tot uitdrukking door in de volgende definitie a overal te vervangen door y. (Uiteraard verandert de definitie daardoor niet.)

Definitie 3.2 Een afbeelding $f : V \to W$ heet uniform continu indien voor elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zo dat voor alle $x, y \in V$ geldt:

$$d_V(x,y) < \delta \;\Rightarrow\; d_W(f(x), f(y)) < \varepsilon. \tag{10}$$

Opmerking 3.3 Zij $f : V \rightarrowtail W$ een afbeelding. We zullen f uniform continu noemen op een deelverzameling D van zijn domein $\mathrm{Dom}(f)$ als de beperking $f|_D$ van f tot D een uniform continue afbeelding is van D (voorzien van de geïnduceerde metriek) naar W. Dit betekent dat er voor elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zo dat de implicatie (10) geldt voor alle $x, y \in D$.

Voorbeelden 3.4

(a) De functie f uit Voorbeeld 3.1 is continu op $]\,0, \infty\,[$, maar niet uniform continu.

(b) We beschouwen de functie $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $g(x) = \|x\|$. Deze functie is uniform continu op $\mathbb{R}^p$. Immers zij $\varepsilon > 0$. Kies $\delta = \varepsilon$, dan geldt voor alle $x, y \in \mathbb{R}^p$ met $\|x - y\| < \delta$ dat

$$|g(x) - g(y)| = |\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x - y\| < \delta = \varepsilon.$$

(c) We beschouwen de continue functie $h : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $h(x) = \|x\|^2$. We zullen aantonen dat deze functie niet uniform continu is op $\mathbb{R}^p$. Zij $\varepsilon = 1$ en zij $\delta > 0$ (willekeurig). Dan is het voldoende aan te tonen dat er $x, y \in \mathbb{R}^p$ te vinden zijn zo dat

$$\|x - y\| < \delta \qquad \text{en} \qquad |h(x) - h(y)| \geq \varepsilon = 1. \tag{11}$$

Dit doen we als volgt. Zij e_1 de eerste standaardbasisvector in $\mathbb{R}^p$, en schrijf $x_t = te_1$ en $y_t = (t + \delta/2)e_1$, voor $t > 0$. Dan is $\|x_t - y_t\| = \delta/2 < \delta$, voor elke $t > 0$. Anderzijds is

$$\begin{aligned} |h(x_t) - h(y_t)| &= |\|x_t\|^2 - \|y_t\|^2| \\ &= |t^2 - (t + \delta/2)^2| \\ &= t\delta + \delta^2/4 \geq t\delta. \end{aligned}$$

Kies een $t > 1/\delta$. Dan geldt (11) voor $x = x_t,\ y = y_t$.

Uit de bovenstaande voorbeelden (a) en (c) blijkt dat een continue functie niet altijd uniform continu is. De onderstaande stelling drukt uit dat dit wel altijd het geval is als het domein van f rij-compact is.

Stelling 3.5 *Laten V, W metrische ruimten zijn en $D \subset V$ een rij-compacte deelverzameling. Iedere continue afbeelding $f : D \to W$ is ook uniform continu op D.*

Bewijs: Veronderstel dat D rij-compact is, en $f : D \to W$ continu. Veronderstel dat f niet uniform continu is. We zullen aantonen dat dit tot een tegenspraak leidt. Uit het niet uniform continu zijn van f volgt dat er een $\varepsilon_0 > 0$ bestaat met de volgende eigenschap: voor elke $\delta > 0$ zijn er $x, y \in D$ te vinden met $d_V(x, y) < \delta$ en $d_W(f(x), f(y)) \geq \varepsilon_0$. Voor iedere gehele $n \geq 1$ kunnen we dus $x_n, y_n \in D$ vinden met $d_V(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ en

$$d_W(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0. \tag{12}$$

Uit de definitie van rij-compactheid volgt dat de in D gelegen rij $(x_n)_{n\geq 1}$ een deelrij $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ heeft die convergent is met een in D gelegen limiet. Noem de limiet van deze deelrij x.

Uit de definitie van rij-compactheid volgt nu ook dat de in D gelegen rij $(y_{n_k})_{k\geq 1}$ een deelrij $(y_{n_{k_j}})_{j\geq 1}$ heeft die convergent is met een in D gelegen limiet y. Aangezien de rij $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ convergent is met limiet x, is zijn deelrij $(x_{n_{k_j}})_{j\geq 1}$ convergent met dezelfde limiet x (zie Lemma 1.28).

Schrijf $\xi_j = x_{n_{k_j}}$ en $\eta_j = y_{n_{k_j}}$. Dan is $d_V(\xi_j, \eta_j) < 1/n_{k_j} \leq 1/j$, dus $\lim_{j\to\infty} d_V(\xi_j, \eta_j) = 0$ (gebruik de insluitstelling). Door toepassing van het onderstaande lemma volgt nu dat $x = y$.

De in D gelegen rijen $(\xi_j)_{j\geq 1}$ en $(\eta_j)_{j\geq 1}$ hebben derhalve dezelfde limiet $x \in D$. Met de continuïteit van f in x concluderen we nu dat

$$\lim_{j\to\infty} f(\xi_j) = f(x) = \lim_{j\to\infty} f(\eta_j).$$

Met behulp van het onderstaande lemma volgt hieruit dat $\lim_{j\to\infty} d_W(f(\xi_j), f(\eta_j)) = 0$. Dit is in tegenspraak met de schatting (12). □

Lemma 3.6 *Veronderstel dat $(\xi_j)_{j\geq 1}$ en $(\eta_j)_{j\geq 1}$ twee convergente rijen in de metrische ruimte V zijn. Dan geldt:*

$$\lim_{j\to\infty} \xi_j = \lim_{j\to\infty} \eta_j \iff \lim_{j\to\infty} d_V(\xi_j, \eta_j) = 0.$$

Bewijs: Noem de limieten van de convergente rijen $(\xi_j)_{j\geq 1}$ en $(\eta_j)_{j\geq 1}$ respectievelijk ξ en η.

