Infinitesimaalrekening C

E.P. van den Ban

Inhoudsopgave

1 Complex differentieerbare funkties

1.1 Inleiding

In het college algebra A werd het systeem C der complexe getallen aanschouwelijk gemaakt door een getal $z = x+yi \in \mathrm{C}$ te identificeren met het punt (x, y) in het vlak R^2. We hadden deze identificatie ook kunnen gebruiken om C te *definiëren* als R^2 *met een extra bewerking*, namelijk de complexe vermenigvuldiging:

$$(u, v)(x, y) = (ux - vy, uy + vx). \tag{1}$$

Vatten we $u + vi$ op als notatie voor (u, v) dan kunnen we (1) herschrijven als:

$$(u + vi)(x + yi) = (ux - vy) + (vx + uy)i,$$

en dit is precies de gebruikelijke schrijfwijze voor de complexe vermenigvuldiging. In het vervolg zullen we ons op het standpunt stellen dat $\mathrm{C} = \mathrm{R}^2$ *met de extra bewerking* (1), en we zullen $x + yi = (x, y)$ schrijven als ons dat zo uitkomt. Een complexe variabele zal veelal z of w heten. We spreken af dat we dan altijd $x = \mathrm{Re}\, z$, $y = \mathrm{Im}\, z$, $u = \mathrm{Re}\, w$ en $v = \mathrm{Im}\, w$ zullen schrijven. Is een funktie $f : \mathrm{C} \to \mathrm{C}$ gegeven dan schrijven we $f_1 = \mathrm{Re}\, f$ en $f_2 = \mathrm{Im}\, f$, zodat $f = f_1 + if_2$. Een uitspraak als 'f is partieel differentieerbaar' heeft nu zin, en betekent dat alle partiële afgeleiden $\frac{\partial f_i}{\partial x}$ en $\frac{\partial f_i}{\partial y}$ $(i = 1, 2)$ bestaan.

Voorbeeld.

We beschouwen de funktie $f : z \mapsto z^2$. Er geldt $f(z) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$, hetgeen in de R^2-notatie herschreven kan worden als

$$f_1(x, y) = x^2 - y^2, \quad f_2(x, y) = 2xy.$$

Hieraan zien we dat f partieel differentieerbaar is met partiële afgeleiden

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = 2y, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = 2x.$$

In de complexe notatie schrijven we

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2iy \quad \text{en} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2ix - 2y.$$

Merk op dat $\frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial x}$. Verderop zullen we zien dat dit geen toeval is, maar een speciaal geval van de zogenaamde Cauchy-Riemann vergelijkingen.

Ook andere begrippen die we vroeger voor R^2 geïntroduceerd hadden gaan door voor C. Zo heet een deelverzameling V van C *open* als voor iedere $z \in V$ een $\epsilon > 0$ bestaat zo dat het cirkelschijfje

$$D(z, \epsilon) = \{w \in \mathrm{C}; |w - z| < \epsilon\} \tag{2}$$

geheel in V ligt. Merk op dat we hier de oude definitie voor R^2 herschreven hebben in de complexe notatie. De norm $\|.\|$ op R^2 komt overeen met de modulus op C: immers er geldt

$$\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} = |x+yi|.$$

Hieronder laten we nog enige, reeds voor R^2 geïntroduceerde, begrippen de revue passeren, maar dan in de complexe notatie.

Limiet van een rij. Laat een rij a_n van complexe getallen gegeven zijn, en zij $a \in \mathrm{C}$. Dan betekent

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

dat $\lim |a_n - a| = 0$. Men zegt dan ook wel dat de rij a_n convergeert met limiet a. Een niet convergente rij heet divergent.

Opmerking. In de bovenstaande definitie hebben we gebruik gemaakt van het feit dat $|a_n - a|$ een rij *reële* getallen vormt, waarvoor we reeds een definitie van limiet kennen. Herschrijven van die vroegere definitie levert: *voor iedere $\epsilon > 0$ is er een natuurlijk getal N te vinden zo dat voor iedere $n > N$ geldt: $|a_n - a| < \epsilon$.*

Voorbeelden. Laat z een complex getal zijn en beschouw de rij $a_n = z^n$.

(1) Als $|z| < 1$, dan is $|a_n - 0| = |z^n| = |z|^n$ en de laatste uitdrukking heeft limiet 0 als $n \to \infty$. Derhalve geldt $\lim a_n = 0$.

(2) Als $z = 1$, dan is $a_n = 1$ voor alle n, dus $\lim a_n = 1$.

(3) Als $|z| = 1$, $z \neq 1$ dan blijft a_n op de cirkel met middelpunt 0 en straal 1 'rondlopen' (maak zelf een plaatje). We kunnen dat rondlopen in formulevorm weergeven:

$$a_{n+1} = z a_n.$$

Stel dat de rij a_n convergeerde met limiet $a \in \mathrm{C}$. Dan zou uit de bovenstaande recurrentie door limietovergang volgen dat $a = za$, dus $a = 0$. Dus $|a_n - a| = |z|^n = 1$, in tegenspraak met de definitie van limiet. De rij a_n heeft derhalve geen limiet.

(4) Als $|z| > 1$, dan is in een plaatje (maak dat zelf!) snel te zien dat a_n wegloopt van ieder tevoren gekozen complex getal a. We kunnen dat ook met een schatting laten zien: voor iedere $a \in \mathrm{C}$ geldt dat $|a_n - a| \geq |z^n| - |a|$ terwijl $\lim |z^n| = \lim |z|^n = +\infty$. Er is dus geen complex getal a dat als limiet van de rij a_n op kan treden.

In het bovenstaande voorbeeld (3) hebben we stilzwijgend een voor de hand liggende produktregel gebruikt. In het lemma hieronder inventariseren we nog eens de rekenregels voor complexe rijen. Ze zijn gelijk aan die voor reële rijen. Omdat de bewijzen in wezen ook hetzelfde zijn laten we die achterwege.

Lemma 1.1 *Laten a_n en b_n convergente rijen complexe getallen zijn. Dan zijn ook de rijen $|a_n|$, $a_n + b_n$, ca_n $(c \in \mathrm{C})$, en $a_n b_n$ convergent, en er geldt:*

(1) $\lim |a_n| = |\lim a_n|$;

(2) $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$;

(3) $\lim ca_n = c \lim a_n$;

(4) $\lim a_n b_n = \lim a_n \lim b_n$.

Als bovendien gegeven is dat $\lim b_n \neq 0$ dan convergeert ook de rij a_n/b_n en er geldt dat:

(5) $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$.

Limiet van een funktie. In het vervolg is V steeds een deelverzameling van C, en f een funktie $V \to \mathrm{C}$. Als $\alpha \in V, L \in \mathrm{C}$, dan betekent

$$\lim_{z \to \alpha} f(z) = L$$

dat er voor iedere $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ te vinden is zo dat

$$z \in V, \quad 0 < |z - \alpha| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(z) - L| < \epsilon.$$

De rekenregels voor limieten met betrekking tot de operaties optellen, vermenigvuldigen en delen zijn gelijk aan die voor funkties $\mathrm{R} \to \mathrm{R}$. Omdat de bewijzen ook hetzelfde zijn, laten we ze achterwege.

Lemma 1.2 *Zij $\alpha \in V$ en laat een tweetal funkties $f, g : V \to \mathrm{C}$ gegeven zijn waarvoor $\lim f(z)$ en $\lim g(z)$ bestaan voor $z \to \alpha$. Dan bestaan ook de limieten van $|f|$, $f + g$, cf $(c \in \mathrm{C})$ en fg voor $z \to \alpha$ en er geldt (steeds voor $z \to \alpha$):*

(1) $\lim |f(z)| = |\lim f(z)|$,

(2) $\lim(f(z) + g(z)) = \lim f(z) + \lim g(z)$,

(3) $\lim cf(z) = c \lim f(z)$,

(4) $\lim f(z)g(z) = \lim f(z) \lim g(z)$.

Als bovendien gegeven is dat $\lim g(z) \neq 0$, dan bestaat ook de limiet van f/g voor $z \to \alpha$ en er geldt dat

(5) $\lim \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim f(z)}{\lim g(z)}$.

Continuiteit. De funktie f heet continu in het punt $\alpha \in V$, als

$$\lim_{z \to \alpha} f(z) = f(\alpha).$$

Opmerking. Lemma 1.2 heeft het voor de hand liggende gevolg voor de continuïteit van sommen, produkten en quotiënten van continue funkties.

1.2 Complexe differentieerbaarheid

In het vervolg zal V steeds een *open* deelverzameling van C zijn en f een funktie $V \to \mathbf{C}$. In het college Infinitesimaalrekening B maakten we reeds kennis met het begrip differentieerbaarheid voor funkties van $\mathbf{R}^p$ naar $\mathbf{R}^q$. We herhalen de definitie daarvan nog eens kort voor onze situatie (dus met $p = q = 2$), en met de complexe notatie.

Definitie 1.3 De funktie f is differentieerbaar in het punt $\alpha \in V$, als f partiëel differentieerbaar is in α en er bovendien een (complexwaardige) funktie R bestaat zodanig dat

$$f(\alpha + w) = f(\alpha) + Df(\alpha)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + R(w)$$

en

$$\lim_{w \to 0} \frac{R(w)}{|w|} = 0.$$

Bedenk bij het lezen van de bovenstaande definitie dat we zouden schrijven $w = u + vi$. Verder is $Df(\alpha)$ een verkorte notatie voor de Jacobi matrix:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(\alpha) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(\alpha) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(\alpha) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(\alpha) \end{pmatrix}.$$

We brengen het volgende, praktisch zeer bruikbare, kenmerk voor differentieerbaarheid in herinnering.

Lemma 1.4 *Indien alle partiële afgeleiden van f bestaan in een open omgeving van α en continu zijn in α, dan is f differentieerbaar in α.*

Definitie 1.3 hebben we indertijd gemotiveerd met de constatering dat deling door een vector $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ in $\mathbf{R}^2$ niet mogelijk is zodat we niet zoiets als de limiet van een differentiequotient konden opschrijven. In C ligt de zaak echter anders: deling door $w = u + vi$ is mogelijk. Vandaar de volgende definitie.

Definitie 1.5 De funktie f heet *complex differentieerbaar* in het punt $\alpha \in V$ als de limiet

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h} \tag{3}$$

bestaat (NB: hierin is h een complexe variabele). De limiet heet dan de (*complexe*) *afgeleide* van f in α, notaties: $f'(\alpha)$ of

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}(\alpha).$$

Ga na dat de definitie van complexe differentieerbaarheid verkregen kan worden uit de oude definitie van differentieerbaarheid van funkties $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ door in die definitie overal R te vervangen door C. Door vroegere bewijzen op soortgelijke wijze aan te passen verkrijgen we de volgende rekenregels voor complexe afgeleiden. We laten de bewijzen achterwege.

Stelling 1.6 *Veronderstel dat de funkties $f, g : V \to \mathbb{C}$ complex differentieerbaar zijn in $\alpha \in V$, en zij $c \in \mathbb{C}$. Dan zijn ook de funkties $f+g$, cf en fg complex differentieerbaar in α en er geldt:*

(1) $(f+g)'(\alpha) = f'(\alpha) + g'(\alpha)$,

(2) $(cf)'(\alpha) = cf'(\alpha)$,

(3) $(fg)'(\alpha) = f'(\alpha)g(\alpha) + f(\alpha)g'(\alpha)$.

Als $g(\alpha) \neq 0$ dan is $\frac{f}{g}$ complex differentieerbaar in α en er geldt

(4) $(\frac{f}{g})'(\alpha) = \frac{(f'(\alpha)g(\alpha) - f(\alpha)g'(\alpha))}{g(\alpha)^2}$.

Het is duidelijk dat een constante funktie complex differentieerbaar is met als afgeleide de funktie die identiek gelijk aan nul is. Omgekeerd geldt:

Stelling 1.7 *Zij D een open cirkelschijf in $\mathbb{C}$ en $f : D \to \mathbb{C}$ een complex differentieerbare funktie met $f'(z) = 0$ voor alle $z \in D$. Dan is er een constante $C \in \mathbb{C}$ zo dat $f(z) = C$ voor alle $z \in D$.*

Bewijs: We herleiden het resultaat de overeenkomstige stelling voor funkties van een reële variabele als volgt. Zij α het middelpunt en R de straal van D. Fixeer een willekeurig punt $z_0 \in D$, $z_0 \neq \alpha$ en beschouw de funktie $g(t) = f(z_0 + t(z_0 - \alpha))$ $(0 \leq t \leq 1)$. Dan is

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \to 0} \frac{g(t+\epsilon) - g(t)}{\epsilon} &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(z_0 + t(z_0 - \alpha) + \epsilon(z_0 - \alpha)) - f(z_0 + t(z_0 - \alpha))}{\epsilon(z_0 - \alpha)}(z_0 - \alpha) \\
&= \lim_{w \to 0} \frac{f(z_0 + t(z_0 - \alpha) + w) - f(z_0 + t(z_0 - \alpha))}{w}(z_0 - \alpha) \\
&= f'(z_0 + t(z_0 - \alpha))(z_0 - \alpha) = 0.
\end{aligned}$$

Derhalve is $g(t)$ op het interval $[0, 1]$ differentieerbaar naar de reële parameter t met afgeleide identiek gelijk aan nul. De funktie g is dus constant op dat interval. We concluderen dat $f(z_0) = g(1) = g(0) = f(\alpha)$. Voor willekeurige $z_0 \in D$ hebben we dus bewezen dat $f(z_0) = f(\alpha)$. □

Naast de in Stelling 1.6 genoemde rekenregels geldt er ook een kettingregel voor de samenstelling van complex differentieerbare funkties. Het bewijs is in essentie hetzelfde als dat voor differentieerbare funkties $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. We laten het daarom achterwege.

Stelling 1.8 (De kettingregel). *Laten V en W open deelverzamelingen van $\mathbb{C}$ zijn, $f : V \to W$ en $g : W \to \mathbb{C}$ funkties, en veronderstel dat f complex differentieerbaar is in $\alpha \in V$ terwijl g complex differentieerbaar is in $f(\alpha)$. Dan is $g \circ f$ complex differentieerbaar in α en er geldt:*

$$(g \circ f)'(\alpha) = g'(f(\alpha))f'(\alpha).$$

Uit de rekenregels van Stelling 1.6 volgt direkt dat een polynoom of veeltermfunktie $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ complex differentieerbaar op C is, met afgeleide $p'(z) = a_1 + 2a_2 z + \ldots + n a_n z^{n-1}$. Denkend aan Taylor reeksen zouden we ons nu de vraag kunnen stellen of een funktie f gedefinieerd door een oneindig voortlopende reeks

$$f(z) = a_0 + a_1 z^1 + a_2 z^2 + \ldots + a_k z^k + \ldots$$

ook complex differentieerbaar is. De studie van een dergelijke *machtreeks* zal een van de hoofdonderwerpen van dit college worden. Om enig gevoel te krijgen voor wat het betekent dat een funktie door een machtreeks gedefinieerd wordt, beschouwen we de veeltermen $s_n(z) = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n (n \geq 0)$. Men rekent eenvoudig na dat

$$s_n(z) = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

Als $|z| < 1$, dan is $\lim_{n\to\infty} z^n = 0$ (zie Voorbeeld (1) in Paragraaf 1.1) en door toepassing van de rekenregels in Lemma 1.1 zien we dat

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left(1 + z + z^2 + \ldots + z^n\right) &= \lim_{n\to\infty} s_n(z) \\ &= \frac{1-0}{1-z} = \frac{1}{1-z} \end{aligned}$$

Later zullen we zien dat dit precies de betekenis is van de uitdrukking

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots..$$

Het linkerlid van de bovenstaande uitdrukking is wegens Stelling 1.6 complex differentieerbaar op het gebied $|z| < 1$. Bovenstaande *meetkundige* reeks definieert op dat gebied dus inderdaad een complex differentieerbare funktie. In de volgende hoofdstukken komen we nog uitgebreid terug op de theorie der machtreeksen.

1.3 De Cauchy-Riemann vergelijkingen

Veronderstel wederom dat de funktie f complex differentieerbaar is in het punt $\alpha \in V$. Door in (3) de limiet te nemen met de beperking dat h slechts reële waarden doorloopt zien we dat f in α partieel differentieerbaar naar x is, terwijl bovendien $\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha) = f'(\alpha)$. Door de limiet alleen over zuiver imaginaire waarden van h te nemen, zien we dat f in α ook partieel differentieerbaar is naar y, terwijl

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha) &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(\alpha + i\epsilon) - f(\alpha)}{\epsilon} \\ &= i \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(\alpha + i\epsilon) - f(\alpha)}{i\epsilon} \\ &= i f'(\alpha) \end{aligned}$$

In het bijzonder zien we dat
$$\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha) = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(\alpha).$$
Door f in reëel en imaginair deel te splitsen ($f = f_1 + if_2$), vinden we tenslotte dat
$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(\alpha) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(\alpha), \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(\alpha) = -\frac{\partial f_2}{\partial x}(\alpha). \tag{4}$$
Bovenstaande vergelijkingen staan bekend als de *Cauchy-Riemann* vergelijkingen.

Voorbeeld.

In Paragraaf 1.1 zagen we dat de funktie $f : z \mapsto z^2$ voldoet aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen. Dit wordt nu verklaard uit het feit dat f complex differentieerbaar is.

Een funktie kan differentieerbaar zijn zonder complex differentieerbaar te zijn. Voorbeeld: de funktie $g(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$ is differentieerbaar (ga dit zelf na!) maar niet complex differentieerbaar. Immers
$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= 2x, \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= 2y. \end{aligned}$$
Hieruit blijkt dat buiten het punt $(0, 0)$ niet aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen voldaan wordt. De funktie $g(z) = |z|^2$ is dus niet complex differentieerbaar zodra $z \neq 0$.

Omgekeerd is een complex differentieerbare funktie wel altijd differentieerbaar. Het precieze verband wordt gegeven in onderstaande stelling.

Stelling 1.9 *De funktie $f : V \to \mathbb{C}$ is complex differentieerbaar in het punt $\alpha \in V$ dan en slechts dan als f differentieerbaar is in α en als in α bovendien voldaan is aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen (4).*

Als f complex differentieerbaar is in α, dan geldt voor alle $w = u + iv \in \mathbb{C}$ dat:
$$Df(\alpha)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = f'(\alpha)w.$$

Bewijs: (i) Veronderstel eerst dat f complex differentieerbaar is in het punt α. In het voorafgaande zagen we reeds dat f partieel differentieerbaar is in het punt α en er bovendien voldoet aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen. Hieruit volgt dat
$$\begin{aligned} f'(\alpha)(u + iv) &= u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} \\ &= Df(\alpha)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Figuur 1:

(waarbij we de vectoriële en de complexe notatie door elkaar gebruikt hebben). Uit de complexe differentieerbaarheid volgt verder dat

$$\frac{f(\alpha + w) - f(\alpha)}{w} = f'(\alpha) + \rho(w),$$

met $\lim_{w \to 0} \rho(w) = 0$. Schrijf $R(w) = w\rho(w)$. Dan volgt er dat:

$$f(\alpha + w) - f(\alpha) = Df(\alpha)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + R(w),$$

terwijl $\lim_{w \to 0} |w|^{-1}|R(w)| = 0$, zodat aan de definitie van differentieerbaarheid voldaan is.