'$\Rightarrow$' Veronderstel eerst dat $\xi = \eta$. Zij $\varepsilon > 0$. Dan volgt uit de definitie van limiet dat er een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zo dat voor alle $j \geq N$ geldt $d(\xi_j, \xi) < \frac{1}{2}\varepsilon$ en $d(\eta_j, \xi) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Voor iedere $j \geq N$ geldt dus ook

$$d_V(\xi_j, \eta_j) \leq d_V(\xi_j, \xi) + d_V(\xi, \eta_j) < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Hieruit volgt dat $\lim_{j\to\infty} d_V(\xi_j, \eta_j) = 0$.

'$\Leftarrow$' Veronderstel nu omgekeerd dat $\lim_{j\to\infty} d_V(\xi_j, \eta_j) = 0$. Zij $\varepsilon > 0$. Dan volgt uit de definitie van limiet dat er een geheel getal $N \geq 1$ bestaat zo dat voor alle $j \geq N$ geldt: $d(\xi_j, \xi) < \varepsilon/3$, $d(\eta_j, \xi) < \varepsilon/3$, en $d_V(\xi_j, \eta_j) < \varepsilon/3$. Door herhaald toepassen van de driehoeks-ongelijkheid zien we (door $j = N$ te nemen) dat in het bijzonder de volgende schatting geldt:

$$d_V(\xi, \eta) \leq d_V(\xi, \xi_N) + d_V(\xi_N, \eta_N) + d_V(\eta_N, \eta) < \varepsilon.$$

Voor alle $\varepsilon > 0$ geldt derhalve dat $d_V(\xi, \eta) < \varepsilon$. Hieruit volgt dat $d_V(\xi, \eta) = 0$, dus $\xi = \eta$. □

Gevolg 3.7 *Laat D een gesloten en begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}^p$ zijn. Dan is iedere continue functie $f : D \to \mathbb{R}^q$ uniform continu.*

Bewijs: Wegens Stelling 1.33 is D een rij-compacte deelverzameling van de metrische ruimte $\mathbb{R}^p$. Pas nu Stelling 3.5 toe. □

Opmerking 3.8 We brengen nog eens onder de aandacht dat de bovenstaande stelling een belangrijke rol gespeeld heeft in Analyse 1, in het bewijs dat iedere continue functie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integreerbaar over het interval $I := [a, b]$ is. De redenering was daarbij als volgt. Zij $\varepsilon > 0$. De verzameling I is gesloten en begrensd. Wegens de bovenstaande stelling is f uniform continu op I. Er bestaat dus een $\delta > 0$ zo dat voor alle $x, y \in I$ met $|x - y| < \delta$ geldt: $|f(x) - f(y)| < \varepsilon' := \varepsilon/2(b - a)$.

Kies een verdeling V van het interval $I = [a, b]$ in deelintervallen I_k, $1 \leq k \leq n$, die elk een lengte $|I_k|$ hebben met $|I_k| < \delta$. Dan geldt voor elke $1 \leq k \leq n$ en alle $x, y \in I_k$ dat $|x - y| < \delta$ dus $|f(x) - f(y)| < \varepsilon'$. Hieruit volgt dat

$$\sup_{I_k} f \leq \inf_{I_k} f + \varepsilon',$$

dus ook dat

$$\sup_{I_k} f \; |I_k| \leq \inf_{I_k} f \; |I_k| + \varepsilon' \; |I_k|.$$

Sommeren over $k = 1, \ldots, n$ levert dan de schatting

$$\bar{S}(f, V) \leq \underline{S}(f, V) + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon' \; |I_k| = \underline{S}(f, V) + \varepsilon'(b - a) < \underline{S}(f, V) + \varepsilon.$$

Voor iedere $\varepsilon > 0$ bestaat dus een verdeling V van $[a, b]$ zodat $\overline{S}(f, V) - \underline{S}(f, V) < \varepsilon$. Hieruit volgt de Riemann-integreerbaarheid van de functie f over $[a, b]$.

Verwijzing 3.9 In § 6.2 van het Analyse 2 dictaat wordt een uitgebreidere samenvatting gegeven van de in Analyse 1 behandelde Riemann-integratie.

Opmerking 3.10 Algemener is een continue functie op een blok in $\mathbb{R}^p$ Riemann-integreerbaar op grond van een soortgelijke redenering als in Opmerking 3.8. Zie het dictaat Analyse 2, Stelling 7.2.9.

4 Integralen met een parameter

Verwijzing 4.1 Bestudeer § 5.1 uit het dictaat Analyse 2 in zijn geheel.

Met behulp van de theorie van metrische ruimten kunnen we de structuur van het in Analyse 2, § 5.1 gegeven bewijs van Stelling 5.1.3 overzichtelijker maken. We herhalen eerst de stelling.

Stelling 4.2 *Zij $V \subset \mathbb{R}^n$ een deelverzameling en $J = [c, d] \subset \mathbb{R}$ een gesloten en begrensd interval. Is $f : V \times J \to \mathbb{R}$ een continue functie, dan is de functie $F : V \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door*

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) \, dy \tag{13}$$

continu op V.

We brengen in herinnering (Voorbeeld 1.2 (c)) dat de ruimte $B(J)$ van begrensde functies $J \to \mathbb{R}$, voorzien van de supremum norm $\|\cdot\|$, een genormeerde lineaire ruimte is. De bijbehorende (uniforme) afstand noteren we met d, dus $d(f,g) := \|f-g\|$.

De ruimte $C(J)$ van continue functies $J \to \mathbb{R}$ is een lineaire deelruimte van $B(J)$. Voorzien van de beperking van de supremum norm is ook $C(J)$ een genormeerde lineaire ruimte. De bijbehorende metriek is de door d geïnduceerde metriek, die we ook met d noteren.

We merken op dat wegens de maximum-minimum stelling (Gevolg 1.38) geldt dat $\|\varphi\| = \max_J |\varphi|$ voor elke $\varphi \in C(J)$. Op $C(J)$ wordt de uniforme afstand dus gegeven door

$$d(f_1, f_2) = \max_J |f_1 - f_2|. \tag{14}$$

Lemma 5.1.5 uit het Analyse 2 dictaat laat zich nu als volgt herformuleren. Laat $V \subset \mathbb{R}^n$ een deelverzameling zijn, en $f : V \times J \to \mathbb{R}$ een functie. Voor $x \in V$ definiëren we de functie $f_x : J \to \mathbb{R}$ door $f_x(y) = f(x,y)$, $(y \in J)$. Is de functie f continu, dan ziet men gemakkelijk in dat $f_x \in C(J)$ voor elke $x \in V$. Door $f_* : x \mapsto f_x$ wordt zo een afbeelding $V \to C(J)$ gedefinieerd.

Lemma 4.3 *Laat $f : V \times J \to \mathbb{R}$ een continue functie zijn. Dan is de afbeelding $f_* : x \mapsto f_x$, $V \to C(J)$ continu.*

Bewijs: Zij $a \in V$. Dan is het voldoende aan te tonen dat de afbeelding $f_* : V \to C(J)$ continu is in a. Hiertoe is het voldoende aan te tonen dat $\lim_{x\to a} f_*(x) = f_*(a)$ in de metrische ruimte $(C(J), d)$. Dit laatste is gelijkwaardig met $\lim_{x\to a} d(f_*(x), f_*(a)) = 0$, dus wegens (14) met

$$\lim_{x\to a} \max_J |f_x - f_a| = 0.$$

Dit is precies de bewering van Lemma 5.1.5 in het Analyse 2 dictaat. □

We definiëren de afbeelding $I : C(J) \to \mathbb{R}$ door

$$I(f) = \int_a^b f(t)\, dt \qquad (f \in C(J)). \tag{15}$$

De afbeelding I is lineair. Immers als $f, g \in C(J)$, dan geldt $I(f+g) = I(f) + I(g)$. Als $f \in C(J)$ en $c \in \mathbb{R}$ dan geldt $I(cf) = cI(f)$.

Lemma 4.4 *De afbeelding $I : C(J) \to \mathbb{R}$ gegeven door (15) is uniform continu.*

Bewijs: Voor elke $\varphi \in C(J)$ geldt

$$|I(\varphi)| = |\int_c^d \varphi(y)\, dy| \leq \int_c^d |\varphi(y)|\, dy \leq \int_c^d \|\varphi\|\, dy = \|\varphi\|\,(d-c).$$

Zij $\varepsilon > 0$. Kies $\delta > 0$ met $\delta < \varepsilon/(d-c)$. Dan geldt voor alle $f, g \in C(J)$ met $d(f,g) < \delta$ dat $\|f-g\| = d(f,g) < \delta$, dus:

$$|I(f) - I(g)| = |I(f-g)| \leq \|f-g\|(d-c) < \delta(d-c) < \varepsilon.$$

Hiermee is de uniforme continuïteit bewezen. □

Herformulering van het bewijs van Stelling 4.2 (dictaat Anal. 2, St. 5.1.3)

Laat de functie $F : V \to \mathbb{R}$ gedefinieerd zijn door (13). Voor $x \in V$ geldt dan $F(x) = I(f_x) = I(f_*(x))$. Hieruit volgt dat F gelijk is aan de samenstelling $I \circ f_*$. De afbeeldingen $f_* : V \to C(J)$ en $I : C(J) \to \mathbb{R}$ zijn continue afbeeldingen tussen metrische ruimten. Wegens het onderstaande lemma is de samenstelling F continu. □

Ter volledigheid behandelen we het volgende lemma, dat niet expliciet vermeld staat in de Handleiding Analyse 1.

Lemma 4.5 *Laten U, V en W metrische ruimten zijn en $\varphi : U \to V$, $\psi : V \to W$ afbeeldingen. Als φ en ψ continu zijn, dan is ook hun samenstelling $\psi \circ \varphi$ continu.*

Bewijs: Zij $a \in U$. Dan is het voldoende aan te tonen dat $\psi \circ \varphi$ continu is in a.

Zij $b = \varphi(a)$. Dan is φ continu in a en ψ is continu in b. Derhalve is

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = b \qquad \text{en} \qquad \lim_{y \to b} \psi(y) = \psi(b).$$

Wegens de substitutiestelling voor limieten (Handleiding Analyse 1, Stelling 7.3) geldt nu

$$\lim_{x \to a} \psi(\varphi(x)) = \psi(b) = \psi(\varphi(a)).$$

Dit betekent per definitie dat $\psi \circ \varphi$ continu is in a. □

Verwijzing 4.6 Bestudeer § 5.2 in het Analyse 2 dictaat.

5 Verwisselingsstellingen

Verwijzing 5.1 Bestudeer § 2.5 in het Analyse 2 dictaat. Daarin wordt een verwisselingsstelling voor herhaald partieel differentiëren behandeld.

Verwijzing 5.2 Bestudeer § 6.1 in het Analyse 2 dictaat. Daarin wordt een verwisselingsstelling voor herhaalde integratie behandeld. Het in § 6.1 gegeven bewijs berust op differentiëren onder het integraalteken. We raden de liefhebber aan ook het in § 6.3 gegeven bewijs te bestuderen. Dat bewijs sluit meer aan bij hetgeen in het college Infinitesimaalrekening 2 behandeld is.

6 Toepassing: primitiveren van een vectorveld

In deze paragraaf behandelen we een toepassing van 'differentiatie onder het integraalteken'.

Stelling 6.1 *Zij $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ een C^1-vectorveld met $\nabla \times F = 0$. Dan bestaat er een C^2-functie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ met $\nabla f = F$. Deze functie is uniek als we bovendien eisen dat $f(0) = 0$.*

Voor we met het bewijs beginnen maken we enkele opmerkingen ter motivatie. De coördinaten in $\mathbb{R}^3$ noteren we met $x = (x_1, x_2, x_3)$. De conditie $\nabla \times F = 0$ is dan equivalent met

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \tag{16}$$

voor alle $1 \leq i, j \leq 3$.