(ii) Veronderstel nu dat f differentieerbaar is in α. Dat f voldoet aan de vergelijkingen (4) betekent nu precies dat $Df(\alpha) : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2$ gegeven wordt door vermenigvuldiging met een complex getal. Immers zij L het complexe getal $\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha) = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(\alpha)$. Dan is

$$Df(\alpha)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = L(u + vi) = Lw.$$

Er volgt dat

$$\frac{f(\alpha + w) - f(\alpha)}{w} = L + \frac{R(w)}{w}$$

en deze uitdrukking heeft limiet L als $w \to 0$ in C. $\square$

De Cauchy-Riemann vergelijkingen hebben de volgende meetkundige interpretatie. Zij $f : V \to \mathrm{C}$ complex differentieerbaar in (ieder punt van) de open verzameling V, en zij $\alpha \in V$. Zij m de rechte lijn door α evenwijdig aan de $x-$as en zij n de rechte lijn door

α evenwijdig aan de $y-$as. De beelden $f(m)$ en $f(n)$ van respectievelijk m en n zijn krommen in C. Hun respectievelijke raakvectoren in α zijn $\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha)$ en $\frac{\partial f}{\partial y}(\alpha)$. De Cauchy-Riemann vergelijkingen zeggen precies dat men de raakvector $\frac{\partial f}{\partial y}(\alpha)$ verkrijgt door de raakvector $\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha)$ in positieve richting over een hoek $\frac{\pi}{2}$ te draaien. In het bijzonder snijden de krommen $f(m)$ en $f(n)$ elkaar dus loodrecht in $f(\alpha)$.

Veronderstellen we in het bovenstaande algemener dat m en n C^1-krommen zijn die elkaar in α snijden onder een hoek φ, dan geldt het volgende. Laten a en b raakvectoren in α aan m resp. n zijn. Dan zijn $Df(\alpha)a$ en $Df(\alpha)b$ raakvectoren aan $f(m)$ resp. $f(n)$. De Cauchy-Riemann vergelijkingen garanderen nu dat de hoek tussen $Df(\alpha)a$ en $Df(\alpha)b$ dezelfde is als die tussen a en b. Met andere woorden: de beeldkrommen $f(m)$ en $f(n)$ snijden elkaar in het beeldpunt $f(\alpha)$ onder dezelfde hoek als m en n (zie Figuur 1). Op grond van deze eigenschap noemen we de complex differentieerbare funktie f ook wel *hoekbehoudend* of *conform*.

Voorbeeld.

Als voorbeeld beschouwen we de funktie $F(z) = z^2$ op C. Fixeer $a, b \in$ R en beschouw de lijnen $m_a : x = a$ en $n_b : y = b$. Schrijven we $w = (x+iy)^2$ dan geldt $u = x^2 - y^2$ en $v = 2xy$. Het beeld $F(m_a)$ is derhalve de kromme bestaande uit de punten $(u, v) = (a^2 - y^2, 2ay)$, $y \in$ R. Als $a = 0$ dan is dit precies de halfrechte van negatieve reële getallen. Als $a \neq 0$ dan vinden we door eliminatie van y dat $F(m_a)$ gegeven wordt door de vergelijking $u = a^2 - \left(\frac{v}{2a}\right)^2$. De lijn m_a wordt dus afgebeeld op een parabool die spitser is naarmate a dichter bij 0 ligt. Door op te merken dat de lijn n_b verkregen kan worden door alle punten van de lijn m_b met i te vermenigvuldigen zien we in dat $F(n_b)$ verkregen wordt door $F(m_b)$ te spiegelen in de $v-$as. Op grond van de Cauchy-Riemann vergelijkingen snijdt elke parabool $F(n_b)$ elke parabool $F(m_a)$ overal loodrecht (zie Figuur 2).

Voor een andere treffende illustratie van de betekenis van de Cauchy-Riemann vergelijkingen verwijzen we naar de volgende paragraaf, waarin de exponentiële funktie behandeld zal worden.

1.4 De exponentiële funktie.

Op C definiëren we de exponentiële funktie door

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \tag{5}$$

Opmerking. Deze definitie komt hier volslagen uit de lucht vallen. We kunnen hem motiveren met de volgende formele berekening waarbij we vooruit lopen op de theorie van de reeksen.

Figuur 2:

In de eerste plaats merken we op dat $e^z = e^x e^{iy}$ aannemelijk is; het volstaat daarom e^{iy} te onderzoeken. De reële e-macht heeft als Taylor reeks

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots \qquad (t \in R).$$

Vullen we iy in voor t in de reeks in het rechterlid, dan geeft dit de reeks

$$1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} \cdots = (1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots) + i(y - \frac{y^3}{3!} + \cdots) = \cos y + i \sin y.$$

Dit motiveert ons tot de bovenstaande definitie $e^{iy} := \cos y + i \sin y$.

Opmerking. Met behulp van de complexe e-macht kan men poolcoordinaten als volgt compact noteren. Immers:

$$r(\cos\varphi, \sin\varphi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}.$$

Uit de definitie (5) van de exponentiële funktie is snel in te zien dat de volgende rekenregels gelden (met $z, w \in \mathrm{C},\ n, k \in \mathrm{Z}$):

$$\begin{array}{lcl} e^{z+w} & = & e^z e^w, \\ (e^z)^{-1} & = & e^{-z}, \\ \overline{e^z} & = & e^{\overline{z}}, \\ (e^z)^n & = & e^{nz}, \\ e^{z+2k\pi i} & = & e^z. \end{array}$$

De exponentiële funktie is partieel differentieerbaar met Jacobi matrix

$$M(z) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$$

De in deze Jacobi matrix voorkomende partiële afgeleiden zijn continue funkties van (x, y); met Lemma 1.4 concluderen we dat $z \mapsto e^z$ overal differentieerbaar is.

Uit de Jacobi matrix lezen we tevens direct af dat e^z voldoet aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen. Bovendien is

$$M(z)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = e^z(u + vi).$$

Uit Stelling 1.9 volgt nu dat e^z complex differentieerbaar is en dat

$$\frac{\mathrm{d}e^z}{\mathrm{d}z} = e^z. \tag{6}$$

Merk op dat dit voor $z = 0$ precies betekent dat

$$\lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1.$$

De exponentiële funktie wordt volledig gekarakteriseerd door de vergelijking (6):

Stelling 1.10 *Zij $f : \mathrm{C} \to \mathrm{C}$ een complex differentieerbare funktie met $f(0) = 1$ en zo dat $f'(z) = f(z)$ voor alle $z \in \mathrm{C}$. Dan geldt dat $f(z) = e^z$ voor alle $z \in \mathrm{C}$.*

Bewijs: Beschouw de funktie $g : \mathrm{C} \to \mathrm{C}$ gedefinieerd door

$$g(z) = \frac{f(z)}{e^z}.$$

Met de quotiëntregel volgt dan dat g complex differentieerbaar is op C terwijl $g'(z) = e^{-z}\left[f'(z) - f(z)\right] = 0$ voor alle $z \in \mathrm{C}$. Uit Stelling 1.7 volgt nu dat $g(z) = g(0) = f(0) = 1$ voor alle $z \in \mathrm{C}$. □

De Cauchy-Riemann vergelijkingen hebben de volgende meetkundige betekenis voor de exponentiële funktie $\exp : z \mapsto e^z, \mathrm{C} \to \mathrm{C}$. Fixeer $a, b \in \mathrm{R}$. De lijnen $m_a : x = a$ en $n_b : y = b$ snijden elkaar loodrecht en hetzelfde zou dus voor hun beelden onder exp moeten gelden. Dit is inderdaad het geval: $\exp(m_a)$ is de cirkel $C(e^a)$ met middelpunt 0 en straal e^a, en $\exp(n_b) = h(b)$, de halflijn vanuit de oorsprong die een hoek b met de $x-$as maakt (zie Figuur 3).

Door te bestuderen hoe de exponentiële funktie de lijn m_a op de cirkel $C(e^a)$ en de lijn n_b op de halflijn $h(b)$ afbeeldt verkrijgt men een goed inzicht in zijn gedrag. De lijn m_a wordt door exp als het ware om de cirkel $C(e^a)$ gewikkeld. Laten we y het interval $]2k\pi - \pi\ ,\ 2k\pi + \pi]$ eenmaal doorlopen, dan doorloopt het beeldpunt $\exp(a + iy)$ de cirkel $C(e^a)$ precies eenmaal in positieve richting (dwz. tegen de wijzers van de klok in). De lijn n_b wordt door exp bijectief op de halflijn $h(b)$ afgebeeld.

Voorbeeld.

Tenslotte beschouwen we nogmaals de betekenis van de Cauchy-Riemann vergelijkingen in het geval van de $F(z) = z^2$ op C. Ditmaal gebruiken we poolcoördinaten $z = re^{i\theta}$. Uit $F(re^{i\theta}) = r^2e^{2i\theta}$ volgt dat een halflijn $h(\theta_0) : \theta = \theta_0$ afgebeeld wordt op de halflijn $h(2\theta_0)$, terwijl een cirkel $C(r_0) : r = r_0$ afgebeeld wordt op de cirkel $C(r_0^2)$. Ook hier zien we dat F hoeken behoudt.

Figuur 3:

1.5 De logarithmische funktie

Zoals vroeger zullen we de logarithmische funktie definiëren als inverse van de exponentiële funktie $\exp : C \to C$, $z \mapsto e^z$. Het voornaamste probleem hierbij is dat de exponentiële funktie niet injectief is. Immers, voor alle $z \in C$ geldt dat $e^z = e^{z+2\pi i}$. In het bijzonder geldt dat $e^{2kpii} = 1$, voor elke $k \in Z$.

Uit $e^z = 0$ zou volgen $e^x = |e^z| = 0$ en dit is onmogelijk voor reële x. Er bestaat dus geen $z \in C$ met $f(z) = 0$. Hieruit volgt dat de exponentiële afbeelding ook niet surjectief is als afbeelding $C \to C$.

Fixeer $w \in C$, $w \neq 0$. Dan is $w = |w|e^{i\varphi}$, waarin $\varphi \in R$ op een veelvoud van 2π na eenduidig bepaald is. De φ met $-\pi < \varphi \leq \pi$ noemen we het argument van w en noteren we met $\arg w$. Het getal $z = \log |w| + i \arg w$ voldoet wegens het voorgaande aan $e^z = w$. Op grond hiervan definiëren we voor $w \in C \setminus \{0\}$:

$$\log w = \log |w| + i \arg w. \tag{7}$$

Het complexe getal $\log w$ is een speciale keuze uit de oplossingen van de vergelijking

$$e^z = w, \tag{8}$$

namelijk de oplossing $z = x + iy$ die voldoet aan $-\pi < y \leq \pi$.

We kunnen het bovenstaande ook als volgt samenvatten: Zij S de strip in C bestaande uit de punten z met $-\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi$. Dan is de afbeelding $\exp :\ z \mapsto e^z$ bijectief van S naar de deelverzameling $C \setminus \{0\}$ van C. We definiëren $\log : C \setminus \{0\} \to S$ als de inverse van deze afbeelding $\exp : S \to C \setminus \{0\}$.

Het inwendige van S is de verzameling V bestaande uit de punten $z \in \mathrm{C}$ met $|\mathrm{Im}\, z| < \pi$. We merken op dat exp de open verzameling V afbeeldt op de open deelverzameling $\mathrm{C} \setminus]-\infty, 0]$ van C, dat wil zeggen, het complexe vlak met daaruit weggelaten de negatieve reële as. Onderstaande algemene stelling garandeert nu dat de logarithmische funktie complex differentieerbaar op de open verzameling $W = \mathrm{C} \setminus]-\infty, 0]$ is.

Stelling 1.11 *Zij f een bijectieve afbeelding van een open deel V naar een open deel W van C. Als f complex differentieerbaar is in $\alpha \in V$ en $f'(\alpha) \neq 0$, dan is de inverse funktie f^{-1} complex differentieerbaar in $\beta = f(\alpha) \in W$ en er geldt dat*

$$(f^{-1})'(\beta) = \frac{1}{f'(\alpha)}.$$

Bewijs: Het bewijs dat de funktie f^{-1} differentieerbaar is in het punt $\beta = f(\alpha)$ geven we hier niet. Maar als we dit feit gebruiken, dan vinden we met behulp van de kettingregel, door differentiatie van $z = [f^{-1} \circ f](z)$ naar de variabele z dat:

$$1 = (f^{-1})'(\beta) f'(\alpha),$$

waaruit het gestelde volgt. □

Uit de tekst boven de stelling volgt dat de logarithmische funktie op $\mathrm{C} \setminus]-\infty, 0]$ gelijk is aan de inverse f^{-1} van de funktie $f : V \to \mathrm{C} \setminus]-\infty, 0]\, , z \mapsto e^z$ met $V = \{z \in \mathrm{C};\ |\mathrm{Im}\, z| < \pi\}$. Zij $\alpha \in V$, $\beta = e^\alpha$, dan zien we dat $(\log)'(\beta) = (e^\alpha)^{-1} = \beta^{-1}$. Hiermee hebben we aangetoond dat

$$\frac{d}{dz} \log z = \frac{1}{z}$$

voor alle $z \in \mathrm{C} \setminus]-\infty, 0]$.

We hebben gezien dat de logarithmische funktie complex differentieerbaar en dus continu is in elk punt van C dat buiten de negatieve reële halfrechte $]-\infty, 0]$ ligt. Maar hoe zit het nu met punten van die halfrechte? Om hierin inzicht te verkrijgen fixeren we een getal $r > 0$ en beschouwen we een variabel punt w op de cirkel met middelpunt 0 en straal r. Als we w van boven naar de halfrechte $]-\infty, 0]$ laten naderen, dan geldt $\arg w \uparrow \pi$, dus $\log w$ nadert naar $\log r + \pi i$. Als we w daarentegen van onderen naar die halfrechte laten naderen, dan geldt $\arg w \downarrow -\pi$, dus $\log w$ nadert naar $\log r - \pi i$. Men zegt wel dat de logarithmische funktie een sprongdiscontinuïteit langs de negatieve reële as heeft ter grootte van $2\pi i$.

Vaak is men geïnteresseerd in alle oplossingen van de vergelijking (8). Hiertoe merken we op dat voor een tweetal complexe getallen $z_1, z_2 \in \mathrm{C}$ geldt:

$$e^{z_1} = e^{z_2} \iff e^{z_1 - z_2} = 1 \iff z_1 - z_2 = 2k\pi i, \quad k \in \mathrm{Z}.$$

Als $w \neq 0$, dan is $z = \log w$ een oplossing van de vergelijking (8). Alle oplossingen van de vergelijking worden derhalve gegeven door:

$$z = \log w + 2k\pi i, \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Voorbeeld.

We beschouwen de vergelijking

$$e^z = -1 + i. \tag{9}$$

Er geldt

$$\log(-1+i) = \log|-1+i| + i\arg(-1+i) = \log(\sqrt{2}) + \frac{3\pi i}{4}.$$

De oplossingen van de vergelijking (9) worden derhalve gegeven door

$$z = \frac{1}{2}\log 2 + i(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi), \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

De funktie log gedefinieerd door (7) wordt ook wel de hoofdwaarde van de logarithme genoemd; er is een keuze gemaakt uit de mogelijke oplossingen van (8). In sommige situaties is het handig een andere keuze te maken; dit leidt tot een andere logarithmische funktie. Voor meer informatie hierover verwijzen we de lezer naar Hoofdstuk 10 van het dictaat.

Machtsfunkties

Als toepassing van het bovenstaande behandelen we nog de machtsfunkties. Zij $\alpha \in \mathbb{C}$. Dan definiëren we de funktie $z \mapsto z^\alpha$ op $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ door

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z}.$$

Ga na dat deze definitie voor $\alpha = n \in \mathbb{Z}$ overeenkomt met de gebruikelijke. Met behulp van de kettingregel zien we dat de funktie $z \mapsto z^\alpha$ complex differentieerbaar is op de open verzameling $\mathbb{C} \setminus\,]-\infty, 0]$; de complexe afgeleide wordt gegeven door

$$\frac{\mathrm{d}z^\alpha}{\mathrm{d}z} = \frac{\alpha}{z} e^{\alpha \log z} = \alpha z^{\alpha - 1}, \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus\,]-\infty, 0]).$$

Voor gehele waarden van α is de funktie voortzetbaar tot een differentieerbare funktie op $\mathbb{C} \setminus \{0\}$: de sprongdiscontinuïteit langs de negatieve reële as verdwijnt omdat $e^{n\pi i} = (-1)^n = e^{-n\pi i}$. Voor positieve gehele waarden van α is de funktie zelfs voortzetbaar tot een complex differentieerbare funktie op de gehele $\mathbb{C}$.

Wortels

De funktie $w \mapsto \sqrt{w}$ wordt op $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ gedefinieerd door

$$\sqrt{w} := w^{\frac{1}{2}} := e^{\frac{1}{2}\log w};$$

voorts definiëren we apart $\sqrt{0} := 0$. Overeenkomstig de eerder voor de logarithme gebruikte terminologie spreken we van de hoofdwaarde van de vierkantswortel. We merken op dat

$$\sqrt{w}^2 = [e^{\frac{1}{2}\log w}]^2 = e^{\log w} = w.$$

Voor een gegeven $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ is het getal $\sqrt{w}$ dus een oplossing van de vergelijking $z^2 = w$. Alle oplossingen van deze vergelijking worden gegeven door $z = \pm\sqrt{w}$.