Stel dat er een C^2-functie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ bestaat met $\nabla f = F$. Dan is $F_i = \partial f / \partial x_i$, dus

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}.$$

We zien hieraan dat de conditie $\nabla \times F = 0$ noodzakelijk is voor het bestaan van een primitieve f.

In het college Infinitesimaalrekening 2 is aangetoond dat voor iedere C^1-functie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ en iedere C^1-kromme $c : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ geldt:

$$\int_c \nabla f \cdot ds = f(c(1)) - f(c(0)).$$

Passen we dit toe op de speciale kromme $c_x(t) = tx$ met $x \in \mathbb{R}^3$, dan vinden we, door op te merken dat $c_x'(t) = x$,

$$f(x) - f(0) = \int_{c_x} \nabla f \cdot ds = \int_0^1 \nabla f(c_x(t)) \cdot c_x'(t)\, dt = \int_0^1 \nabla f(tx) \cdot x\, dt.$$

Bewijs van Stelling 6.1: Is f een C^2 functie met $\nabla f = F$ en $f(0) = 0$, dan moet volgens de bovenstaande formule gelden dat

$$f(x) = \int_0^1 F(tx) \cdot x\, dt \tag{17}$$

voor elke $x \in \mathbb{R}^3$. Hieruit volgt de uniciteit van f.

We kunnen ook een functie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *definiëren* in termen van het vectorveld F met behulp van de formule (17). In het onderstaande zullen we aantonen dat de zo gedefinieerde functie C^2 is en voldoet aan $\nabla f = F$.

De functie $\mathbb{R}^3 \times [0,1] \to \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto F(tx) \cdot x$ is C^1. Wegens Gevolg 5.2.4 uit het Dictaat Analyse 2 is de functie f derhalve C^1. We zullen eerst de partiële afgeleide naar de eerste variabele bepalen door differentiatie onder het integraalteken. Er geldt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_1} \left(F_1(tx)x_1 + F_2(tx)x_2 + F_3(tx)x_3\right)\, dt \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_1}[F_i(tx)]x_i + F_1(tx) \right)\, dt
\end{aligned}$$

We merken nu op dat met de kettingregel volgt dat

$$\frac{\partial}{\partial x_1}[F_i(tx)] = t\frac{\partial F_i}{\partial x_1}(tx).$$

De laatste uitdrukking is gelijk aan $t\frac{\partial F_1}{\partial x_i}(tx)$ wegens (16). We vinden derhalve dat

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) &= \int_0^1 (t\nabla F_1(tx)\cdot x + F_1(tx))\ dt \\
&= \int_0^1 \left(t\frac{\partial}{\partial t}[F_1(tx)] + F_1(tx)\right)\ dt \\
&= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}[tF_1(tx)]\ dt = tF_1(tx)|_{t=0}^{t=1} = F_1(x).
\end{aligned}$$

Hieruit leiden we tenslotte af dat $\partial f/\partial x_1 = F_1$. Omdat alle variabelen x_1, x_2, x_3 in de definitie van f dezelfde rol spelen, concluderen we dat $\partial f/\partial x_i = F_i$ voor $i = 1, 2, 3$, dus $\nabla f = F$. In het bijzonder blijkt hieruit dat alle partiële afgeleiden van f C^1 zijn, dus f is C^2. □

Het bovenstaande bewijs blijft geldig in de situatie dat F een C^1-vectorveld is met $\nabla\times F = 0$, gedefinieerd op een open deelverzameling $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ die stervormig is ten aanzien van het punt 0; d.w.z. voor iedere $x \in \Omega$ ligt ook het lijnstuk $L_{0,x}$ dat 0 met x vebindt geheel in Ω. Door translatie zien we dan in dat het bewijs ook werkt op een open verzameling die stervormig is ten aanzien van een van haar punten. Tenslotte laat het bewijs zich direct generalizeren naar $\mathbb{R}^n$. Derhalve geldt het volgende resultaat.

Stelling 6.2 *Laat Ω een open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ zijn die stervormig is ten aanzien van een punt $a \in \Omega$. Laat voorts $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ een C^1-vectorveld zijn dat voldoet aan (16) voor alle $1 \le i, j \le n$. Dan is er een unieke C^2-functie $f : \Omega \to \mathbb{R}$ met $f(a) = 0$ en $\operatorname{grad} f = F$. Deze functie wordt gegeven door de formule:*

$$f(x) = \int_0^1 \langle F(a + t(x-a)), x - a\rangle\ dt.$$

Bewijs: Voor het bewijs van deze stelling, dat in wezen hetzelfde is als het bovenstaande bewijs, verwijzen we de lezer naar het Dictaat Analyse 2, Lemma 8.4.8. □

7 Complexe functies

Bestudeer de paragrafen 10.1 t/m 10.9 uit het Analyse 2 dictaat, met uitzondering van de tekst in § 10.3 na Stelling 10.3.6. De nu volgende tekst dient ter vervanging van paragraaf 10.10 uit het Analyse 2 dictaat.

Definitie 7.1 Zij $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ een stuksgewijze C^1-kromme. Zij voorts $f : \mathrm{im}(\gamma) \to \mathbb{C}$ een continue functie. Dan definiëren we de *complexe lijnintegraal* van f langs γ door:

$$\int_\gamma f(z)\, dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt. \tag{18}$$

Opmerking 7.2 In het bovenstaande is $\varphi : t \mapsto f(\gamma(t))\gamma'(t)$ een begrensde complexwaardige functie op $[a, b]$, die continu is behalve eventueel in een eindig aantal punten. Derhalve is φ Riemann-integreerbaar over $[a, b]$.

Voorbeeld 7.3 Zij $\alpha \in \mathbb{C}$, zij $r > 0$ en zij $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $\gamma(t) = \alpha + re^{it}$. Dan is $\mathrm{im}(\gamma)$ de cirkel met straal r en middelpunt α. Zij $f : \mathbb{C} \setminus \{\alpha\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto (z - \alpha)^{-1}$. Dan is $f(\gamma(t)) = r^{-1}e^{-it}$, terwijl $\gamma'(t) = rie^{it}$, dus

$$\int_\gamma \frac{1}{z-\alpha}\, dz = \int_\gamma f(z)\, dz = \int_0^{2\pi} i\, dt = 2\pi i.$$

Voorbeeld 7.4 Laten α, r en γ als in het voorgaande voorbeeld zijn. We beschouwen nu voor $k \in \mathbb{Z},\ k \neq -1$, de functie $g : \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbb{C}$ gedefinieerd door $g(z) = (z - \alpha)^k$. Deze functie is complex differentieerbaar op zijn domein. Merk op dat $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{C}$ als $k \geq 0$ en $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ als $k < 0$. Nu is $g(\gamma(t)) = r^k e^{ikt}$ en $\gamma'(t) = rie^{it}$, dus

$$\int_\gamma g(z)\, dz = ir^{k+1} \int_0^{2\pi} e^{i(k+1)t}\, dt = 0,$$

aangezien $k + 1 \neq 0$. We concluderen dat

$$\int_\gamma (z-\alpha)^k\, dz = 0 \qquad (k \neq -1).$$

Complexe lijnintegralen kan men schatten met behulp van het volgende lemma.

Lemma 7.5 *Zij $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ een C^1-kromme en zij $f : \mathrm{im}(\gamma) \to \mathbb{C}$ een continue functie met $|f(z)| \leq M$ voor alle $z \in \mathrm{im}(\gamma)$ (voor een gegeven $M > 0$). Dan is*

$$|\int_\gamma f(z)\, dz| \leq Ml(\gamma),$$

met $l(\gamma)$ de lengte van γ.

Opmerking 7.6 (a) We brengen uit het college Infinitesimaalrekening 2 in herinnering dat de lengte van γ gedefinieerd is door

$$l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt.$$

(b) Aangezien γ continu is, is $\mathrm{im}(\gamma) = \gamma([a,b])$ een gesloten en begrensde deelverzameling van $\mathbb{C}$ (zie Gevolg 1.37). De functie $|f|$ is continu op $\mathrm{im}(\gamma)$ dus neemt zijn maximum aan op $\mathrm{im}(\gamma)$ (zie Gevolg 1.38). Hieruit volgt dat de schatting uit het bovenstaande lemma geldt met $M = \max_{\mathrm{im}(\gamma)} |f|$.

Bewijs: Zij $[a,b]$ het domein van de kromme γ. Dan:

$$\begin{aligned} |\int_\gamma f(z)\, dz| &= |\int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\, dt| \\ &\leq \int_a^b |f(\gamma(t))|\,|\gamma'(t)|\, dt \\ &\leq M \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt = M l(\gamma). \end{aligned}$$

In de eerste schatting is hierbij Opmerking 10.9.8 uit het Analyse 2 dictaat gebruikt. □

Voorbeeld 7.7 Zij $\alpha \in \mathbb{C}$. Voor $r > 0$ definiëren we de kromme $\gamma_r : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ door $\gamma_r(t) = \alpha + re^{it}$. Veronderstel nu dat $R > 0$ en dat $f : B(\alpha; R) \to \mathbb{C}$ een complex differentieerbare functie is. Door de schatting uit het bovenstaande lemma te gebruiken zullen we aantonen dat:

$$\lim_{r\downarrow 0} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-\alpha}\, dz = 2\pi i\, f(\alpha).$$

Bewijs: Uit de complex differentieerbaarheid van f in α volgt dat

$$f(z) = f(\alpha) + f'(\alpha)(z-\alpha) + \rho(z), \tag{19}$$

met

$$\lim_{z\to\alpha} \frac{\rho(z)}{|z-\alpha|} = 0. \tag{20}$$

Uit (19) volgt

$$\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-\alpha}\, dz = \int_{\gamma_r} \frac{f(\alpha)}{z-\alpha}\, dz + \int_{\gamma_r} f'(\alpha)\, dz + I(r), \tag{21}$$

met $I(r) = \int_{\gamma_r} \rho(z)(z-\alpha)^{-1}\, dz$. Uit Voorbeeld 7.3 concluderen we dat de eerste integraal in het rechterlid van (21) gelijk is aan $2\pi i f(\alpha)$. Uit Voorbeeld 7.4 met $k = 0$ concluderen we dat de tweede integraal in het rechterlid van (21) gelijk is aan 0. Het is daarom voldoende te bewijzen dat $\lim_{r\downarrow 0} I(z) = 0$. Dit doen we als volgt.

Zij $\varepsilon > 0$. Dan is er wegens (20) een $\delta > 0$ met $\delta < 1$ zo dat voor alle $z \in B(\alpha;\delta)$ met $z \neq \alpha$ geldt

$$|\frac{\rho(z)}{z-\alpha}| \leq \frac{\varepsilon}{4\pi}.$$

Uit Lemma 7.5 volgt nu, voor $0 < r < \delta$, dat

$$|I(r)| \leq \frac{\varepsilon}{2\pi} l(\gamma_r) = r\varepsilon < \delta\varepsilon < \varepsilon.$$

Hieruit volgt dat $\lim_{r\downarrow 0} I(r) = 0$. □

De in Definitie 7.1 gedefinieerde complexe lijnintegraal kan gezien worden als integraal van een éénvorm. Zij $U \subset \mathbb{R}^2$. Onder een complexe éénvorm op U verstaan we een formele uitdrukking van de vorm

$$\omega = p dx + q dy$$

met p en q continue *complexwaardige* functies op U. Is U open, dan heet de vorm ω van klasse C^r ($r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) als p en q van klasse C^r zijn.