In het vervolg beschouwen we algemener, voor een geheel getal $p \geq 2$ en een complex getal $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, de vergelijking

$$z^p = w. \tag{10}$$

Een speciale oplossing van de vergelijking wordt gegeven door de zogenaamde hoofdwaarde van de p-de machts wortel, namelijk

$$\sqrt[p]{w} := w^{\frac{1}{p}} := e^{\frac{1}{p}\log w}.$$

Inderdaad is

$$(\sqrt[p]{w})^p = [e^{\frac{1}{p}\log w}]^p = e^{\log w} = w.$$

Om alle oplossingen van de vergelijking (10) te vinden beschouwen we eerst het geval $w = 1$; de vergelijking wordt dan

$$z^p = 1. \tag{11}$$

Iedere oplossing van deze vergelijking voldoet aan $|z|^p = |z^p| = 1$, dus $|z| = 1$. De oplossingen liggen derhalve op de complexe eenheidscirkel, en zijn dus van de vorm $z = e^{i\varphi}$. Uit $z^p = 1$ volgt dat $e^{ip\varphi} = 1$, waaruit volgt dat $ip\varphi = 2k\pi i$ voor een $k \in \mathbb{Z}$, dus $\varphi = 2k\pi/p$. De oplossingen van (11) worden dus gegeven door

$$z = e^{\frac{2k\pi i}{p}} = [e^{\frac{2\pi i}{p}}]^k. \tag{12}$$

Door $k = 0, 1, \ldots, p-1$ te nemen verkrijgt men elke oplossing van (11) precies éénmaal. De getallen (12) heten de p-de eenheidswortels. Uit het bovenstaande blijkt dat het aantal p-de eenheidswortels precies p is; ze zijn op de complexe eenheidscirkel gelegen, en vormen de hoekpunten van een regelmatige p-hoek met middelpunt 0 in het complexe vlak (maak zelf een schets!).

We beschouwen nu algemeen de vergelijking (10) in het geval dat $w \neq 0$. Is $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ een tweetal oplossingen van deze vergelijking, dan geldt $z_1 \neq 0$; bovendien geldt:

$$\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^p = \frac{z_2^p}{z_1^p} = \frac{w}{w} = 1.$$

Derhalve is $z_2 = \zeta z_1$ met ζ een p-de eenheidswortel. Nu is $\sqrt[p]{w}$ een speciale oplossing van (10). Alle oplossingen worden dus gegeven door:

$$\zeta \sqrt[p]{w}$$

waarbij ζ de p-de eenheidswortels (12) doorloopt. De vergelijking (10) heeft dus precies p oplossingen die wederom de hoekpunten van een regelmatige p-hoek met middelpunt 0 vormen. Maak zelf een schets die de positie van deze p-hoek ten aanzien van w weergeeft!

1.6 Het oplossen van een tweedegraads vergelijking

De invoering van de complexe getallen maakte het mogelijk de vergelijking

$$z^2 = -1 \tag{13}$$

op te lossen. Immers, $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$, dus de oplossingen van (13) zijn $z = i$ en $z = -i$.

Algemener kunnen we elke complexe tweede graadsvergelijking in $\mathbb{C}$ oplossen. Een dergelijke vergelijking heeft de vorm

$$az^2 + bz + c = 0; \tag{14}$$

hierin zijn $a, b, c \in \mathbb{C}$ complexe constanten met $a \neq 0$ (als $a = 0$ dan is de graad van de vergelijking kleiner dan 2). Kwadraatafsplitsing levert:

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a(z^2 + \frac{b}{a}z) + c \\ &= a(z + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c. \end{aligned}$$

De vergelijking (14) is dus gelijkwaardig met

$$(z + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Haar oplossingen worden derhalve gegeven door

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Deze formule voor de oplossingen is dezelfde die u gewend bent; in de huidige situatie is $\sqrt{\cdot}$ de (eventueel complexe) hoofdwaarde van de wortel.

Voorbeeld.

We beschouwen de vergelijking

$$z^2 - 4iz - 1 = 0. \tag{15}$$

Door kwadraatafsplitsing krijgen we de gelijkwaardige vergelijking

$$(z - 2i)^2 + 4 - 1 = 0.$$

De oplossingen hiervan worden gegeven door

$$z = 2i \pm \sqrt{-3} = (2 \pm \sqrt{3})i.$$

Uiteraard had men deze oplossingen ook kunnen vinden door gebruikmaking van de bovenstaande abc-formule.

Opmerking. Later zullen we aantonen dat iedere n-de graads vergelijking van de vorm $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ ($a_k \in \mathrm{C}$ voor $0 \leq k \leq n$, $a_n \neq 0$) minstens één oplossing $z \in \mathrm{C}$ bezit. Dit resultaat staat bekend als de 'Hoofdstelling van de algebra'. Voor $n \leq 4$ bestaan er formules die zo'n oplossing uitdrukken in de coëfficiënten a_k door middel van (eventueel hogere orde) wortels. Men kan bewijzen dat zo'n formule niet bestaat voor $n \geq 5$ (voor dit resultaat verwijzen we naar een college Galois theorie).

1.7 Goniometrische en hyperbolische funkties

Uit de formules

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \quad \text{en} \quad e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$$

leiden we af dat voor reële φ geldt:

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \quad \text{en} \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Dit motiveert ons tot de volgende definitie van de complexe goniometrische funkties cos en sin . Voor $z \in \mathrm{C}$ definiëren we:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{en} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Met de rekenregels voor complex differentiëren leidt men gemakkelijk af dat

$$\frac{d}{dz}\cos z = -\sin z \quad \text{en} \quad \frac{d}{dz}\sin z = \cos z.$$

De complexe hyperbolische funkties worden gedefinieerd door:

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \text{en} \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Er geldt:
$$\frac{d}{dz}\cosh z = \sinh z \quad \text{en} \quad \frac{d}{dz}\sinh z = \cosh z.$$
Merk op dat de goniometrische en hyperbolische cosinus en sinus verbonden zijn door de formules:
$$\cos z = \cosh(iz) \quad \text{en} \quad \sin z = -i\sinh(iz).$$

Voorbeelden.

(1) Merk op dat niet voor alle $z \in \mathrm{C}$ geldt $|\cos z| \leq 1$. Zo is:
$$\cos(i) = \cosh(-1) \geq \frac{1}{2}e > 1.$$

(2) We bepalen alle $w \in \mathrm{C}$ met
$$\sin w = 2. \tag{16}$$
Daartoe schrijven we $z = e^{iw}$. De vergelijking (16) is dan gelijkwaardig met
$$\frac{z - z^{-1}}{2i} = 2,$$
dus met $z^2 - 1 = 4iz$, hetgeen gelijkwaardig is met de vergelijking (15). De oplossingen van de laatste vergelijking zijn $z = (2 \pm \sqrt{3})i$. Als oplossingen van (16) vinden we nu
$$w = i^{-1}(\log[(2 \pm \sqrt{3})i] + 2k\pi i) = -i\log(2 \pm \sqrt{3}) + \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad (k \in \mathrm{Z}).$$

1.8 Harmonische funkties

Zonder bewijs vermelden we hier dat de volgende stelling geldt.

Stelling 1.12 *Iedere complex differentieerbare funktie $f : V \to \mathrm{C}$ is continu differentieerbaar (dwz. alle eerste orde partiële afgeleiden zijn continu).*

N.B. We zullen later zien dat hieruit weer volgt dat alle *hogere* orde partiële afgeleiden bestaan. Een funktie met deze laatste eigenschap heet willekeurig vaak differentieerbaar, of ook wel C^∞.

Vooruitlopend op de voornoemde resultaten merken we hier op dat uit de Cauchy-Riemann vergelijking
$$if_x = f_y$$
volgt dat
$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}[if_x] = if_{xy} = if_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}[if_y] = -f_{xx}.$$

Hierbij hebben we gebruik gemaakt van de notaties

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_{yx} = [f_y]_x,$$

enzovoorts.

We concluderen dat f voldoet aan de Laplace vergelijking $\Delta f := f_{xx} + f_{yy} = 0$. Een funktie met deze eigenschap heet *harmonisch.* Door reëel en imaginair deel te nemen in de Laplace vergelijking zien we dat het reële deel $u = \operatorname{Re} f$ en het imaginaire deel $v = \operatorname{Im} f$ van f reëelwaardige harmonische funkties zijn. We noemen u en v geconjugeerde harmonische funkties. Deze conjugatie kan als volgt meetkundig geïnterpreteerd worden. We berekenen het inprodukt van de gradiënt vectorvelden van u en v. Er geldt:

$$\nabla u \cdot \nabla v = u_x v_x + u_y v_y = 0$$

op grond van de Cauchy-Riemann vergelijkingen (4). Dit betekent dat ∇u en ∇v overal loodrecht op elkaar staan, en derhalve ook dat de niveaukrommen van u en v elkaar overal loodrecht snijden.

Bij een gegeven harmonische funktie u kan men (in ieder geval locaal rond een gegeven punt (x_0, y_0)) een geconjugeerde harmonische funktie v vinden met behulp van de Cauchy-Riemann vergelijkingen. Uit $v_x = -u_y$ vindt men v door integratie:

$$v(x, y) = C(y) - \int_{x_0}^{x} u_y(t, y)\, dt.$$

Hierin is C een nog onbekende differentieerbare funktie. Uit de vergelijking $v_y = u_x$ leiden we af dat:

$$u_x(x, y) = C'(y) - \int_{x_0}^{x} u_{yy}(t, y)\, dt.$$

Hieruit vinden we $C(y)$ door integratie en daarmee v. Men kan laten zien dat de zo gevonden funktie $f = u + iv$ complex differentieerbaar is.

Voorbeeld.

We beschouwen de funktie $u : \mathrm{C} \to \mathrm{R}$ gegeven door $u(z) = e^x \sin y$. Men gaat gemakkelijk na $u_{xx} = u = -u_{yy}$; de funktie u is derhalve harmonisch. De geconjugeerd harmonische funktie voldoet aan: $v_x = -u_y$, dus

$$v_x = -e^x \cos y.$$

Door integratie naar de variabele x (waarbij y als constante beschouwd wordt) leiden we hieruit af dat

$$v = -e^x \cos y + C(y),$$

met een van y afhankelijke integratieconstante $C(y)$. Uit $v_y = u_x$ volgt nu dat $C'(y) = 0$, dus de funktie C is constant. De bijbehorende complex differentieerbare funktie f is

$$f(z) = u + iv = e^x(\sin y - i \cos y) + iC = -ie^z + C.$$

2 Reeksen

2.1 Partiële sommen en convergentie

Laat a_n $(n \geq 0)$ een rij complexe getallen zijn. De uitdrukking $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$, ook wel geschreven als $\sum_{n\geq 0} a_n$ of, nog korter, als $\sum a_n$, noemen we een *reeks*; $A_k = a_0 + a_1 + \ldots + a_k$ heet de $k-$*de partiële som* van de reeks.

Definitie 2.1 De reeks $\sum a_n$ heet *convergent* als $\lim A_k$ bestaat. Deze limiet noemen we dan de *som* van de reeks en we noteren hem als

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n &:= \lim_{k\to\infty} A_k \\ &= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} a_n. \end{aligned} \tag{17}$$

Een niet convergente reeks heet *divergent*.

Opmerking. In het bovenstaande hebben we het verschil tussen een reeks en zijn som tot uitdrukking gebracht in de notaties. Een reeks wordt genoteerd met $\sum_{n\geq 0} a_n$, terwijl bij convergentie zijn som genoteerd wordt met $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Voorbeelden.

(1) Beschouw de meetkundige reeks $\sum_{n\geq 0} 2^{-n}$ (hierin is $a_n = 2^{-n}$). Men ziet gemakkelijk in dat de partiële sommen worden gegeven door $A_k = 2 - 2^{-k}$. Er geldt derhalve dat $\lim_{k\to\infty} A_k = 2$, en dus is de reeks convergent met som

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = \lim_{k\to\infty} A_k = 2.$$

(2) Beschouw nu algemener de meetkundige reeks $\sum_{n\geq 0} z^n$ met z een vast complex getal. De partiële som $s_k(z)$ van deze reeks wordt gegeven door:

$$s_k(z) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^k;$$

derhalve is

$$zs_k(z) = z + \cdots + z^{k+1}.$$

Aftrekken van de twee bovenstaande gelijkheden levert: $(1-z)s_k(z) = 1 - z^{k+1}$. Voor de partiële som van de meetkundige reeks vinden we zo, voor $z \neq 1$, dat

$$s_k(z) = \frac{1 - z^{k+1}}{1 - z}.$$

Uiteraard is $s_k(z) = k+1$. Hieraan zien we dat de meetkundige reeks convergeert dan en slechts dan als $\lim_{k\to\infty} z^{k+1}$ bestaat. Volgens ... is dat het geval dan en slechts dan als $|z| < 1$. De som van de meetkundige reeks wordt in dat geval gegeven door:

$$\lim_{k\to\infty} s_k(z) = \frac{1 - \lim_{k\to\infty} z^{k+1}}{1-z} = \frac{1}{1-z}.$$

Er geldt dus:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \qquad (|z| < 1).$$

Voor $|z| \geq 1$ is de meetkundige reeks divergent.

(3) Als laatste voorbeeld beschouwen we de reeks $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$. Deze heeft als partiële som:

$$\begin{aligned} A_k &= \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + ... + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{k+1}. \end{aligned}$$

We zien hieraan dat $\lim_{k\to\infty} A_k = 1$; de reeks is derhalve convergent, en

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

In de bovenstaande voorbeelden zien we dat de termen van de reeksen naar nul gaan. Het volgende algemene resultaat geldt:

Lemma 2.2 *Als $\sum a_n$ convergent is (met som A), dan is $\lim a_n = 0$.*

Bewijs: We merken op dat

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (A_n - A_{n-1}) = A - A = 0.$$

□

We waarschuwen er hier voor dat *het omgekeerde beslist niet het geval hoeft te zijn.* Als voorbeeld beschouwen we de *harmonische* reeks $\sum_{n\geq 1} n^{-1}$, dus $a_n = n^{-1}$. Uit

$$A_{2n} - A_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} \geq n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

volgt, met $p = 2^n$, dat:

$$A_p = A_1 + (A_2 - A_1) + (A_4 - A_2) + ... + (A_p - A_{\frac{1}{2}p}) > \frac{1}{2}n$$

en we zien dat $\lim A_n$ niet bestaat .

We beschouwen nu een tweetal reeksen $\sum a_n$ en $\sum b_n$. In het vervolg zullen we ook wel zeggen: *op den duur geldt* $a_n = b_n$ als er een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zo dat $a_n = b_n$ voor alle $n \geq N$. Is dat laatste het geval dan geldt voor alle $k \geq N$ dat $A_k - A_N = B_k - B_N$. Hieraan zien we dat $\lim_{k\to\infty} A_k$ bestaat dan en slechts als $\lim_{k\to\infty} B_k$ bestaat. Samenvattend:

Stel dat op den duur geldt dat $a_n = b_n$. Dan convergeert de reeks $\sum a_n$ dan en slechts dan als $\sum b_n$ convergeert.

In het bijzonder zien we dat een reeks $\sum_{n\geq 0} a_n$ convergent is dan en slechts dan als de reeks $\sum_{n\geq N} a_n$ convergent is ($N \geq 0$).

Uit de definitie van convergentie van een reeks leidt men op eenvoudige wijze de volgende rekenregel af:

Lemma 2.3 *Zijn $\sum a_n$ en $\sum b_n$ convergent, en $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, dan is $\sum(\lambda a_n + \mu b_n)$ convergent, terwijl:*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) + \mu\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{C}).$$

In het voorbeeld onder Definitie 2.1 zagen we in dat de reeks $\sum 2^{-n}$ convergeert door eerst de partiële som A_k te berekenen. Bij andere reeksen is dit veelal onmogelijk. Toch zouden we ook dan graag kunnen besluiten of de reeks al dan niet convergeert. We lichten dit toe aan de hand van de reeks $\sum_{n\geq 1} b_n$ met

$$b_n = \frac{1}{n2^n}.$$

Omdat $b_n \leq 2^{-n}$, geldt voor de partiële sommen: $B_k \leq 1$. Maar omdat de termen van de reeks positief zijn, geldt ook dat $B_k \leq B_{k+1}$ voor alle $k \geq 1$ (een rij B_k met deze eigenschap heet *monotoon stijgend*). Het is nu aannemelijk dat de reeks convergeert met som $B \in [0, 1]$: immers de B_k kunnen 'niet ontsnappen'. Het is mogelijk de reële getallen op een zodanige wijze in te voeren dat deze uitspraak *bewezen* kan worden. Wij laten dat hier achterwege maar leggen de intuïtie dat $\mathbb{R}$ 'geen gaten' heeft vast in een axioma.

Axioma 2.4 *Zij B_k een monotoon stijgende rij reële getallen die bovendien naar boven begrensd is, dwz. er bestaat een $M > 0$ zo dat $B_k \leq M$ voor alle k. Dan is er een reëel getal B met $B = \lim B_k$.*

Merk op dat we hierboven uit dit axioma in feite het volgende resultaat afgeleid hebben.

Gevolg 2.5 *Zij $\sum b_n$ een reeks met reële niet-negatieve termen. Als de rij B_k van partiële sommen naar boven begrensd is door $M > 0$, dan convergeert de reeks met som $B \leq M$.*

Voorbeeld.

We beschouwen de reeks $\sum_{n\geq 1} b_n$ met $b_n = n^{-2}$. Voor elke $n \geq 2$ geldt dat $n^2 \geq (n-1)n$, dus $n^{-2} \leq [(n-1)n]^{-1}$. Voor de partiële sommen van de reeks geldt dus

$$B_k = b_1 + \cdots + b_k \leq 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \cdots \frac{1}{(k-1)k} \leq 2$$

(zie voor de laatste ongelijkheid het derde voorbeeld onder Definitie 2.1). Met behulp van Gevolg 2.5 concluderen we dat de reeks $\sum_{n\geq 1} b_n$ convergeert met som $B \leq 2$.

Voorbeeld.

Hoewel u zich dit wellicht nooit expliciet heeft gerealiseerd, heeft u het reeksbegrip en het bovenstaande axioma in het verleden in feite al vele malen gebruikt in de vorm van oneindig voortlopende decimale ontwikkelingen. We lichten een en ander toe aan de hand van $\sqrt{2}$.

We staan eerst nog eens stil bij de definitie van het getal $\sqrt{2}$. Die luidt: $\sqrt{2}$ is het reële getal $x > 0$ dat voldoet aan $x^2 = 2$. Maar dan veronderstellen we stilzwijgend dat de vergelijking $x^2 = 2$ een oplossing $x > 0$ heeft. Dit laatste kunnen we als volgt inzien. Er is precies één natuurlijk getal c_0 zo dat $(c_0)^2 \leq 2 < (c_0+1)^2$, namelijk $c_0 = 1$. Voorts is er precies één natuurlijk getal $0 \leq c_1 \leq 9$ zo dat

$$(c_0 + c_1 \cdot 10^{-1})^2 \leq 2 < (c_0 + c_1 \cdot 10^{-1} \ + 10^{-1})^2.$$

Door uitproberen kunnen we c_1 vinden: $c_1 = 4$. Zo voortgaande vinden we een reeks van getallen $c_2,\ c_3,\ \ldots \in \{0, \ldots 9\}$ die volledig bepaald wordt door de eigenschap dat

$$(\sum_{n=0}^{k} c_n \cdot 10^{-n})^2 \leq 2 < (\sum_{n=0}^{k} c_n \cdot 10^{-n} \ + 10^{-k})^2 \tag{18}$$

voor alle $k \geq 2$. De termen van de reeks $\sum c_n \cdot 10^{-n}$ zijn positief, terwijl de partiële sommen te schatten zijn door

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{k} c_n \cdot 10^{-n} &\leq c_0 + 9\sum_{n=1}^{k} 10^{-n} \\ &= 2 - 10^{-k} \leq 2. \end{aligned}$$

Met behulp van Gevolg 2.5 concluderen we nu dat de reeks $\sum c_n \cdot 10^{-n}$ convergeert. Andersgezegd: de decimale ontwikkeling

$$c_0, c_1c_2c_3\ldots$$

definieert een reëel getal $x > 0$. Uit de ongelijkheid (18) volgt tenslotte door limietovergang (voor $k \to \infty$) dat $x^2 = 2$.