Zij $\gamma : [a, b] \to U$ een stuksgewijze C^1-kromme, dan definiëren we de integraal van ω langs γ door:

$$\int_\gamma \omega := \int_a^b [p(\gamma(t))\gamma_1'(t) + q(\gamma(t))\gamma_2'(t)]\, dt.$$

Deze definitie kan gemakkelijk onthouden worden door het rechterlid van de bovenstaande identiteit te lezen als

$$\int_a^b [p(\gamma(t))d\gamma_1(t) + q(\gamma(t))d\gamma_2(t)].$$

Laten $p = p_1 + ip_2$ en $q = q_1 + iq_2$ de ontbindingen van p en q zijn in reëel en imaginair deel. Dan noemen we $\omega_1 = p_1 dx + q_1 dy$ het reële deel en $\omega_2 = p_2 dx + q_2 dy$ het imaginaire deel van ω; bovendien schrijven we $\omega = \omega_1 + i\omega_2$. Wegens Definitie 10.9.1 uit het Analyse 2 dictaat geldt:

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \omega_1 + i \int_\gamma \omega_2.$$

Op deze manier wordt de theorie van integratie van complexe éénvormen gereduceerd naar die van reële éénvormen.

Lemma 7.8 *Zij $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ een stuksgewijze C^1-kromme. Zij voorts $f : \mathrm{im}(\gamma) \to \mathbb{C}$ een continue functie. Dan geldt:*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_\gamma f(dx + i dy); \tag{22}$$

hierbij dient het rechterlid gelezen te worden als de integraal van de complexe éénvorm $f\,dx + if\,dy$.

Bewijs: Zij $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$ de ontbinding van γ in reëel en imaginair deel. Dan is $\gamma'(t) = \gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t)$. Het linkerlid van (22) kan derhalve herschreven worden als

$$\int_a^b [f(\gamma(t))\gamma_1'(t) + if(\gamma(t))\gamma_2'(t)]\, dt.$$

Dit is per definitie precies de integraal van de complexe éénvorm $f\,dx + if\,dy$ langs γ. $\square$

De in het college Infinitesimaalrekening 2 behandelde Stelling van Green geldt ook voor complexe éénvormen.

Stelling 7.9 (Stelling van Green). *Zij G een begrensde open verzameling in $\mathbb{R}^2$ met stuksgewijze C^1-rand ∂G. Zij $pdx + qdy$ een complexe éénvorm van klasse C^1, gedefinieerd op een open verzameling U die de afsluiting $\bar{G}$ van G bevat. Dan is*

$$\int_{\partial G} p\,dx + q\,dy = \int_G \left[\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right]\, dx\,dy.$$

Hierbij is ∂G voorzien van de door G geïnduceerde oriëntatie.

Bewijs: De stelling volgt door de Stelling van Green voor reële éénvormen toe te passen op het reële deel ω_1 en het imaginaire deel ω_2 van $\omega := pdx + qdy$. Merk hierbij op dat $\partial q/\partial x = \partial q_1/\partial x + i\partial q_2/\partial x$ en $\partial p/\partial y = \partial p_1/\partial y + i\partial p_2/\partial y$. $\square$

Zij $U \subset \mathbb{C}$ open. In het vervolg zullen we met een complex differentieerbare functie op U bedoelen: een complex differentieerbare functie $U \to \mathbb{C}$ die bovendien C^1 is op U.

Opmerking 7.10 (a) Is $f : U \to \mathbb{C}$ complex differentieerbaar, dan is $f' = \frac{\partial}{\partial f}x = -i\frac{\partial}{\partial f}y$ op U. Hieraan ziet men dat het C^1 zijn van f gelijkwaardig is met het continu zijn van de complexe afgeleide f'.

(b) Men kan bewijzen dat iedere complex differentieerbare functie op een open verzameling *automatisch* C^1 is. Wij zullen dit resultaat hier niet bewijzen, en in de praktijk steeds het C^1 zijn van optredende complex differentieerbare functies controleren.

De stelling van Green heeft het volgende interessante en buitengewoon belangrijke gevolg voor complexe lijnintegralen.

Stelling 7.11 (Stelling van Cauchy). *Zij G een open en begrensde verzameling in $\mathbb{C}$ met stuksgewijze C^1-rand ∂G. Zij $U \subset \mathbb{C}$ een open deelverzameling die de afsluiting $\bar{G}$ van G bevat, en zij $f : U \to \mathbb{C}$ complex differentieerbaar. Dan is*

$$\int_{\partial G} f(z)\,dz = 0.$$

Bewijs: De bovenstaande complexe lijnintegraal kunnen we herschrijven als de integraal over ∂G van de complexe éénvorm $\omega = pdx + qdy$, met $p = f$ en $q = if$. De éénvorm ω is van klasse C^1. Met de Stelling van Green volgt derhalve:

$$\int_{\partial G} f(z)\,dz = \int_G \left[i\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right]\,dx\,dy.$$

De integrand van de integraal in het rechterlid is overal op G gelijk aan nul wegens de Cauchy-Riemann vergelijkingen. $\square$

Voor de toepassingen is ook het volgende gevolg van de Stelling van Cauchy zeer interessant.

Stelling 7.12 (Integraalformule van Cauchy). *Zij $\alpha \in \mathbb{C}$, $R > 0$ en zij f een complex differentieerbare functie op de open schijf $B(\alpha, R)$ met middelpunt α en straal R. Zij $0 < r < R$ en zij $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ gedefinieerd door $\gamma(t) = \alpha + re^{it}$ (de cirkel met middelpunt α en straal r, eenmaal in positieve richting doorlopen). Dan is*

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z - \alpha}\,dz = 2\pi i f(\alpha).$$

Bewijs: Schrijf γ_r voor de boven gedefinieerde kromme; hiermee brengen we de afhankelijkheid van r tot uitdrukking. Zijn r_1, r_2 positieve reële getallen met $0 < r_1 < r_2 < R$, dan is

$$G = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z - \alpha| < r_2\}$$

een begrensde open verzameling met C^1-rand. De rand ∂G is de disjuncte vereniging van de cirkels $\mathrm{im}(\gamma_{r_1})$ en $\mathrm{im}(\gamma_{r_2})$.