2.2 Absolute convergentie

Gevolg 2.5 is niet toepasbaar op reeksen met zowel negatieve als positieve termen, en ook niet op complexe reeksen. Voor het convergentieonderzoek van dergelijke reeksen zal het volgende resultaat van belang blijken te zijn.

Stelling 2.6 *Laat een rij complexe getallen A_n gegeven zijn. De rij A_n convergeert (dwz. $\lim A_n$ bestaat) dan en slechts dan als de rij voldoet aan het volgende* **Cauchy criterium**:

Voor iedere $\epsilon > 0$ bestaat er een getal N zo dat $|A_q - A_p| < \epsilon$ voor alle p en q met $p, q \geq N$.

Bewijs: (Voor de liefhebber.) Veronderstel eerst dat de rij A_n convergeert met limiet A. Dan bestaat er voor iedere $\epsilon > 0$ een getal N zo dat voor $k \geq N$ geldt: $|A_k - A| < \frac{1}{2}\epsilon$. Voor alle $p, q \geq N$ geldt dan dat

$$|A_p - A_q| \leq |A_p - A| + |A - A_q| < \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon,$$

en we zien dat de rij voldoet aan het Cauchy criterium.

We bewijzen het omgekeerde eerst voor reële rijen. Veronderstel dat A_n een reële rij is die voldoet aan het bovenstaande Cauchy criterium. Het voornaamste probleem is een kandidaat te vinden voor de limiet van de rij. We doen dit door gebruik te maken van Axioma 2.4. Eerst kiezen we N_0 zo dat voor alle $p, q \geq N_0$ geldt dat $|A_p - A_q| < \frac{1}{2}$. In het bijzonder geldt dan dat $|A_{N_0} - A_q| < \frac{1}{2}$ voor alle $q \geq N_0$. Gevolg: *op den duur* ligt elke A_q in het interval $I_0 := [A_{N_0} - \frac{1}{2}, A_{N_0} + \frac{1}{2}]$ met lengte 1. We schrijven x_0 voor het beginpunt van dit interval, en y_0 voor het eindpunt. Verdeel het interval in drie gelijke stukken $I_0^1 = [x_0, x_0 + \frac{1}{3}], I_0^2 = [x_0 + \frac{1}{3}, x_0 + \frac{2}{3}]$ en $I_0^3 = [x_0 + \frac{2}{3}, y_0]$. Stel dat er voor iedere $N \geq 1$ getallen $p, q \geq N$ te vinden zouden zijn zo dat $A_p \in I_0^1$ en $A_q \in I_0^3$. Dan zou gelden $A_q - A_p \geq \frac{1}{3}$, hetgeen in strijd is met het Cauchy criterium. Daarom geldt ofwel dat op den duur geen der A_p in I_0^1 ligt, ofwel dat op den duur geen der A_p in I_0^3 ligt. In het eerste geval definiëren we een nieuw interval I_1 door $I_1 := I_0^2 \cup I_0^3$; in het tweede geval definiëren we $I_1 := I_0^1 \cup I_0^2$. Het interval I_1 heeft lengte $\frac{2}{3}$, is bevat in I_0, en heeft de eigenschap dat op den duur (dwz voor q voldoende groot) elke A_q erin bevat is. Door het interval I_1 in drie gelijke stukken te verdelen en bovenstaande redenering nogmaals toe te passen, vinden we een interval I_2 met lengte $(\frac{2}{3})^2$ dat bevat is in I_1 en met de eigenschap dat op den duur iedere A_q erin bevat is. Zo voortgaande vinden we een keten van intervallen $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots$ waarin het interval I_k lengte $(\frac{2}{3})^k$ heeft en de eigenschap dat op den duur iedere A_q er in komt te liggen. Zij x_k het linker eindpunt van het interval I_k. Dan is x_n een monotoon stijgende rij die naar boven begrensd is en derhalve convergeert (zie Axioma 2.4). Noem zijn limiet x. We gaan tenslotte aantonen dat x ook de limiet van de rij A_n is. Zij $\epsilon > 0$. Dan is er een N_1 zo dat voor alle $n \geq N_1$ geldt: $|x_n - x| < \frac{1}{2}\epsilon$. Kies $k > N_1$ zo dat $(\frac{2}{3})^k < \frac{1}{2}\epsilon$. Dan is er een $N_2 \geq N_1$ zo dat voor alle $n > N_2$ geldt dat $A_n \in I_k$, dus $|A_n - x_k| < (\frac{2}{3})^k < \frac{1}{2}\epsilon$. Voor $n > N_2$ geldt derhalve dat $|A_n - A| \leq |A_n - x_k| + |x_k - x| < \epsilon$. Hiermee is het bewijs voltooid voor reële rijen.

Veronderstel tenslotte dat A_n een complexe rij is die voldoet aan het Cauchy criterium, en beschouw de rij $B_n := \operatorname{Re} A_n$. Dan geldt voor alle p, q dat $|B_p - B_q| = |\operatorname{Re}(A_p - A_q)| \leq |A_p - A_q|$. De reële rij B_n voldoet dus aan het Cauchy criterium en convergeert derhalve op grond van het bovenstaande. Noem de limiet B. Op dezelfde wijze ziet men in dat de rij $C_n := \operatorname{Im} A_n$ convergeert met limiet C. Uit de rekenregels voor limieten concluderen we nu dat $\lim A_n = \lim(B_n + iC_n) = B + iC$. $\square$

Het belang van het Cauchy criterium komt tot uiting in de volgende stelling die we later veelvuldig zullen toepassen. Eerst geven we een definitie.

Definitie 2.7 Een (complexe) reeks $\sum a_n$ heet *absoluut convergent* als de reeks $\sum |a_n|$ convergent is.

Stelling 2.8 *Iedere absoluut convergente reeks is convergent. Als $\sum a_n$ absoluut convergeert, dan geldt:*

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|.$$

Bewijs: Beschouw een (complexe) reeks $\sum a_n$ en definieer $b_n = |a_n|$. Zij A_k de $k-$de partiële som van $\sum a_n$, en B_k die van $\sum b_n$. Dan geldt voor alle $q \geq p$ dat

$$\begin{aligned} |A_q - A_p| &= |a_{p+1} + a_{p+2} + \ldots + a_q| \\ &\leq b_{p+1} + b_{p+2} + \ldots + b_q \\ &= |B_q - B_p|\,. \end{aligned} \tag{19}$$

Als $\sum a_n$ absoluut convergent is, dan bestaat $\lim B_k$ per definitie. De rij B_k voldoet dan aan het Cauchy criterium. Uit de schatting (19) volgt nu dat ook de rij A_k aan het Cauchy criterium voldoet, dus convergeert.

Voor alle $m \geq k$ geldt dat $B_k \leq B_m$. Limiet overgang voor $m \to \infty$ geeft dat $B_k \leq \lim B_m$. Door toepassing van de driehoeksongelijkheid voor eindige sommen volgt er dat

$$\left|\sum_{n=0}^{k} a_n\right| \leq B_k \leq \lim_{m\to\infty} B_m = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|.$$

Het bewijs wordt voltooid door de limiet voor $k \to \infty$ te nemen. $\square$

Niet iedere convergente reeks is absoluut convergent. Zo is de *alternerende* reeks

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

niet absoluut convergent (vgl. het voorbeeld boven Lemma 2.3), maar wel convergent. Dit laatste ziet men als volgt in. Zij A_k weer de $k-$de partiële som. Dan is de rij A_{2k} monotoon stijgend, dwz. $A_{2k} \leq A_{2k+2}$, terwijl de rij A_{2k-1} monotoon daalt, dwz. $A_{2k+1} \leq A_{2k-1}$. Voorts geldt voor alle k dat $A_{2k} \leq 1$ en dat $A_{2k-1} \geq \frac{1}{2}$. Met behulp van Axioma 2.4 zien we nu dat $L_1 = \lim A_{2k}$ en $L_2 = \lim A_{2k-1}$ bestaan. Echter, omdat $A_{2k} - A_{2k-1} = -\frac{1}{2k}$, volgt door limietovergang dat $L_1 = L_2$. Derhalve is $\lim A_k = L_1 = L_2$.

Onder een *omschikking* van een reeks $\sum a_n$ verstaan we een reeks $\sum b_n$ waarvan de termen gegeven worden door $b_n = a_{\varphi(n)}$ met φ een bijectieve afbeelding $\mathrm{N} \to \mathrm{N}$.

Stelling 2.9 *Zij $\sum a_n$ een absoluut convergente complexe reeks. Dan is iedere omschikking $\sum b_n$ van $\sum a_n$ absoluut convergent, terwijl*

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Bewijs: (Voor de liefhebber.) Zij φ een bijectieve afbeelding van N naar N zo dat $b_n = a_{\varphi(n)}$. Voor iedere $N \in \mathrm{N}$ kunnen we een $M \in \mathrm{N}$ kiezen zo dat $\{\varphi(0), \ldots, \varphi(N)\} \subset \{0, \ldots, M\}$. Hieruit volgt dat

$$\sum_{n=0}^{N} |b_n| \leq \sum_{m=0}^{M} |a_m| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|.$$

Wegens Gevolg 2.5 volgt hieruit de absolute convergentie van de reeks $\sum b_n$. Zij A de som van de reeks $\sum a_n$ en zij $\epsilon > 0$ willekeurig. Dan is er een $N \in \mathrm{N}$ zo dat

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| < \frac{1}{2}\epsilon.$$

Kies nu een $M \in \mathrm{N}$ zo dat $\{\varphi(0), \ldots, \varphi(M)\} \supset \{0, \ldots N\}$. Dan geldt voor alle $k \geq M$ dat

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{m=0}^{k} b_m - A\right| &= \left|\sum_{m=0}^{k} a_{\varphi(m)} - A\right| \\
&\leq \left|\sum_{n=0}^{N} a_n - A\right| + \left|\sum_{\substack{m=0 \\ \varphi(m)>N}}^{k} a_{\varphi(m)}\right| \\
&\leq \left|\sum_{n=0}^{N} a_n - A\right| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \\
&< \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon.
\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat de omgeschikte reeks $\sum b_n$ som A heeft. □

Zonder bewijs vermelden we hier nog dat tevens het volgende geldt: is $\sum a_n$ een reële reeks die convergent maar niet absoluut convergent is, dan kan men bij ieder reëel getal A een omschikking van de reeks $\sum a_n$ vinden zo dat de nieuwe reeks A als som heeft. Zelfs kan men iedere niet-absoluut convergente complexe reeks tot een divergente reeks omschikken.

2.3 Criteria voor convergentie

De volgende stelling wordt in de praktijk vaak toegepast om de absolute convergentie van een reeks vast te stellen.

Stelling 2.10 (Majorantie criterium). *Zij $\sum a_n$ een complexe reeks en $\sum t_n$ een reeks met niet-negatieve reële termen (dwz. $t_n \geq 0$). Veronderstel dat er een $c > 0$ bestaat zo dat*

$$|a_n| \leq ct_n$$

voor alle n. Dan geldt

$$\sum t_n \text{ convergent } \Rightarrow \sum a_n \text{ convergent }.$$

Opmerking. Merk op dat door toepassing van de bovenstaande stelling op de reeks met term $|a_n|$ volgt dat de reeks $\sum a_n$ *absoluut* convergent is. Dit zal ook uit het onderstaande bewijs blijken.

Bewijs: Zij T_k de $k-$de partiële som van de reeks $\sum t_n$. Dan geldt dat $T_k \leq T_n$ voor alle $n \geq k$. Door de limiet voor $n \to \infty$ te nemen volgt dat $T_k \leq T = \lim_{n\to\infty} T_n$ voor alle k. Schrijf $s_n = |a_n|$. Dan geldt voor alle k dat $S_k \leq cT_k \leq cT$. Derhalve is S_k een naar boven begrensde monotoon stijgende rij en dus convergent met limiet $S \leq cT$ (gebruik Axioma 2.4). Maw: de reeks $\sum a_n$ convergeert absoluut en door toepassing van Stelling 2.8 concluderen we uiteindelijk de convergentie. $\square$

Opmerking. In het vervolg zal het handig zijn om over de volgende notatie te beschikken. Laat a_n en b_n een tweetal complexe rijen zijn. Met

$$a_n = \mathcal{O}(b_n) \quad (n \to \infty)$$

(spreek uit: a_n is grote 'oh' van b_n) bedoelen we dan dat er een $C > 0$ bestaat zo dat op den duur geldt dat

$$|a_n| \leq C|b_n|.$$

Stelling 2.10 laat zich nu herformuleren als:

Als $\sum t_n$ een convergente reeks van niet-negatieve reële termen is dan volgt uit $a_n = \mathcal{O}(t_n)$ dat ook de reeks $\sum a_n$ convergeert.

Het onderstaande resultaat is een gevolg van Stelling 2.10 dat in de praktijk zo vaak voorkomt dat we het apart vermelden.

Gevolg 2.11 (Limiet criterium). *Zij $\sum t_n$ een convergente reeks van reële niet-negatieve termen. Als*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{t_n}$$

bestaat, dan is $\sum a_n$ absoluut convergent.

Bewijs: Zij L de waarde van bovenstaande limiet. Uit de definitie van limiet volgt dat op den duur geldt:

$$\frac{|a_n|}{t_n} \leq L + 1$$

Hieruit volgt $a_n = \mathcal{O}(t_n)$. $\square$

Voorbeelden.

(1) De reeks $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ heeft als partiële som:

$$\begin{aligned} A_k &= \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{k+1}, \end{aligned}$$

en is dus convergent met som 1. Volgens Gevolg 2.11 is nu ook $\sum n^{-2}$ convergent; immers:

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n(n+1)}}\right] = 1.$$

(2) Beschouw $\sum \frac{1}{z^2-n^2}$, met $z \in \mathrm{C}, z \neq 0, 1, 2, \ldots$. Uit

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{z^2 - n^2}\right| n^2 = 1,$$

Gevolg 2.11 en de convergentie van $\sum n^{-2}$ volgt dat de gegeven reeks convergent is.

We besluiten dit hoofdstuk met twee convergentiecriteria die berusten op majorantie met een meetkundige reeks.

Stelling 2.12 (Wortelcriterium).

Als $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, *dan is* $\sum a_n$ *absoluut convergent.*
Als $\lim \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, *dan is* $\sum a_n$ *divergent.*

Opmerking. In de bovenstaande condities wordt in het bijzonder geëist dat de limieten bestaan.

Bewijs: Schrijf

$$L = \lim \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Als $L < 1$, dan is er een getal R met $L < R < 1$. Hierbij bestaat een natuurlijk getal N zo dat voor $n > N$ geldt dat:

$$\sqrt[n]{|a_n|} < R,$$

en dus geldt op den duur dat $|a_n| < R^n$. In Hoofdstuk 1 zagen we dat de meetkundige reeks $\sum R^n$ convergeert (immers $0 < R < 1$) en met behulp van het majorantiecriterium (Stelling 2.10) concluderen we nu dat $\sum a_n$ absoluut convergeert.

Als $L > 1$, dan geldt op den duur dat $|a_n| > 1$, en dus wegens de opmerking boven Lemma 2.3 dat de reeks $\sum a_n$ divergeert. □

Stelling 2.13 (Quotiëntcriterium).

Als $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, *dan is* $\sum a_n$ *absoluut convergent.*
Als $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, *dan is* $\sum a_n$ *divergent.*

Bewijs: Schrijf

$$L = \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Stel eerst $L < 1$ dan is er een getal R met $L < R < 1$. Er is dus een N zo dat voor alle $n \geq N$ geldt dat

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < R,$$

en dus $|a_{n+1}| < R|a_n|$. Met inductie zien we nu dat: $|a_n| < R^n R^{-N}|a_N|$ (voor $n > N$), dus $|a_n| = \mathcal{O}(R^n)$. De meetkundige reeks $\sum R^n$ convergeert (immers $0 < R < 1$), en met behulp van het majorantiecriterium concluderen we weer dat de reeks $\sum a_n$ absoluut convergeert.

Als $L > 1$ dan geldt op den duur dat $|a_{n+1}| > |a_n|$; volgens de opmerking boven Lemma 2.3 divergeert $\sum a_n$ dan. □

Opmerking. Men kan bewijzen: als $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ bestaat, dan bestaat ook $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ terwijl de limieten aan elkaar gelijk zijn; men zou dus kunnen volstaan met het berekenen van $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$. In de praktijk blijkt het echter handig te zijn de Stellingen 2.12 en 2.13 naast elkaar te gebruiken.

Voorbeeld.

Als illustratie beschouwen we de reeks

$$\sum \frac{z^n}{n!}.$$

Hier is $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n!}^{-1}|z|$, terwijl $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{n+1}|z|$. Via de laatste gelijkheid valt dus het gemakkelijkste in te zien dat de genoemde reeks convergeert voor alle $z \in \mathbb{C}$.

Voorbeelden.

(1) Als $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, dan helpt het bovenstaande criterium ons niet: de harmonische reeks $\sum \frac{1}{n}$ divergeert, de reeks $\sum \frac{1}{n^2}$ convergeert.

(2) We beschouwen de reeks $\sum \frac{z^n}{n^2}$, $(z \in \mathrm{C})$. Schrijven we $a_n = \frac{z^n}{n^2}$ dan is

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |z|$$

en we zien dat de gegeven reeks absoluut convergeert voor $z < 1$, en divergeert voor $z > 1$. Voor $|z| = 1$ geeft het quotiënt criterium *geen uitsluitsel* ! In het onderhavige geval geldt voor $|z| = 1$ dat $|a_n| = n^{-2}$ zodat we met behulp van het majorantiecriterium toch kunnen beslissen dat de reeks convergeert.