De functie $g : z \mapsto (z - \alpha)^{-1} f(z)$ is complex differentieerbaar op de open verzameling $U := B(\alpha, R) \setminus \{\alpha\}$. Uit de Stelling van Cauchy toegepast op g volgt dat

$$\int_{\partial G} \frac{f(z)}{z - \alpha}\, dz = 0;$$

hierbij is ∂G van de door G geïnduceerde oriëntatie. Nu is γ_{r_2} een oriëntatiebehoudende parametrisering van $\mathrm{im}(\gamma_{r_2})$; voorts is γ_{r_1} een oriëntatie-omkerende parametrisering van $\mathrm{im}(\gamma_{r_1})$. Derhalve is

$$0 = \int_{\partial G} \frac{f(z)}{z - \alpha}\, dz = \int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(z)}{z - \alpha}\, dz - \int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(z)}{z - \alpha}\, dz.$$

We concluderen dat de integraal

$$I(r) := \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - \alpha}\, dz$$

een waarde I heeft die onafhankelijk is van $0 < r < R$. In het bijzonder is $\lim_{r \downarrow 0} I(r) = I$. Anderzijds volgt uit Voorbeeld 7.7 dat $\lim_{r \downarrow 0} I(r) = 2\pi i f(\alpha)$. Dit levert het gewenste resultaat. □

We eindigen dit dictaat met twee toepassingen van de Stelling van Cauchy. Voor andere toepassingen verwijzen we naar het college Analyse 3.

De eerste toepassing is een fraai bewijs van de hoofdstelling van de algebra. Daarin zullen we het volgende lemma nodig hebben.

Lemma 7.13 *Laat p een veeltermfunctie van de graad $n \geq 1$ op $\mathbb{C}$ zijn. Dan bestaan er constanten $C > 0$ en $R > 0$ zo dat*

$$|z| > R \quad \Rightarrow \quad |p(z)| > C|z|^n.$$

Bewijs: We schrijven $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$, met $a_j \in \mathbb{C}$ voor $0 \leq j \leq n$ en $a_n \neq 0$. Hieruit volgt, voor $z \neq 0$, dat $p(z) = z^n f(\frac{1}{z})$, met

$$f(w) = a_n + a_{n-1} w + \cdots + a_0 w^n.$$

Met de gebruikelijke rekenregels voor limieten volgt dat $\lim_{w \to 0} f(w) = a_n$. In het bijzonder bestaat er dus een $\delta > 0$ zo dat voor $|w| < \delta$ geldt $|f(w) - a_n| < \frac{1}{2}|a_n|$, waaruit weer volgt dat $|f(w)| > \frac{1}{2}|a_n|$ voor alle w met $|w| < \delta$.

Zij $C = \frac{1}{2}|a_n|$ en $R = 1/\delta$. Dan geldt voor alle $z \in \mathbb{C}$ met $|z| > R$ dat $|1/z| < \delta$, dus

$$|p(z)| = |z|^n |f(\tfrac{1}{z})| > |z|^n \tfrac{|a_n|}{2} = C|z|^n.$$

□

Stelling 7.14 (Hoofdstelling van de algebra). *Zij p een niet-constante veeltermfunctie op $\mathbb{C}$. Dan heeft p tenminste één nulpunt in $\mathbb{C}$; d.w.z. er bestaat een $\alpha \in \mathbb{C}$ met $p(\alpha) = 0$.*

Bewijs: Veronderstel dat p geen nulpunt heeft. Uit deze veronderstelling volgt dat de functie $z \mapsto \frac{1}{p(z)}$ complex differentieerbaar op $\mathbb{C}$ is. Definieer voor $r > 0$ de kromme $\gamma_r : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ door $\gamma_r(t) = re^{it}$. Dan volgt uit de Integraalformule van Cauchy, toegepast op de functie $f : z \mapsto p(z)^{-1}$, dat

$$\int_{\gamma_r} \frac{dz}{p(z)z} = \frac{2\pi i}{p(0)}. \tag{23}$$

Laten $C, R > 0$ constanten bij p zijn als in Lemma 7.13 zijn. Dan geldt voor alle z met $|z| = r \geq R$ dat $|p(z)z| \geq Cr^{n+1}$. Met Lemma 7.5 volgt nu dat dat

$$\left| \int_{\gamma_r} \frac{dz}{p(z)z} \right| \leq \frac{l(\gamma_r)}{Cr^{n+1}} = \frac{2\pi}{Cr^n}.$$

Combineren we deze schatting met (23), dan vinden we

$$\frac{1}{|p(0)|} \leq \frac{1}{Cr^n}.$$

Deze schatting geldt voor iedere keuze van $r > R$; daaruit leiden we af dat $|p(0)|^{-1} = 0$, in tegenspraak met $|p(0)| > 0$. $\square$

Opmerking 7.15 We vermelden hier dat de hoofdstelling tot gevolg heeft dat iedere niet-constante veeltermfunctie $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ te ontbinden is in lineaire factoren. Voor meer details verwijzen we de lezer naar het Analyse 2 dictaat, Gevolg 10.3.9.

Ter voorbereiding op de laatste toepassing behandelen we de volgende variant van de integraalformule van Cauchy.

Stelling 7.16 (De integraalformule van Cauchy, versie 2). *Laat $G \subset \mathbb{C}$ een open begrensde verzameling zijn met stuksgewijze C^1-rand ∂G. Zij $U \subset \mathbb{C}$ een open verzameling die de afsluiting $\bar{G}$ van G bevat, en zij $f : U \to \mathbb{C}$ een complex differentieerbare functie. Dan geldt voor iedere $\alpha \in G$ dat*

$$\int_{\partial G} \frac{f(z)}{z - \alpha}\, dz = 2\pi i f(\alpha).$$

Bewijs: Omdat G open is, bestaat er een $\delta > 0$ zo dat $B(\alpha; \delta) \subset G$. Kies $0 < r < \delta$, dan ligt de afsluiting $\bar{S}$ van de open schijf $S = B(\alpha; r)$ geheel in G, dus heeft hij lege doorsnede met ∂G. Zie Figuur 2.