Figuur 4:

3 Reeksen en oneigenlijke integralen

3.1 Het integraalkenmerk

We beschouwen een funktie f op $[1, \infty[$ met positieve reële waarden. Voor iedere $n \geq 1$ beschouwen we in het $(x, y)-$vlak de rechthoek $[n, n+1] \times [0, f(n)]$ (zie Figuur 4). De $N-$de partiële som van de reeks $\sum f(n)$ is gelijk aan de totale oppervlakte van de tussen $x = 1$ en $x = N+1$ gelegen rechthoeken. Onder bepaalde voorwaarden kan men de convergentie van de reeks $\sum f(n)$ in verband brengen met het bestaan van de oneigenlijke integraal $\int_1^\infty f(x)dx$.

Opmerking. We brengen in herinnering dat we met het bestaan van de oneigenlijke integraal $\int_1^\infty f(x)dx$ bedoelen dat $\int_1^R f(x)dx$ een limiet heeft voor $R \to \infty$. Men noemt in dit geval de oneigenlijke integraal ook wel *convergent*. Als $\int_1^R f(x)dx$ geen limiet heeft voor $R \to \infty$, dan heet $\int_1^\infty f(x)dx$ *divergent*. Vergelijk deze terminologie met de overeenkomstige terminologie voor reeksen.

Stelling 3.1 (Integraalkenmerk). *Laat $f : [1, \infty[\to \mathrm{R}$ een positieve, continue en monotoon dalende funktie zijn. Dan convergeert de reeks $\sum f(n)$ dan en slechts dan als $\int_1^\infty f(x)dx$ bestaat.*

Bewijs: Definieer de rij t_n door:

$$t_n = f(n) - \int_n^{n+1} f(x)dx. \tag{20}$$

Dit is de oppervlakte van het gearceerde vlakdeel tussen $x = n$ en $x = n + 1$ in Figuur 4.

Uit de monotonie van f volgt dat $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$ als $n \leq x \leq n+1$. De integraal in (20) heeft daarom een waarde gelegen in het interval $[f(n+1), f(n)]$, dus $f(n) - f(n+1) \geq t_n \geq 0$. Schrijf

$$T_k = \sum_{n=1}^{k} t_n = \sum_{n=1}^{k} f(n) - \int_1^{k+1} f(x)dx,$$

dan volgt dat $T_k \leq f(1) - f(k+1) \leq f(1)$, dus wegens Gevolg 2.5 bestaat $\lim T_k$. We concluderen hieruit dat $\sum f(n)$ convergeert dan en slechts dan als $\lim \int_1^{k+1} f(x)dx$ bestaat. Wegens de monotonie van f is dit laatste equivalent met de convergentie van $\int_1^\infty f(x)dx$. $\square$

Opmerking. Merk op dat uit bovenstaand bewijs volgt dat, ongeacht of de reeks convergeert dan wel divergeert, altijd geldt:

$$0 \leq \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{k} f(n) - \int_1^{k+1} f(x)dx \right) \leq f(1). \tag{21}$$

Voorbeeld.

De integraal $\int_1^\infty x^{-s}dx$ convergeert voor reële $s > 1$, immers

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^s} = \lim_{R\to\infty} \left[\frac{x^{1-s}}{1-s} \right]_1^R = \frac{1}{s-1}.$$

Voor $s \leq 1$ divergeert de integraal. Met behulp van het integraalkenmerk concluderen we nu dat de reeks $\sum n^{-s}$ convergeert als $s > 1$ en divergeert als $s \leq 1$. Voor $s = 1$ wisten we al dat de reeks divergeert (vgl de harmonische reeks onder Definitie 2.1), maar nu zien we bovendien met welke snelheid de reeks divergeert; immers uit (21) volgt dat

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} - \log n) \tag{22}$$

bestaat, met een tussen 0 en 1 gelegen waarde; γ heet de constante van Euler ($\gamma = 0,57721566490...$).

In Hoofdstuk 2, boven Stelling 2.10 zagen we dat de alternerende reeks $\sum(-1)^{n+1}n^{-1}$ wel convergent is. Met behulp van het bovenstaande kunnen we nu zijn som S *bepalen.* Immers S is de limiet van

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{2k} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} &= \left[(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2k}) - 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2k}) \right] \\
&= (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2k} - \log 2k) - \\
&\quad (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{k} - \log k) + \log 2.
\end{aligned}$$

De laatste uitdrukking heeft limiet $\gamma - \gamma + \log 2 = \log 2$ als $k \to \infty$, en we zien dat $S = \log 2$.

Voorbeeld.
Voor $s > 1$ geldt:

$$\begin{aligned}\int_2^\infty \frac{dx}{x(\log x)^s} &= \lim_{R\to\infty} \left[\frac{(\log x)^{1-s}}{1-s}\right]_2^R \\ &= \frac{1}{(s-1)(\log 2)^{s-1}};\end{aligned}$$

voor $s \leq 1$ divergeert de integraal. Aan zijn afgeleide zien we dat de integrand op den duur een monotoon dalende funktie is. Toepassing van het integraalkenmerk leert ons derhalve dat de reeks

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\log n)^s}$$

convergeert voor $s > 1$ en divergeert voor $s \leq 1$.

3.2 Convergentiecriteria voor integralen

Na de vorige paragraaf is het niet verrassend dat oneigenlijke integralen van het type

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{p\to\infty} \int_a^p f(x)dx$$

met f een (evt stuksgewijs) continue funktie $[a,\infty[\to \mathbb{C}$, eigenschappen hebben die analoog zijn aan de in Hoofdstuk 2 bewezen eigenschappen voor reeksen. Zonder bewijs vermelden we dergelijke eigenschappen voor de grotere klasse van oneigenlijke integralen van het type:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{p\uparrow b} \int_a^p f(x)dx,$$

met $f : [a,b[\to \mathbb{C}$ een continue funktie, $b \in [a,\infty[$ of $b = \infty$. In het vervolg is steeds $b \in [a,\infty]$ en zijn $f,g : [a,b[\to \mathbb{C}$ continue funkties.

Stelling 3.2 *Zij $f \geq 0$ (dwz $f(x) \geq 0$ voor alle $x \in [a,b[$) en zij M een positieve constante. Als $\int_a^p f(x)dx \leq M$ voor alle $a \leq p < b$, dan convergeert $\int_a^b f(x)dx$.*

Stelling 3.3 *Als $\int_a^b |f(x)|dx$ convergeert, dan convergeert ook $\int_a^b f(x)dx$ en er geldt:*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Stelling 3.4 *Als $g \geq 0$ en $f(x) = \mathcal{O}(g(x)) \quad (x \uparrow b)$, dan volgt uit het bestaan van $\int_a^b g(x)dx$ dat van $\int_a^b |f(x)|dx$.*

Opmerking. In bovenstaande betekent $f(x) = \mathcal{O}(g(x)) \quad (x \uparrow b)$ dat er constanten $R \in [a, b[$ en $C > 0$ bestaan zo dat $|f(x)| \leq C|g(x)|$ voor alle $x \in [R, b[$. Hieraan is in het bijzonder voldaan als

$$\lim_{x \uparrow b} \frac{|f(x)|}{|g(x)|}$$

bestaat.

We laten het aan de lezer over soortgelijke stellingen te formuleren voor oneigenlijke integralen van het type

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{p \downarrow a} \int_p^b f(x)dx,$$

met $a \in [-\infty, b]$.

Voorbeelden.

(1) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^5+1}$ bestaat, want $\frac{1}{x^5+1} \leq \frac{1}{x^5}$, en $\int_1^\infty \frac{dx}{x^5}$ bestaat.

(2) $\int_1^\infty \frac{dx}{2x\sqrt{x}-1}$ bestaat, want $\lim_{x\to\infty} \frac{x\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}-1} = \frac{1}{2}$, en $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x}}$ bestaat.

(3) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}dx$ bestaat, want $\lim_{x\downarrow 0} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\sqrt{x} = 1$, en $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ bestaat.

(4) $\int_0^1 \frac{\sin x}{2x}dx$ bestaat, want $\lim_{x\downarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}$, en $\int_0^1 dx$ bestaat.

(5) $\int_1^\infty e^{\alpha x} x^n dx$ bestaat voor elk natuurlijk getal n en elke $\alpha \in \mathbb{C}$ met $\operatorname{Re}\alpha < 0$. Immers: $|e^{\alpha x}| = e^{x \operatorname{Re}\alpha}$, en uit $\operatorname{Re}\alpha < 0$ volgt dat

$$\lim_{x\to\infty} x^{n+2} e^{x\operatorname{Re}\alpha} = 0.$$

Dus

$$x^n e^{\alpha x} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad (x \to \infty).$$

Beschouw de funktie $\frac{\sin x}{x\sqrt{x}}$ op $]0, \infty[$. Een *'tweezijdig oneigenlijke'* integraal als

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}dx \tag{23}$$

behandelen we als volgt. Kies een $p \in]0, \infty[$, bv $p = 1$. We splitsen (23) op in een oneigenlijke integraal over $]0, p]$ en een over $[p, \infty[$. Een integraal als (23) noemen we convergent precies dan als *beide* integralen convergeren. In dit voorbeeld is $\frac{\sin x}{x\sqrt{x}}$ continu op $]0, \infty[$ en $\int_0^1 \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}dx$ convergeert (zie Voorbeeld (3) hierboven). Voorts is $\left|\frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{x\sqrt{x}}$ en $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x}}$ convergeert. Dus $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}dx$ convergeert. We definiëren

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}dx + \int_1^\infty \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}dx.$$

We waarschuwen ervoor dat voor convergentie van $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ het *niet* voldoende is dat

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} f(x)dx \tag{24}$$

bestaat. Zo geldt $\lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} \frac{x}{x^2+1}dx = 0$, terwijl $\int_0^{\infty} \frac{x}{x^2+1}dx$ divergent is (en dus is ook $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+1}dx$ divergent).

Voorbeelden.

(1) $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$ bestaat, want $\lim_{x\downarrow 0} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\sqrt{x} = 1$ en $\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ $(x \to \infty)$.

(2) $\int_0^{\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}dx$ bestaat voor alle $\alpha \in \mathrm{C}$ met $a = \operatorname{Re}\alpha > 0$, immers

$$|x^{\alpha-1}| = |e^{(\alpha-1)\log x}| = e^{(a-1)\log x} = x^{a-1},$$

dus

$$\lim_{x\downarrow 0} |e^{-x}x^{\alpha-1}|x^{1-a} = 1$$

(terwijl $\int_0^1 x^{a-1}dx$ bestaat), en $e^{-x}x^{\alpha-1} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ $(x \to \infty)$.

(3) $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ bestaat als $\operatorname{Re} p > 0$ en $\operatorname{Re} q > 0$, immers

$$\left|x^{p-1}(1-x)^{q-1}\right| = x^{\operatorname{Re} p-1}(1-x)^{\operatorname{Re} q-1};$$

splits de integraal in twee integralen: I_1 (van 0 tot $\frac{1}{2}$) en I_2 (van $\frac{1}{2}$ tot 1), en merk op dat de convergentie van I_1 bewezen wordt als in Voorbeeld 2. De convergentie van I_2 bewijzen we als volgt:

$$\lim_{x\uparrow 1} \left|x^{p-1}(1-x)^{q-1}\right|(1-x)^{\operatorname{Re} q-1} = 1,$$

en

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{(1-x)^{1-\operatorname{Re} q}}$$

bestaat, zoals men inziet door berekening of door substitutie $1 - x = y$.

(4) We beschouwen $\int_0^{\infty} \frac{\log(1+x)}{x}dx$; uit

$$\lim_{x\downarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

volgt dat $\int_0^{P} \frac{\log(1+x)}{x}dx$ bestaat voor elke $P > 0$. Uit $\lim_{x\to\infty} \log(1+x) = \infty$ volgt dat er een $P > 0$ is zo dat $\log(1+x) \geq 1$ voor alle $x \geq P$; uit

$$\int_P^N \frac{\log(1+x)}{x}dx \geq \int_P^N \frac{dx}{x} = \log N - \log P \quad (N > P)$$

en $\lim_{N\to\infty} \log N = \infty$ volgt nu dat $\int_P^{\infty} \frac{\log(1+x)}{x}dx$ niet bestaat.

(5) We beschouwen $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$; uit $\lim_{x\downarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ volgt dat $\int_0^P \frac{\sin x}{x}dx$ bestaat voor elke $P > 0$. De convergentie van $\int_P^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ bewijzen we met behulp van partiële integratie:

$$\int_P^N \frac{\sin x}{x}dx = \left[-\frac{\cos x}{x}\right]_P^N - \int_P^N \frac{\cos x}{x^2}dx.$$

Aangezien

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\cos N}{N} = 0 \text{ en } \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$$

bestaat de limiet van de bovenstaande integraal voor $N \to \infty$. We concluderen dat $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ bestaat.

Naar analogie met tweezijdig oneigenlijke integralen beschouwen we tenslotte nog reeksen van de vorm

$$\sum_{n\in \mathbb{Z}} a_n. \tag{25}$$

De reeks (25) heet convergent precies dan als beide reeksen $\sum_{n\geq 0} a_n$ en $\sum_{n>0} a_{-n}$ convergeren. In dat geval definiëren we:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

4 Uniforme convergentie

In het vervolg zal V steeds een deelverzameling van C zijn (omdat we R identificeren met een deel van C laten we dus in het bijzonder toe dat $V \subset$ R). Laat verder voor ieder natuurlijk getal $n \geq 0$ een funktie $F_n : V \to$ C gegeven zijn. We beschouwen de rij F_n van funkties.

Definitie 4.1 De rij F_n heet *puntsgewijs convergent* op V als voor iedere $z \in V$ de rij $F_n(z)$ convergent is. Is dit het geval, dan heet de functie $F : V \to$ C gedefinieerd door

$$F(z) = \lim_{n \to \infty} F_n(z)$$

de *puntsgewijze limiet* van de rij.

Het is zeer wel mogelijk dat elke funktie F_n continu op V is, terwijl de puntsgewijze limiet F dat niet is. Ter illustratie beschouwen we het geval dat $V = [0, 1]$, en $F_n(x) = x^n$. De rij F_n convergeert puntsgewijs met limietfunktie F gegeven door:

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 \text{ als } 0 \leq x < 1, \\ &= 1 \text{ als } x = 1. \end{aligned} \tag{26}$$

Dit verschijnsel wordt veroorzaakt door het feit dat de rij $F_n(x)$ voor $n \to \infty$ steeds langzamer naar $F(x)$ nadert naarmate x dichter bij 1 ligt.

Door een zwaardere eis aan ons convergentiebegrip op te leggen kunnen we het verschijnsel beheersen. Het fundamentele idee hierbij is dat we een begrip van afstand tussen twee *funkties* introduceren: de uniforme afstand. Zij φ, ψ een tweetal funkties $V \to$ C. We zullen zeggen dat φ en ψ *uniform* een afstand hoogstens d hebben ($d > 0$), als:

$$\textit{voor iedere } z \in V \textit{ geldt dat } |\varphi(z) - \psi(z)| \leq d. \tag{27}$$

Als $V \subset$ R en als φ een reëelwaardige funktie op V is dan kan men de collectie van alle funkties ψ die uniforme afstand hoogstens d tot φ hebben als volgt visualiseren. Beschouw de strip Ω van punten (x, y) in R^2 met $x \in V$ en $|\varphi(x) - y| \leq d$ (zie Figuur 5). Dan betekent (27) precies dat de grafiek van ψ geheel in Ω gelegen is.

In het vervolg willen we niet alleen kunnen zeggen dat een tweetal funkties φ, ψ uniforme afstand hoogstens d hebben, maar we willen ook een *waarde* aan die uniforme afstand toekennen. Het lijkt nu voor de hand te liggen als waarde de maximale waarde van $|\varphi(z) - \psi(z)|$, voor $z \in V$ te nemen. Probleem hierbij is dat zo'n maximale waarde niet hoeft te bestaan. In het bovenstaande voorbeeld is de collectie van alle waarden van $|F_n(x) - F(x)|$, $x \in [0, 1]$ gelijk aan $[0, 1[$, en er is dus geen maximale waarde. We kunnen het gesignaleerde probleem als volgt omzeilen. In het onderstaande zullen we aantonen dat voor een tweetal funkties φ, ψ er wel altijd een kleinste waarde van $d > 0$ bestaat zo dat aan (27) voldaan is. Deze kleinste waarde van (de bovengrens) d zullen we dan de uniforme afstand tussen φ en ψ noemen.

Eerst analyseren we bovengrenzen van deelverzamelingen van R.

Figuur 5:

Definitie 4.2 Zij S een deelverzameling van R. Onder een *bovengrens* van S verstaan we een getal $b \in \mathrm{R}$ zo dat voor alle $y \in S$ geldt $y \leq b$.

Het volgende resultaat is een belangrijk gevolg van Axioma 2.4 (men kan zelfs aantonen dat het gelijkwaardig is met het genoemde axioma, maar dat laten we hier achterwege).

Stelling 4.3 *Zij S een naar boven begrensde deelverzameling van* R, *die niet leeg is. Dan heeft S een* kleinste *bovengrens s.*

Opmerking. Noteer de collectie van alle bovengrenzen van S met $\mathrm{bov}(S)$. Bovenstaande uitspraak zegt dan precies dat $\mathrm{bov}(S)$ een kleinste element s heeft. Omdat iedere $t \geq s$ weer een bovengrens voor S is betekent dat precies dat

$$\mathrm{bov}(S) = [s, \infty[\,.$$

Bewijs: (Voor de liefhebber.) Omdat S niet leeg is, kunnen we een element $a \in S$ kiezen. Verder is gegeven dat S een bovengrens r bezit. Voor elke $n \in \mathrm{N}$ beschouwen we de eindige collectie E_n van getallen $a + k2^{-n}(r - a)$, $k = 0, \dots, 2^n$. Merk op dat

$$E_n \subset E_{n+1} \tag{28}$$

voor alle n. Voor ieder $n \in \mathrm{N}$ bezit de (eindige) verzameling $\mathrm{bov}(S) \cap E_n$ een kleinste element, zeg b_n. Wegens (28) geldt $b_n \in E_{n+1}$, en dus $b_{n+1} \leq b_n$. De rij b_n is dus een monotoon dalende rij reële getallen die naar onderen begrensd wordt door a. Wegens Axioma 2.4 bestaat $b = \lim b_n$. Merk op dat $b \leq b_n$ voor alle n. Beschouw nu een willekeurig element $y \in S$. Dan geldt voor alle n dat $y \leq b_n$. Limietovergang geeft $y \leq b$ en we concluderen dat b tot de collectie $\mathrm{bov}(S)$ van bovengrenzen behoort.

We zullen aantonen dat er geen kleinere bovengrens bestaat. Stel dat er wel een kleinere bovengrens was, zeg $c < b$. Er zou dan een $N \in \mathrm{N}$ bestaan zo dat $2^{-N}(r-a) < b - c$. Dit betekent dat de verzameling E_N minstens één element d heeft met $c \leq d < b$. Die d is een bovengrens van S, dus er moet gelden dat $b_N \leq d$. Hieruit volgt dat $b_N < b$, in tegenspraak met het voorgaande. $\square$

Opmerkingen. De kleinste bovengrens s uit Stelling 4.3 heet ook wel het *supremum* van de verzameling S. We schrijven $\sup S := s$.

Als V een niet naar boven begrensd deel van R is, dan schrijven we ook wel $\sup V = \infty$.

Voorbeelden.

(1) $S = [0,1]$. Dan $\mathrm{bov}(S) = [1,\infty[$, dus $\sup S = 1$. We zien hier dat $\sup S$ gelijk is aan het grootste element van S. In het volgende voorbeeld heeft S geen grootste element.

(2) $S = [0,1[$. Dan $\mathrm{bov}(S) = [1,\infty[$, dus $\sup S = 1$.

(3) $S = \{-\frac{1}{n};\ \ n \in \mathrm{Z}, n \geq 1\}$. Dan $\mathrm{bov}(S) = [0,\infty[$, dus $\sup S = 0$.

(4) $S = \mathrm{N}$. Dan is S niet naar boven begrensd, dus $\sup S = \infty$.

Definitie 4.4 Laat φ en ψ een tweetal complexe funkties op $V \subset \mathrm{C}$ zijn. We definiëren de *uniforme afstand* van φ tot ψ op V, genoteerd als $\|\varphi - \psi\|_V$, door

$$\|\varphi - \psi\|_V = \sup\{|\varphi(z) - \psi(z)|;\ \ z \in V\}.$$

Opmerkingen.

(1) Ga na dat de uitspraak $\|\varphi - \psi\|_V \leq d$ equivalent is met de uitspraak (27).

(2) Er geldt $\|\varphi - \psi\|_V = 0$ dan en slechts dan als $\varphi = \psi$ op V.

(3) $\|\varphi - \psi\|_V = \infty$ betekent volgens bovenstaande definitie dat er voor iedere $M > 0$ een $z \in V$ bestaat met $|\varphi(z) - \psi(z)| > M$.

Gebaseerd op het nieuwe afstandsbegrip introduceren we in de onderstaande definitie een nieuw convergentiebegrip.

Definitie 4.5 Zij F_n een puntsgewijs convergerende rij van complexwaardige funkties op V (met limiet funktie F). We zeggen dat de rij F_n *uniform convergeert* op V indien

$$\lim_{n\to\infty} \|F - F_n\|_V = 0 \tag{29}$$

De volgende stelling rechtvaardigt de invoering van het begrip uniforme convergentie.

Stelling 4.6 *Laat F_n een rij funkties $V \to \mathrm{C}$ zijn die op V uniform convergeert met limiet funktie F, en zij $\alpha \in V$. Als iedere funktie F_n continu is in α, dan is ook F continu in α.*

Bewijs: Fixeer een punt $\alpha \in V$. We moeten aantonen dat

$$\lim_{z\to\alpha} F(z) = F(\alpha).$$

Zij $\epsilon > 0$. Dan is er een $n \geq 1$ zo dat $\|F_n - F\|_V < \frac{1}{3}\epsilon$. Na deze keuzes is er een $\delta > 0$ te vinden zo dat voor alle $z \in V$ met $|z-\alpha| < \delta$ geldt:

$$|F_n(z) - F_n(\alpha)| < \frac{1}{3}\epsilon.$$

Voor die z geldt dan ook dat:

$$\begin{aligned}
|F(z) - F(\alpha)| &\leq |F(z) - F_n(z)| + |F_n(z) - F_n(\alpha)| + |F_n(\alpha) - F(\alpha)| \\
&\leq \|F - F_n\|_V + \frac{1}{3}\epsilon + \|F_n - F\|_V \\
&< \epsilon.
\end{aligned}$$

Hiermee is het bewijs voltooid. $\square$

Voorbeeld.

Beschouw weer het onder Definitie 4.1 behandelde voorbeeld $V = [0,1]$, $F_k(x) = x^k$. Omdat de puntsgewijze limiet (26) niet continu is *kan* de rij F_k niet uniform convergeren. Dit laatste kan men ook inzien mbv de definitie: omdat

$$\lim_{x\to 1} |F_k(x) - F(x)| = 1,$$

moet $\|F_k - F\|_{[0,1]} \geq 1$ zijn: in het bijzonder nadert de uniforme afstand niet naar 0 als k nadert tot ∞.

We beschouwen nu een *reeks* $\sum f_n$ van complexwaardige funkties op V. De $k-$de partiële som van de reeks is nu een funktie op V:

$$F_k(z) = \sum_{n=0}^{k} f_n(z), \quad (z \in V).$$

Definitie 4.7 De reeks $\sum f_n$ heet puntsgewijs convergent op V als de rij F_k van partiële sommen puntsgewijs convergeert op V. In dat geval heet de funktie $F : V \to \mathbb{C}$ gedefinieerd door

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \quad (z \in V)$$

de som van de reeks.

Definitie 4.8 Laat de reeks $\sum f_n$ op V puntsgewijs convergeren naar F. De reeks heet *uniform convergent* als de rij F_k van partiële sommen op V uniform naar F convergeert, maw als

$$\lim_{k\to\infty} \|F_k - F\|_V = 0.$$

Voorbeeld.

Ter illustratie beschouwen we de meetkundige reeks $\sum z^n$. Deze heeft de partiële som

$$F_k(z) = \frac{1 - z^{k+1}}{1 - z}.$$

Als $|z| < 1$ dan geldt $F(z) = \lim F_k(z) = (1 - z)^{-1}$. De reeks convergeert dus puntsgewijs op het gebied $V(1) = \{z \in \mathrm{C}; \quad |z| < 1\}$. Omdat

$$\lim_{z \to 1} |F_k(z) - F(z)| = \lim_{z \to 1} \left| \frac{z^{k+1}}{1 - z} \right| = \infty,$$

geldt dat $\|F_k - F\|_{V(1)} = \infty$, dus de reeks convergeert niet uniform op $V(1)$. Fixeer nu $\rho \in]0, 1[$ en beschouw de verzameling $V(\rho) = \{z \in \mathrm{C}; \quad |z| < \rho\}$. Dan geldt voor alle $z \in V(\rho)$ dat

$$|F_k(z) - F(z)| < \frac{\rho^{k+1}}{|1 - z|} < \frac{\rho^{k+1}}{1 - \rho},$$

dus $\|F_k - F\|_{V(\rho)} \leq (1 - \rho)^{-1} \rho^{k+1}$ en er volgt dat $\lim \|F_k - F\|_{V(\rho)} = 0$. De meetkundige reeks convergeert dus wel uniform op de schijf $V(\rho)$.

Stelling 4.9 *Zij $\sum f_n$ op V uniform convergent met som F, en zij $\alpha \in V$. Als iedere f_n continu is in α, dan is ook F continu in α.*

Bewijs: De partiële sommen F_k zijn *eindige* sommen van funkties die continu zijn in α, en dus zijn de F_k ook continu in α. Pas nu Stelling 4.6 toe. □

Stelling 4.10 (Majorantie criterium). *Laat t_n een rij niet-negatieve reële getallen zijn en veronderstel dat voor elke n geldt:*

$$|f_n(z)| \leq t_n, \quad \text{voor alle } z \in V.$$

Als $\sum t_n$ convergeert, dan convergeert de reeks $\sum f_n$ uniform op V en er geldt dat:

$$\|\sum_{n=0}^{\infty} f_n\|_V \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_V \leq \sum_{n=0}^{\infty} t_n.$$

Bewijs: Fixeer (voorlopig) $z \in V$. Wegens Stelling 2.10 convergeert de reeks $\sum f_n(z)$ met som $F(z)$. Voor $q > p \geq 0$ geldt dat

$$|F_q(z) - F_p(z)| \leq t_{p+1} + t_{p+2} + ... + t_q$$

en door de limiet voor $q \to \infty$ te nemen zien we dat

$$|F(z) - F_p(z)| \leq \sum_{n=p+1}^{\infty} t_n.$$

Dit geldt voor iedere keuze van $z \in V$, dus

$$\|F - F_p\|_V \leq \sum_{n=0}^{\infty} t_n - \sum_{n=0}^{p} t_n.$$

Hieruit blijkt dat de reeks uniform convergeert.

Uit Stelling 2.10 volgt ook dat voor iedere $z \in V$ geldt dat

$$|F(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_V.$$

Hieruit volgen de verlangde schattingen. □

Voorbeelden.

(1) $\sum n^{-2} z^n$ is uniform convergent op de cirkelschijf $|z| \leq 1$. Immers, daar geldt $|n^{-2} z^n| \leq n^{-2}$ terwijl $\sum n^{-2}$ convergent is.

(2) Zij $0 < c < 1$, dan is $\sum n^{-1} z^n$ uniform convergent op de schijf $|z| \leq c$. Immers, daar geldt $|n^{-1} z^n| \leq c^n$, terwijl $\sum c^n$ convergent is.

(3) De reeks $\sum (n^2 + x^2)^{-1}$ is op $]-\infty, \infty[$ uniform convergent, want daar geldt $(n^2 + x^2)^{-1} \leq n^{-2}$.

(4) De reeks $\sum (z + n^2)^{-1}$ is uniform convergent op elke cirkelschijf $|z| \leq c$, met $c < 1$. Immers daar geldt

$$\left| \frac{1}{n^2 + z} \right| \leq \frac{1}{n^2 - |z|} \leq \frac{1}{n^2 - c},$$

terwijl de reeks $\sum (n^2 - c)^{-1}$ convergeert.

5 Fourierreeksen

Periodieke funkties. Een funktie $f : \mathrm{R} \to \mathrm{C}$ heet periodiek met periode p ($p > 0$), indien voor alle $x \in \mathrm{R}$ geldt:

$$f(x+p) = f(x).$$

Voor de hand liggende voorbeelden van periodieke funkties met periode $p = 2\pi$ zijn de funkties $\cos nx$, $\sin nx$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) en e^{inx} ($n \in \mathrm{Z}$). Uiteraard zijn ook eindige lineaire combinaties van de vorm

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{30}$$

(a_n, $b_n \in \mathrm{C}$) periodiek met periode 2π. Uit de formules $\cos nx = \frac{1}{2}(e^{inx} + e^{-inx})$, en $\sin nx = \frac{1}{2i}(e^{inx} - e^{-inx})$ volgt dat f te schrijven is als een eenvoudiger ogende som van e-machten:

$$f(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}, \tag{31}$$

met coëfficiënten gegeven door:

$$c_0 = a_0, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad \text{en} \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \qquad (n \geq 1). \tag{32}$$

Omgekeerd is elke lineaire combinatie van de vorm (31) te herschrijven als een som van de vorm (30) met

$$a_0 = c_0, \quad a_n = (c_n + c_{-n}), \quad \text{en} \quad b_n = i(c_n - c_{-n}) \qquad (n \geq 1). \tag{33}$$

Er is een eenvoudige methode om de coëfficiënten c_n terug te vinden uit de funktie f. We beschouwen de ruimte L van continue $2\pi-$periodieke funkties $\mathrm{R} \to \mathrm{C}$. Dit is een (oneindig dimensionale) lineaire ruimte over C. Op de ruimte L definiëren we een Hermitisch inprodukt $\langle . \,|\, . \rangle$ als volgt. Voor een tweetal funkties φ en ψ in L wordt het inprodukt gedefinieerd door de formule:

$$\langle \varphi \,|\, \psi \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\overline{\psi(t)}\, dt. \tag{34}$$

Lemma 5.1 *De funkties $e_n : x \mapsto e^{inx}$ zijn orthonormaal ten aanzien van het inprodukt $\langle . \,|\, . \rangle$; dwz. voor alle $n, m \in \mathrm{Z}$ geldt:*

$$\begin{aligned} \langle e_n \,|\, e_m \rangle &= 0 \ \text{ als } \ n \neq m; \\ &= 1 \ \text{ als } \ n = m. \end{aligned}$$

Bewijs: Er geldt dat

$$\begin{aligned}\langle e_n \,|\, e_m \rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}\,\overline{e^{imt}}\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t}dt\end{aligned}$$

waaruit het te bewijzene af te lezen valt. □

Naar analogie met hetgeen u bekend is uit de lineaire algebra vinden we nu de coëfficiënten c_m door:

$$\begin{aligned}\langle f \,|\, e_m \rangle &= \langle \sum_{n=-N}^{N} c_n\, e_n \,|\, e_m \rangle \\ &= \sum_{n=-N}^{N} c_n \langle e_n \,|\, e_m \rangle = c_m.\end{aligned}$$

Met formule(34) levert dit tenslotte dat:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt. \tag{35}$$

Fourierreeksen. In plaats van eindige sommen beschouwen we nu algemener oneindige reeksen van de vorm

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}. \tag{36}$$

Een dergelijke reeks heet *Fourierreeks.* Als de reeks (36) puntsgewijs convergeert, dan is de somfunktie f periodiek met periode 2π (ga dit na!). Als de reeks *uniform* convergeert dan is f bovendien continu (vgl. Stelling 4.9). Ook in dat geval kunnen we de coëfficiënten c_n terug vinden met formule (35). Om dit in te zien beschouwen we de partiële sommen

$$f_N = \sum_{n=-N}^{N} c_n\, e_n.$$

In het bovenstaande zagen we dat $\langle f_N \,|\, e_m \rangle = c_m$ voor $N \geq m$. Er geldt

$$\begin{aligned}|\langle f \,|\, e_m \rangle - \langle f_N \,|\, e_m \rangle| &= |\langle f_N - f \,|\, e_m \rangle| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f_N(t) - f(t)|\,|e^{-int}|dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \|f_N - f\|_{\mathrm{R}} dt = \|f_N - f\|_{\mathrm{R}}\end{aligned}$$

Uit de uniforme convergentie volgt dat $\|f_N - f\|_{\mathrm{R}} \to 0$ als $N \to \infty$, en met behulp van de insluitstelling concluderen we uit de bovenstaande schatting tenslotte dat

$$\langle f \,|\, e_m \rangle = \lim_{N\to\infty} \langle f_N \,|\, e_m \rangle = c_m \tag{37}$$

We hebben in het voorafgaande gezien dat een uniform convergente Fourierreeks een continue periodieke funktie met periode 2π definieert. Omgekeerd kan men bij een continue $2\pi-$periodieke funktie $g : \mathrm{R} \to \mathrm{C}$ Fourier coëfficiënten c_n definiëren door $c_n = \langle g \,|\, e_n \rangle$. Natuurlijke vragen zijn nu:

(a) *Convergeert de bijbehorende Fourierreeks* $\sum c_n e^{inx}$?

(b) *Is g gelijk aan de funktie* $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$?

Het antwoord op vraag (a) luidt niet zonder meer bevestigend. Als we echter veronderstellen dat g tweemaal continu differentieerbaar is, dan geldt dat

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\, e^{-int} dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \left(\frac{1}{in}\right)^2 \frac{d^2}{dt^2} \left(e^{-int}\right) dt \\
&= \frac{1}{2\pi n^2} \int_{-\pi}^{\pi} g'(t) \frac{d}{dt} \left(e^{-int}\right) dt \\
&= -\frac{1}{2\pi n^2} \int_{-\pi}^{\pi} g''(t)\, e^{-int}\, dt. \qquad (38)
\end{aligned}$$

Hierbij is tweemaal partieel geïntegreerd. Randtermen traden niet op, omdat de funkties g, g' en g'' periodiek met periode 2π zijn. Door schatting onder het integraalteken in (38) volgt nu dat

$$\|c_n e_n\| \leq |c_n| \leq \frac{\|g''\|}{n^2}. \qquad (39)$$

De reeks $\sum \frac{1}{n^2}$ convergeert; met behulp van het majorantiecriterium (Stelling 4.10) concluderen we tenslotte dat de reeks $\sum c_n e_n$ uniform convergeert.

Het antwoord op vraag (b) hangt af van een eigenschap van het orthonormale systeem $\{e_n \,; n \in \mathrm{Z}\}$. We veronderstellen weer dat g tweemaal continu differentieerbaar is zodat zijn Fourierreeks uniform convergeert. De funktie

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

is derhalve continu en periodiek met periode 2π. In het bovenstaande zagen we verder dat $c_n = \langle f \,|\, e_n \rangle$. We concluderen dat $\langle f \,|\, e_n \rangle = \langle g \,|\, e_n \rangle$ voor alle $n \in \mathrm{Z}$. Met andere woorden: de continue funktie $f - g$ is orthogonaal ten aanzien van elke e_n. Uit de onderstaande stelling, die in het dictaat Infinitesimaalrekening D bewezen wordt, volgt dat $f = g$.

Stelling 5.2 *Zij φ een continue $2\pi-$periodieke funktie. Als*

$$\langle \varphi \,|\, e_n \rangle = 0$$

voor alle $n \in \mathrm{Z}$ dan geldt dat $\varphi(x) = 0$ voor alle $x \in \mathrm{R}$.

Figuur 6:

Opmerking. Op grond van de bovenstaande eigenschap noemt men het stelsel funkties $\{e_n;\ n \in \mathrm{Z}\}$ een *volledig* orthonormaal stelsel.

De bovenstaande antwoorden op de vragen (a) en (b) zijn in zekere zin onbevredigend. In de praktijk wil men ook vaak niet-differentieerbare funkties in een Fourierreeks kunnen ontwikkelen. We geven een voorbeeld.

Voorbeeld.

Zij $g : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ de $2\pi-$periodieke funktie die op $]-\pi, \pi]$ gedefinieerd wordt door $g(x) = x$ (de 'zaagtandfunktie': zie Figuur 6). Hoewel deze funktie niet continu op R is kunnen we uiteraard wel Fouriercoëfficiënten definiëren:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\, e^{-int}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\, e^{-int}\, dt \\ &= \frac{i}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} t\ d\, e^{-int} = \frac{i}{2\pi n}\left(2\pi(-1)^n - \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int}\, dt\right) \\ &= \frac{i(-1)^n}{n}, \end{aligned}$$

mits $n \neq 0$. Voorts is $c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\ dt = 0$.

De hierboven gedefinieerde funktie is een voorbeeld van hetgeen we in het vervolg een bijna-aangepaste funktie zullen noemen.

Definitie 5.3 Een periodieke funktie $f : \mathrm{R} \to \mathrm{C}$ zal in het vervolg *bijna-aangepast* heten als

(a) f continu differentieerbaar is, overal met uitzondering van een collectie punten waarvan er in elk begrensd interval *eindig veel* liggen, en

(b) in ieder uitzonderingspunt a de volgende limieten bestaan:

$$\lim_{x\uparrow a} f(x),\ \ \lim_{x\downarrow a} f(x),\ \ \lim_{x\uparrow a} f'(x),\ \ \lim_{x\downarrow a} f'(x).$$

We formuleren nu een krachtige stelling die we niet zullen bewijzen:

Stelling 5.4 *Is f een bijna-aangepaste $2\pi-$periodieke funktie, dan geldt overal waar f continu is dat:*

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}^{*}\, c_n\, e^{inx} \tag{40}$$

waarin de coëfficiënten door formule (35) worden gegeven.