Figuur 2: De integraal formule van Cauchy

Zij G_0 de doorsnede van G met het complement van S. Dan is G_0 een open begrensde deelverzameling van $\mathbb{C}$. De rand ∂G_0 van G_0 is gelijk aan de disjuncte vereniging van ∂G en ∂S. Laat ∂G_0 voorzien zijn van de geïnduceerde oriëntatie. Op het deel ∂G van ∂G_0 is deze oriëntatie dezelfde als de door G geïnduceerde. Op het deel ∂S van ∂G_0 is deze oriëntatie tegengesteld aan de door S geïnduceerde. De functie $z \mapsto f(z)/(z-\alpha)$ is complex differentieerbaar op de open verzameling $U \setminus \{\alpha\}$, die de afsluiting $\bar{G}_0$ omvat. Met behulp van de Stelling van Cauchy concluderen we hieruit dat

$$0 = \int_{\partial G_0} \frac{f(z)}{z-\alpha}\, dz = \int_{\partial G} \frac{f(z)}{z-\alpha}\, dz - \int_{\partial S} \frac{f(z)}{z-\alpha}\, dz.$$

De kromme $\gamma_r : t \mapsto \alpha + re^{it}$, $[0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, is een oriëntatiebehoudende parametrisering van ∂S. Met behulp van Stelling 7.12 concluderen we nu dat

$$\int_{\partial G} \frac{f(z)}{z-\alpha}\, dz = \int_{\partial S} \frac{f(z)}{z-\alpha}\, dz = \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-\alpha}\, dz = 2\pi i f(\alpha).$$

$\square$

Voorbeeld 7.17 Tenslotte gebruiken we de integraalformule van Cauchy om de integraal

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\, dx \tag{24}$$

te berekenen. De functie $\frac{1}{1+x^2}$ is oneigenlijk Riemann-integreerbaar over $\mathbb{R}$, en domineert de absolute waarde van de integrand in het rechterlid van (24); met Stelling 10.7.3 (ii) uit Analyse 1 concluderen we nu dat de integraal in het rechterlid van (24) convergeert. Derhalve geldt $I = \lim_{r\to\infty} I(r)$, waarbij

$$I(r) = \int_{-r}^{r} \frac{\cos x}{1+x^2}\, dx.$$

Vervangen we in deze integraal cos door sin dan ontstaat een oneven integrand, en de integraal krijgt waarde nul. Daarom:

$$I(r) = \int_{-r}^{r} \frac{e^{ix}}{1+x^2}\, dx.$$

We zullen deze integraal vergelijken met een integraal over de rand van de open verzameling G_r bestaande uit de punten $z \in \mathbb{C}$ met $|z| < r$ en $\operatorname{Im} z > 0$ (een open halve cirkelschijf). De georiënteerde rand van G_r bestaat uit twee stukken: het interval $[-r, r]$ en de halve cirkel $|z| = r$, $\operatorname{Im} z \geq 0$. Het interval wordt met behoud van oriëntatie geparametriseerd door $\gamma_r : [-r, r] \to \mathbb{C}, t \mapsto t$. De halve cirkel wordt met behoud van oriëntatie geparametriseerd door de kromme $\sigma_r : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ gegeven door $\sigma_r(t) = re^{it}$. Zie Figuur 3.

Figuur 3: Lijnintegralen van $\frac{e^{iz}}{z^2+1}$

We beschouwen de complex differentieerbare functie $f : \mathbb{C} \setminus \{\pm i\} \to \mathbb{C}$ gedefinieerd door $f(z) = (1 + z^2)^{-1} e^{iz}$. De rand ∂G_r van G_r ligt geheel in $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$. De integraal van f over γ_r is gelijk aan $I(r)$, de integraal $\int_{\sigma_r} f(z)\, dz$ noteren we met $R(r)$. Er geldt dus:

$$\int_{\partial G_r} f(z)\, dz = I(r) + R(r).$$

Schrijf $g(z) = (z + i)^{-1} e^{iz}$, dan is $f(z) = g(z)/(z - i)$. De functie g is complex differentieerbaar op de open verzameling $U := \mathbb{C} \setminus \{-i\}$, terwijl deze laatste verzameling de afsluiting van G_r bevat. Met Stelling 7.16 toegepast op de functie g volgt derhalve dat

$$\int_{\partial G_r} f(z)\, dz = \int_{\partial G_r} \frac{g(z)}{z - i}\, dz = 2\pi i\, g(i) = \frac{\pi}{e}.$$

Hieruit concluderen we dat

$$I(r) + R(r) = \frac{\pi}{e}. \tag{25}$$

We zullen hieruit de waarde van $I = \lim_{r \to \infty} I(r)$ afleiden door aan te tonen dat $R(r) \to 0$ als $r \to \infty$.

Schrijf $z = x + iy$. Is $y = \operatorname{Im} z \geq 0$, dan is

$$|e^{iz}| = |e^{-y+ix}| = e^{-y} \leq 1.$$

Is $|z| = r > 1$, dan is $|z^2 + 1| \geq |z^2| - 1 = r^2 - 1$. Hieruit concluderen we dat voor alle $z \in \operatorname{im}(\sigma_r)$ geldt:

$$|f(z)| \leq \frac{1}{r^2 - 1}.$$

Met Lemma 7.5 volgt hieruit dat

$$|R(r)| = |\int_{\sigma_r} f(z)\, dz| \leq \frac{l(\sigma_r)}{r^2 - 1} = \frac{\pi r}{r^2 - 1},$$

waaruit we afleiden dat $\lim_{r\to\infty} R(r) = 0$. Combineren we dit met (25) dan vinden we

$$I = \lim_{r\to\infty} I(r) = \frac{\pi}{e} - \lim_{r\to\infty} R(r) = \frac{\pi}{e}.$$