Bovendien geldt in ieder discontinuïteitspunt a dat

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}^{*}\, c_n\, e^{ina} = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\uparrow a} f(x) + \lim_{x\downarrow a} f(x)\right). \tag{41}$$

Opmerkingen. In formule (40) is de notatie

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}^{*} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N}$$

gebruikt. Men kan aantonen dat de convergentie uniform is op ieder interval $[a, b]$ waarop de funktie f continu is.

De funktie f uit de bovenstaande stelling heet *aangepast* als bovendien in ieder discontinuïteitspunt a geldt dat

$$f(a) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\uparrow a} f(x) + \lim_{x\downarrow a} f(x)\right).$$

Voor een dergelijke funktie is de formule (40) dus geldig voor alle $x \in \mathrm{R}$. Merk op dat men iedere bijna-aangepaste funktie kan veranderen in een aangepaste, door hem te veranderen in zijn discontinuïteitspunten (het zgn. 'aanpassen'); hierbij blijft de Fourierreeks dezelfde.

In het bovenstaande voorbeeld (1) zijn de punten $\pi + 2k\pi$ ($k \in \mathrm{Z}$) uitzonderingspunten. Voor $-\pi < x < \pi$ geldt derhalve dat

$$x = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty}{}^{*} \frac{(-1)^n i}{n} e^{inx} \tag{42}$$

Invullen van $x = \pi$ in de bovenstaande reeks levert

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty}{}^{*} \frac{i}{n} &= \lim_{N\to\infty}\left(i \sum_{\substack{n=-N \\ n\neq 0}}^{N} \frac{1}{n}\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

hetgeen overeenkomt met de door (41) voorspelde waarde. We kunnen de funktie g aanpassen door hem te herdefiniëren in de punten $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathrm{Z}$ met $g(\pi + 2k\pi) = 0$.

Zij f een bijna-aangepaste periodieke funktie met periode 2π. We beschouwen de partiële som $f_N = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$ met c_n als in (35). Voor deze partiële som geldt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f_N(t)|^2 \, dt &= \langle f_N \mid f_N \rangle \\
&= \sum_{n=-N}^{N} \sum_{m=-N}^{N} c_n \overline{c_m} \langle e_n \mid e_m \rangle \\
&= \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2.
\end{aligned}$$

Zonder bewijs vermelden we dat in de bovenstaande gelijkheid de limiet voor $N \to \infty$ genomen kan worden.

Stelling 5.5 (Gelijkheid van Parseval.) *Zij f een bijna-aangepaste periodieke funktie met periode 2π. Dan geldt*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \tag{43}$$

Passen we het bovenstaande toe op voorbeeld (1), dan volgt er dat

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 \, dt = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

hetgeen de volgende interessante identiteit oplevert:

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \tag{44}$$

Laat in het vervolg $f : \mathrm{R} \to \mathrm{C}$ een aangepaste periodieke funktie met periode 2π zijn. Dan geldt (40) voor alle $x \in \mathrm{R}$. We kunnen de partiële sommen $f_N = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$ herschrijven in de vorm (30), waarbij de coëfficiënten gegeven worden door (33). Uit $f = \lim_{N\to\infty} f_N$ (puntsgewijs) volgt nu:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right). \tag{45}$$

Door (33) te combineren met (35) leiden we af dat:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt, \tag{46}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt \, dt \quad (n \geq 1), \tag{47}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt \, dt \quad (n \geq 1). \tag{48}$$

Als f reëelwaardig is, dan blijkt uit de bovenstaande formules dat de coëfficiënten in de reeks (45) alle reëel zijn; in dat geval heet (45) ook wel de *reële Fourierreeks.*

Is de aangepaste funktie f *even*, dwz. $f(x) = f(-x)$ voor alle $x \in \mathrm{R}$, dan is de integrand in (48) oneven en we zien dat $b_n = 0$ voor alle $n \geq 1$. Een even aangepaste funktie wordt derhalve gegeven door een *cosinusreeks*. Is de aangepaste funktie f *oneven* (dwz. $f(x) = -f(-x)$) dan is $a_n = 0$ voor alle $n \geq 0$ dus f wordt gegeven door een *sinusreeks*.

Voorbeelden.

(1) We beschouwen de aangepaste funktie g uit het eerder behandelde Voorbeeld (1). Deze funktie is oneven en heeft dus een sinusreeks, die we als volgt uit de reeks (42) kunnen verkrijgen:

$$\begin{aligned} x &= \lim_{N\to\infty} \left(-\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n i}{n} e^{-inx} + \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n i}{n} e^{inx} \right) \\ &= 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx. \end{aligned}$$

Uiteraard hadden de coëfficiënten van deze sinusreeks ook direct met behulp van (48) berekend kunnen worden. Substitutie $x = \frac{\pi}{2}$ levert een fraaie formule:

$$\pi = 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\right). \tag{49}$$

(2) Zij $g : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ de $2\pi-$periodieke funktie die op $]-\pi, \pi[\setminus\{0\}$ gedefinieerd wordt door:

$$\begin{aligned} g(x) &= -1 \ \text{ als } \ -\pi < x < 0, \\ &= +1 \ \text{ als } \ 0 < x < \pi. \end{aligned}$$

In de uitzonderingspunten $k\pi,\ k \in \mathrm{Z}$ definiëren we hem als $g(k\pi) = 0$ ('aanpassing'). De funktie g is oneven. We vinden zijn sinusreeks door:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\, \sin nt\ dt \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} (-1)\sin nt\ dt + \int_{0}^{\pi} \sin nt\ dt\right) \\ &= \frac{2}{\pi n}\left(1 - (-1)^n\right). \end{aligned}$$

We concluderen dat:

$$g(x) = 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{\pi(2k+1)}.$$

(3) Definieer f door $f(x) = |x|$, $(|x| \leq \pi)$, en $2\pi-$periodieke voortzetting. Deze funktie is aangepast en even; we vinden

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\ dx = \frac{\pi}{2},$$

en voor $n \geq 1$, met behulp van partiële integratie:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx \; dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \cos nx \; dx \\ &= \frac{2(\cos n\pi - 1)}{\pi n^2} = \frac{2[(-1)^n - 1]}{\pi n^2}, \end{aligned}$$

dus $a_{2k+2} = 0$, $a_{2k+1} = -\frac{4}{\pi(2k+1)^2}$ $(k \geq 0)$. Er volgt dat

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}.$$

Merk op dat deze formule geldig is voor alle $x \in [-\pi, \pi]$; bovendien convergeert de reeks uniform op dat interval. Substitutie $x = 0$ geeft

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots .$$

(4) Zij nu a een reëel getal dat niet geheel is. We definiëren $f(x) = \cos ax$ als $|x| \leq \pi$. De funktie f is even; we vinden

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos ax \; dx = \frac{\sin \pi a}{\pi a};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos ax \;\; \cos nx \; dx = \frac{(-1)^n 2a \sin \pi a}{\pi(a^2 - n^2)},$$

dus

$$\cos ax = \frac{\sin \pi a}{\pi a} + \frac{2a \sin \pi a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{a^2 - n^2} \quad (|x| \leq \pi). \tag{50}$$

Uit (50) leiden we nog wat interessante formules af. Door $x = \pi$ in te vullen vinden we:

$$\cot \pi a - \frac{1}{\pi a} = \frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 - n^2} \quad (a \notin \mathrm{Z}). \tag{51}$$

Kies nu een $x \in]0, 1[$; voor alle a met $0 \leq a \leq x$ geldt

$$\left|\frac{2a}{a^2 - n^2}\right| \leq \frac{2x}{n^2 - x^2},$$

en uit de convergentie van $\sum x(n^2 - x^2)^{-1}$ (vgl. Voorbeeld (4) uit Hoofdstuk 4) volgt dat $\sum(a^2 - n^2)^{-1}$ uniform convergeert op het interval $0 \leq a \leq x$. Integratie van (51) naar de variabele a tussen de grenzen δ en x levert in het linkerlid

$$\frac{1}{\pi}\log\frac{\sin \pi x}{x} - \frac{1}{\pi}\log\frac{\sin \pi\delta}{\delta},$$

en limietovergang $\delta \downarrow 0$ geeft

$$\frac{1}{\pi} \log \frac{\sin \pi x}{\pi x}.$$

In het rechterlid van (51) komt door termsgewijze integratie naar a (hetgeen op grond van de uniforme convergentie geoorloofd is):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \left[\frac{1}{a-n} + \frac{1}{a+n}\right] da &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} [\log(a^2 - n^2)]_0^x \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right). \end{aligned}$$

We hebben dus gevonden:

$$\begin{aligned} \log \frac{\sin \pi x}{\pi x} &= \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \log\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Door van beide leden de $e-$macht te nemen volgt hieruit dat

$$\sin \pi x = \pi x \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) \tag{52}$$

hetgeen men ook schrijft als

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right). \tag{53}$$

Formule (53) is nog juist voor $x = 0$ en $x = 1$ en dus, aangezien beide leden oneven zijn, voor alle x met $-1 \leq x \leq 1$. Uit het feit dat beide leden een periode 2 hebben (hetgeen men na enig gereken inziet) concluderen we dat (53) juist is voor alle $x \in \mathrm{R}$.

(5) In dit voorbeeld willen we $\cos x$ voor $0 \leq x < \pi$ als *sinusreeks* schrijven. Daartoe zetten we $\cos x$ als volgt voort tot een oneven funktie f op $]-\pi, \pi[$. We definiëren:

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x \quad \text{voor} \quad 0 < x < \pi, \\ &= -\cos x \quad \text{voor} \quad -\pi < x < 0, \end{aligned}$$

en $f(0) = f(-\pi) = f(\pi) = 0$ ('aanpassing'), zie Figuur 7. Verder zetten we f periodiek met periode 2π voort. De funktie f is nu te ontwikkelen in een sinusreeks:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos x \, \sin nx \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\sin(n+1)x + \sin(n-1)x] \, dx = \\ &= \frac{2n[(-1)^n + 1]}{\pi(n^2 - 1)} \qquad \text{als } n > 1, \end{aligned}$$

Figuur 7:

en

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin 2x \; dx = 0.$$

We vinden

$$\cos x = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \sin 2kx}{4k^2 - 1} \qquad (0 < x < \pi).$$

Op analoge wijze kunnen we een op $]0, \pi[$ gegeven funktie g als cosinusreeks schrijven door g *even* voort te zetten.

Funkties met een periode 2c. Is $g : \mathrm{R} \to \mathrm{C}$ een periodieke funktie met periode $p = 2c$, dan is de funktie f gedefinieerd door

$$f(x) = g(\frac{c}{\pi} x)$$

periodiek met periode 2π. Is de funktie g aangepast, dan is de funktie f dat ook. Uit de Fourierontwikkeling van f volgt nu

$$\begin{aligned} g(x) &= f(\frac{\pi}{c} x) \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{c} + b_n \sin \frac{n\pi x}{c} \right) \qquad (54) \end{aligned}$$

waarin de coëfficiënten gegeven worden door de formules (46)–(48). Substitutie van $f(t) = g(\frac{c}{\pi} t)$ in die formules levert

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2c} \int_{-c}^{c} g(t) \; dt & (55) \\ a_n &= \frac{1}{c} \int_{-c}^{c} g(t) \; \cos \frac{n\pi t}{c} \; dt \quad (n \geq 1), & (56) \\ b_n &= \frac{1}{c} \int_{-c}^{c} g(t) \; \sin \frac{n\pi t}{c} \; dt \quad (n \geq 1). & (57) \end{aligned}$$

Dirichlet probleem. Tenslotte passen we de tot nu toe behandelde Fouriertheorie toe op het Dirichlet probleem voor de cirkelschijf $D = \{z \in \mathrm{C};\ |z| < 1\}$ in het complexe vlak. Dat luidt als volgt: gegeven is een complexwaardige continue funktie μ gedefinieerd op de rand ∂D van D. Gevraagd wordt een continue funktie f op de gesloten eenheidsschijf $\overline{D}$ te vinden die voldoet aan:

(a) f is C^2 en harmonisch op D (dwz. $\triangle f = 0$ op D);

(b) $f = \mu$ op ∂D.

Het idee is als volgt. Eerst lossen we het Dirichlet probleem op voor de funktie $\mu_n(e^{i\varphi}) = e^{in\varphi}$ $(n \in \mathrm{Z})$. Zij f_n de oplossing. Dan schrijven we μ met behulp van Fouriertheorie als superpositie der μ_n :

$$\mu = \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}^{*}\, c_n \mu_n. \tag{58}$$

Tenslotte ligt het dan voor de hand als oplossing f voor het Dirichlet probleem bij de gegeven randfunktie μ te proberen:

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}^{*}\, c_n f_n. \tag{59}$$

Hieronder geven we meer details.

Zij $n \geq 0$. Voor z met $|z| = 1$ geldt $\mu_n(z) = z^n$. De funktie $f_n(z) = z^n$ is harmonisch (zie Paragraaf 1.8), dus oplossing van het Dirichlet probleem bij de randfunktie μ_n. Anderzijds is $\mu_{-n}(z) = \overline{z^n}$ voor $|z| = 1$. Uit de harmoniciteit van f_n volgt gemakkelijk dat $\overline{f_n}$ ook harmonisch is. De funktie $f_{-n}(z) = \overline{z^n}$ is derhalve oplossing van het Dirichlet probleem bij de randfunktie μ_{-n}.

De funktie $g(\varphi) = \mu(e^{i\varphi})$ is continu en periodiek met periode 2π. Om in het vervolg de optredende convergentieproblemen aan te kunnen werken we verder onder de veronderstelling dat g tweemaal continu differentieerbaar is. Door op g Stelling 5.4 toe te passen, vinden we (58), met

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\psi) e^{-in\psi}\, d\psi \quad (n \in \mathrm{Z}).$$

Wegens onze veronderstelling omtrent g geldt dat $|c_n| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (vgl. (39)). Wegens Stelling 4.10 impliceert dit dat de reeks (59) uniform convergeert op $\overline{D}$. Herschrijven we die reeks dan zien we dat $f = f_+ + \overline{f_-}$ met

$$f_+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

en

$$f_-(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{c_{-n}}\, z^n.$$

Uit de schattingen op de coëfficiënten zien we dat f_+ en f_- holomorfe funkties op D definiëren die nog continu zijn op $\overline{D}$. In het bijzonder impliceert dit dat f harmonisch, en daarmee een oplossing van het Dirichletprobleem is.

Tenslotte herschrijven we de reeks voor f als volgt. Voor $0 < r < 1$ en $\varphi \in \mathrm{R}$ geldt:

$$\begin{aligned} f(re^{i\varphi}) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n e^{in\varphi} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} r^n e^{-in\varphi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\psi) \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{in(\varphi-\psi)} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{in(\psi-\varphi)} \right] d\psi, \end{aligned}$$

waarbij de verwisseling van sommatie en integratie geoorloofd is wegens de uniforme convergentie voor vaste r. Door gebruik te maken van de formule voor de som van de meetkundige reeks vinden we na enig rekenwerk tenslotte dat:

$$f(re^{i\varphi}) = \frac{1-r^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{g(\psi)}{1 - 2r\cos(\psi-\varphi) + r^2}\, d\psi.$$

Men kan bewijzen dat de bovenstaande *integraalformule van Poisson* ook geldt voor het geval dat $g(\psi) = \mu(e^{i\psi})$ slechts continu is.

6 Fourier transformatie

6.1 De discrete Fourier transformatie

Laat f een aangepaste 2π-periodieke funktie zijn. Dan noteren we de coëfficiënten van de complexe Fourierreeks ook met

$$\hat{f}(n) := c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx.$$

Merk op dat we $\hat{f}$ op kunnen vatten als funktie $\mathrm{Z} \to \mathrm{C}$, $n \mapsto \hat{f}(n)$. De funktie $\hat{f}$ wordt soms ook de (discrete) **Fouriergetransformeerde** van f genoemd. De formule

$$f(x) = \sum_{n\in\mathrm{Z}}{}^{*}\hat{f}(n)\,e^{inx}, \tag{60}$$

drukt f uit in zijn Fouriergetransformeerde, en wordt om die reden ook wel de **Fourier inversie** formule genoemd. Merk op dat de formule uitdrukt dat f geschreven kan worden als superpositie van elementaire trillingen (e-machten) met frequenties die *gehele veelvouden van* $\frac{1}{2\pi}$ zijn.

De **formule van Parseval** wordt in de nieuwe notatie:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx = \sum_{n\in\mathrm{Z}}|\hat{f}(n)|^2.$$

De fysische interpretatie van het linkerlid is: de energie die correspondeert met f over een volle periode; de interpretatie van $|\hat{f}(n)|^2$ is: de energie waarmee de frequentie $\frac{n}{2\pi}$ vertegenwoordigd is.

Funkties met een periode 2c. In het onderstaande zullen we ook de inversie formule voor een aangepaste $2c$-periodieke funktie $f : \mathrm{R} \to \mathrm{C}$ nodig hebben. We gebruiken de notatie

$$\hat{f}_c(n) := \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(x)e^{-i\frac{n\pi}{c}x}\,dx$$

voor de Fouriergetransformeerde van f; de afhankelijkheid van c is door een index in de notatie tot uitdrukking gebracht. In de huidige situatie luidt de inversieformule als volgt:

$$f(x) = \sum_{n\in\mathrm{Z}}{}^{*}\hat{f}_c(n)\,e^{i\frac{n\pi}{c}x}.$$

De inversieformule drukt nu uit dat f geschreven kan worden als som van elementaire trillingen met frequenties die gehele veelvouden zijn van $\frac{1}{2c}$. Tenslotte luidt de formule van Parseval voor $2c$-periodieke funkties als volgt:

$$\frac{1}{2c}\int_{-c}^{c}|f(x)|^2\,dx = \sum_{n\in\mathrm{Z}}|\hat{f}_c(n)|^2$$

6.2 De continue Fouriertransformatie

Naast een theorie van Fouriertransformatie voor periodieke funkties bestaat er ook een theorie van Fouriertransformatie voor aangepaste funkties $\varphi : \mathrm{R} \to \mathrm{C}$ die **absoluut integreerbaar** zijn; dit laatste betekent dat de oneigenlijke integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)| \, dx$$

convergent is. Merk op dat periodieke funkties (verschillend van de nul-funktie) nooit absoluut integreerbaar zijn.

Van een absoluut integreerbare aangepaste funktie φ is de **Fouriergetransformeerde** de funktie $\hat{\varphi} : \mathrm{R} \to \mathrm{C}$ gedefinieerd door:

$$\hat{\varphi}(\nu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \, e^{-i\nu x} \, dx. \tag{61}$$

De notatie $\hat{\varphi}$ hebben we boven reeds voor de discrete Fouriergetransformeerde gebruikt. In de praktijk zal hierdoor meestal geen verwarring ontstaan, aangezien uit de context duidelijk is of het gaat om periodieke funkties (en hun discrete Fouriergetransformeerden) of om absoluut integreerbare funkties (en hun continue Fouriergetransformeerden).

De huidige Fouriergetransformeerde $\hat{\varphi}$ is een funktie $\mathrm{R} \to \mathrm{C}$. Ook in deze context is er een **Fourier inversie** formule.

Stelling 6.1 (De inversie formule). *Laat $\varphi : \mathrm{R} \to \mathrm{C}$ een aangepaste, absoluut integreerbare funktie zijn. Dan is de Fouriergetransformeerde $\hat{\varphi} : \mathrm{R} \to \mathrm{C}$ een continue funktie. Bovendien geldt*

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\nu) \, e^{i\nu x} \, d\nu, \quad (x \in \mathrm{R}), \tag{62}$$

in die zin dat van de integraal in het rechterlid de hoofdwaarde genomen moet worden.

Opmerking. Is $f : \mathrm{R} \to \mathrm{C}$ een continue funktie, dan zeggen we dat de oneigenlijke integraal $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx$ een hoofdwaarde heeft indien de limiet

$$\lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} f(x) \, dx \tag{63}$$

bestaat; de waarde van de limiet heet dan de hoofdwaarde van de genoemde oneigenlijke integraal. Het is mogelijk dat een oneigenlijke integraal niet convergent is, maar wel een hoofdwaarde heeft.

Voorbeeld.

We beschouwen de funktie $\varphi : \mathrm{R} \to \mathrm{C}$ gedefinieerd door

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{als} \quad |x| < 1 \\ 0 & \text{als} \quad |x| > 1 \\ \frac{1}{2} & \text{als} \quad |x| = 1. \end{cases} \tag{64}$$

Deze funktie is aangepast en absoluut integreerbaar. Voor $\nu \neq 0$ vinden we de Fouriergetransformeerde $\hat{\varphi}(\nu)$ door

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}(\nu) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)e^{-i\nu x}\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} e^{-i\nu x}\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-i\nu x}}{-i\nu}\right]_{-1}^{1} = \frac{\sin\nu}{\pi\nu}.\end{aligned}$$

Anderzijds vinden we

$$\hat{\varphi}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} 1\,dx = \frac{1}{\pi}.$$

Uit

$$\lim_{\nu\to 0}\frac{\sin\nu}{\pi\nu} = \frac{1}{\pi}$$

leiden we af dat de Fouriergetransformeerde $\hat{\varphi}$ inderdaad een continue funktie $\mathrm{R} \to \mathrm{C}$ is. De inversie formule geeft nu de (hoofd)waarde van de integraal:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\nu x}\ \sin\nu}{\pi\nu}\,d\nu. \tag{65}$$

Deze is 0 als $|x| > 1$, hij is $\frac{1}{2}$ als $|x| = 1$ en hij is 1 als $|x| < 1$. Door van (65) het reëele deel te nemen vinden we de hoofdwaarde van de integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\nu x)\ \sin\nu}{\pi\nu}\,d\nu. \tag{66}$$

Ook deze is 0 als $|x| > 1$, hij is $\frac{1}{2}$ als $|x| = 1$ en hij is 1 als $|x| < 1$. Voor $x = 0$ vinden we in het bijzonder dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\nu}{\nu}\,d\nu = \pi.$$

Afleiding van de inversie formule. Het bewijs van de inversie formule geven we hier niet. Veronderstel echter dat φ een twee maal continu differentieerbare funktie die nul is buiten een interval van de vorm $[-R, R]$. Dan zullen we de inversie formule (62) afleiden uit de corresponderende formule voor de discrete Fouriertransformatie

Voor $c \geq R$ kunnen we de beperking $\varphi|_{[-c,c]}$ voortzetten tot een aangepaste $2c$-periodieke funktie, die we met f_c noteren. Voor alle $x \in [-c, c]$ geldt dan:

$$\varphi(x) = f_c(x) = \sum_{n\in\mathrm{Z}}{}^{*}\ \hat{f}_c(n)\,e^{i\frac{n\pi}{c}x}, \tag{67}$$

met

$$\begin{aligned}\hat{f}_c(n) &= \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f_c(x)e^{-i\frac{n\pi}{c}x}\,dx \\ &= \frac{\pi}{c}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c}\varphi(x)e^{-i\frac{n\pi}{c}x}\,dx \quad = \quad \frac{\pi}{c}\,\hat{\varphi}(\frac{n\pi}{c}).\end{aligned} \tag{68}$$

In de laatste uitdrukking is $\hat{\varphi}$ de continue Fouriergetransformeerde van φ; de laatste gelijkheid geldt aangezien φ nul is buiten $[-c, c]$. Zij nu $x \in \mathrm{R}$ willekeurig en zij $c > \max(R, |x|)$. Dan volgt uit (67) en (68) dat

$$\varphi(x) = \sum_{n\in \mathrm{Z}} \hat{\varphi}(\frac{n\pi}{c})\, e^{i(\frac{n\pi}{c})x} \left(\frac{\pi}{c}\right).$$

Het rechterlid is een Riemann som met stapgrootte $\frac{\pi}{c}$ voor de integraal in het rechterlid van (61). Als $c \to +\infty$, dan gaat de stapgrootte naar 0. Men kan laten zien dat:

$$\lim_{c\to\infty} \sum_{n\in \mathrm{Z}} \hat{\varphi}(\frac{n\pi}{c})\, e^{i(\frac{n\pi}{c})x} \left(\frac{\pi}{c}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\nu)\, e^{i\nu x}\, d\,\nu,$$

waarbij de integraal in het rechterlid zelfs absoluut convergent is. Hieruit volgt de inversie formule (62) voor de continue Fouriertransformatie.

De inversie formule (62) drukt φ uit als superpositie van elementaire trillingen, waarbij alle frequenties $\frac{\nu}{2\pi}$ met $\nu \in \mathrm{R}$ vertegenwoordigd zijn. Er is ook weer een **formule van Parseval**. Een aangepaste funktie $\varphi : \mathrm{R} \to \mathrm{C}$ heet kwadratisch integreerbaar indien de integraal $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2\, dx$ convergeert.

Stelling 6.2 (Formule van Parseval). *Laat $\varphi : \mathrm{R} \to \mathrm{C}$ een aangepaste funktie zijn die absoluut en kwadratisch integreerbaar is. Dan is $\hat{\varphi}$ continu en kwadratisch integreerbaar, en er geldt:*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(\nu)|^2\, d\nu.$$

Ditmaal kan het linkerlid geïnterpreteerd worden als de totale energie corresponderend met φ, terwijl $|\hat{\varphi}(\nu|^2$ geïnterpreteerd kan worden als de energiedichtheid waarmee de frequentie $\frac{\nu}{2\pi}$ in de Fourierontbinding van φ vertegenwoordigd is.

Afleiding. Er geldt:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(\nu)|^2\, d\nu &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\nu)\overline{\hat{\varphi}(\nu)}\, d\nu \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\nu)\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(x)}\, e^{i\nu x}\, dx\right) d\nu \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\nu)\overline{\varphi(x)}\, e^{i\nu x}\, dx\, d\nu
\end{aligned}$$

Men kan laten zien dat de twee oneigenlijke integralen in het laatste lid verwisseld mogen worden. Dit geeft

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(\nu)|^2\, d\nu &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(x)} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\nu)\, e^{i\nu x}\, d\nu dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(x)}\, \varphi(x)\, dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2\, dx.
\end{aligned}$$

Voorbeeld.

We beschouwen de funktie φ gedefinieerd door (64). Eerder zagen we dat $\hat{\varphi}(\nu) = (\pi\nu)^{-1}\sin\nu$. Er geldt dat

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x)|^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\,dx = \frac{1}{\pi}.$$

De formule van Parseval levert in dit geval dus dat

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\nu}{\nu}\right)^2\,d\nu = \pi.$$

We eindigen deze paragraaf met een tweetal formules die van groot belang zijn in de toepassingen van de theorie van de Fouriertransformatie. In het vervolg schrijven we ook wel $\mathcal{F}\varphi$ voor $\hat{\varphi}$. We kunnen $\mathcal{F}$ als volgt als lineaire afbeelding opvatten. Zij $\mathcal{A}(\mathrm{R})$ de collectie van absoluut integreerbare aangepaste funkties $\mathrm{R} \to \mathrm{C}$ en zij $C(\mathrm{R})$ de collectie van continue funkties $\mathrm{R} \to \mathrm{C}$. Met de optelling en de scalarvermenigvuldiging van funkties zijn $\mathcal{A}(\mathrm{R})$ en $C(\mathrm{R})$ lineaire ruimten. We beschouwen $\mathcal{F}$ als een afbeelding $\mathcal{A}(\mathrm{R}) \to \mathcal{C}(\mathrm{R})$, $\varphi \mapsto \mathcal{F}\varphi$. Deze afbeelding is linear: voor $\varphi, \psi \in \mathcal{A}(\mathrm{R})$ en $\lambda \in \mathrm{C}$ geldt:

$$\mathcal{F}(\varphi + \lambda\psi) = \mathcal{F}\varphi + \lambda\mathcal{F}\psi.$$

Lemma 6.3 *Laat $\varphi : \mathrm{R} \to \mathrm{C}$ een funktie zijn waarvoor zowel φ als de afgeleide φ' continu en absoluut integreerbaar zijn, en waarvoor $\lim_{R\to\infty}\varphi(R) = \lim_{R\to\infty}\varphi(-R) = 0$. Dan geldt*

$$\mathcal{F}(\frac{d}{dx}\varphi)(\nu) = i\nu\,\mathcal{F}\varphi(\nu)$$

Bewijs: Door toepassing van partiële integratie zien we dat voor $R > 0$ geldt

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}\varphi'(x)e^{-i\nu x}\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[e^{-i\nu x}\varphi(x)\right]_{-R}^{R} + \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}i\nu\,\varphi(x)e^{-i\nu x}\,dx.$$

Door de limiet te nemen voor $R \to \infty$ vinden we het gewenste resultaat. □

Opmerking. Op een geschikte klasse van funkties geldt dus dat

$$\mathcal{F}\,\frac{d}{dx} = (i\nu)\,\mathcal{F};$$

m.a.w., Fouriertransformatie zet differentiatie om in vermenigvuldiging met de funktie $\nu \mapsto i\nu$.

Lemma 6.4 *Laat φ een aangepaste funktie zijn zo dat de funktie $x \mapsto x\varphi(x)$ absoluut integreerbaar is. Dan is*

$$\frac{d}{d\nu}\mathcal{F}(\varphi)(\nu) = \mathcal{F}(-ix\varphi)(\nu).$$

Bewijs: Men kan aantonen dat uit het gegeven volgt dat de volgende differentiatie onder het integraalteken geoorloofd is:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\nu}\mathcal{F}(\varphi)(\nu) &= \frac{1}{2\pi}\frac{d}{d\nu}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\, e^{-i\nu x}\, dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\nu}(\varphi(x)e^{-i\nu x})\, dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,(-ix)\, e^{-i\nu x})\, dx
\end{aligned}$$

Hieruit volgt het beweerde. □

Toepassing. We geven een toepassing van de twee bovenstaande lemma's. Laat a een positieve reële constante zijn en beschouw de funktie $\varphi = \varphi_a$ gedefinieerd door

$$\varphi(x) = e^{-\frac{a}{2}x^2}.$$

Er geldt dat

$$\frac{d}{dx}\varphi(x) = -axe^{-\frac{a}{2}x^2} = -ax\varphi(x).$$

Door Fouriertransformatie toe te passen op het uiterst linker- en het uiterst rechterlid van deze gelijkheid, en door bovendien de bovenstaande lemma's toe te passen, zien we dat

$$i\nu\mathcal{F}\varphi(\nu) = -ai\frac{d}{d\nu}\mathcal{F}\varphi(\nu).$$

De funktie $\psi = \mathcal{F}\varphi$ voldoet dus aan de differentiaalvergelijking $\psi'(\nu) = -a^{-1}\nu\psi(\nu)$. De funktie $\nu \mapsto \varphi_{a^{-1}}(\nu) = e^{-\frac{1}{2a}\nu^2}$ is een oplossing van deze differentiaalvergelijking. Hierdoor gemotiveerd schrijven we $c(\nu) = \psi(\nu)e^{\frac{1}{2a}\nu^2}$. Dan is

$$c'(\nu) = \psi'(\nu)e^{\frac{1}{2a}\nu^2} + \frac{\nu}{a}\psi(\nu)e^{\frac{1}{2a}\nu^2} = 0.$$

De funktie c is derhalve constant en we concluderen dat

$$\hat{\varphi}(\nu) = c\, e^{-\frac{1}{2a}\nu^2}.$$

Door $\nu = 0$ in te vullen vinden we hieruit tenslotte de constante c als volgt:

$$c = \hat{\varphi}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2}x^2}\, dx = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2}{a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}}.$$

Dus

$$\hat{\varphi}_a(\nu) = \frac{e^{-\frac{1}{2a}\nu^2}}{\sqrt{2\pi a}}. \tag{69}$$

Bestuderen we het gedrag voor $a \downarrow 0$, dan zien we dat de funktie φ_a de constante funktie 1 nadert. We zouden daarom kunnen vermoeden dat de energiedichtheid $E_a(\nu)$ waarmee de frequentie $\nu/2\pi$ voorkomt in de Fourierontbinding van φ_a een piek gaat vertonen bij $\nu = 0$ als $a \downarrow 0$. Dit is inderdaad zo: de energiedichtheid wordt beschreven door

$$E_a(\nu) = |\hat{\varphi}_a(\nu)|^2 = \frac{1}{2\pi a} e^{-\frac{1}{a}\nu^2}.$$

De grafiek van E_a is een Gauss funktie met in 0 een piek ter hoogte $(2\pi a)^{-1}$, die steeds smaller wordt als $a \downarrow 0$.

We merken op dat uit het bovenstaande in het bijzonder volgt dat Fouriertransformatie de funktie $x \mapsto \sqrt{2\pi} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ in zichzelf overvoert.

Tenslotte verifiëren we nog dat de gelijkheid van Parseval geldt voor de funktie φ_a. Hiertoe merken we op dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_a(x)|^2 \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \, dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \, dy = \sqrt{\frac{\pi}{a}}. \tag{70}$$

Voorts volgt uit (69) dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}_a(\nu)|^2 \, d\nu = \frac{1}{2\pi a} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_{a^{-1}}(\nu)|^2 \, d\nu = \frac{\sqrt{\pi a}}{2\pi a} = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}}. \tag{71}$$

Uit (70) en (71) blijkt dat de gelijkheid van Parseval in dit geval inderdaad geldt.

7 Machtreeksen

7.1 De convergentiecirkel

In dit hoofdstuk beschouwen we een klasse van reeksen die voor de theorie van complex differentieerbare funkties van bijzonder belang zal blijken te zijn, namelijk die der machtreeksen. Zij α een complex getal, en laat a_n een rij complexe getallen zijn. Dan noemen we de reeks

$$\sum_{n\geq 0} a_n(z-\alpha)^n \tag{72}$$

(met z een complexe variabele) een *machtreeks* rond het punt α. We beschouwen de machtreeks als reeks van funkties in de variabele z. De notatie (72) moet zo opgevat worden dat $a_0(z-\alpha)^0$ staat voor de constante funktie a_0.

Ter vereenvoudiging beperken we ons voorlopig tot machtreeksen rond 0, dus met $\alpha = 0$; door substitutie van $z-\alpha$ voor z blijkt echter dat alle te ontwikkelen theorie ook zal gelden voor machtreeksen rond een willekeurig punt.

Stelling 7.1 *Laat voor zekere $z_0 \neq 0$ de reeks $\sum a_n z_0^n$ convergeren; laat c een reëel getal zijn met $0 < c < |z_0|$. Dan is de reeks $\sum a_n z^n$ uniform en absoluut convergent op de cirkelschijf $|z| \leq c$.*

Bewijs: Uit de convergentie van $\sum a_n z_0^n$ volgt dat $\lim a_n z_0^n = 0$. Er is dus een getal $M > 0$ zo dat voor alle n geldt $|a_n z_0^n| \leq M$. Op genoemde cirkelschijf geldt nu

$$|a_n z_0^n| \leq M\left(\frac{c}{|z_0|}\right)^n$$

waarin $0 < c|z_0|^{-1} < 1$. De absolute convergentie volgt nu uit Stelling 2.10, de uniforme convergentie door toepassing van Stelling 4.10. □

We beschouwen nu de verzameling W van alle $z \in \mathbb{C}$ waarvoor de machtreeks $\sum a_n z^n$ (puntsgewijs) convergeert.

Lemma 7.2 *Er bestaat een unieke $R \in [0,\infty[\, \cup \{\infty\}$ zo dat*

$$\{z \in \mathbb{C};\ |z| < R\} \subset W \subset \{z \in \mathbb{C};\ |z| \leq R\}. \tag{73}$$

Opmerkingen. De unieke R uit bovenstaand lemma heet de *convergentiestraal* van de machtreeks $\sum a_n z^n$. De cirkel $\{z \in \mathbb{C};\ |z| = R\}$ heet de *convergentiecirkel* van de reeks. Bovenstaand lemma zegt dus dat het convergentiegebied W van de machtreeks $\sum a_n z^n$ gelijk is aan de verzameling van alle punten *binnen* de convergentiecirkel verenigd met een *deel* van die convergentiecirkel. Verderop zal blijken dat in de praktijk voor een gegeven machtreeks de convergentiecirkel tamelijk eenvoudig bepaald kan worden en dat de bepaling van het deel van W dat op de convergentiecirkel ligt de meeste moeilijkheden oplevert.

Bewijs: Stel dat $z_0 \in W$. Dan volgt uit Stelling 7.1 dat de reeks $\sum a_n z^n$ convergeert voor iedere z met $|z| < |z_0|$. De cirkelschijf $|z| < |z_0|$ ligt dan dus geheel binnen W. Beschouw de deelverzameling $|W|$ van R bestaande uit alle $|z|$ met $z \in W$. Dan geldt in ieder geval dat $0 \in |W|$, dus $|W|$ is niet leeg. We zullen laten zien dat $R = \sup |W|$ voldoet aan (73). Zij $|z| < R$. Dan bevat $|W|$ een ρ zo dat $|z| < \rho \leq R$; doch $\rho = |z_0|$ voor een $z_0 \in W$ en met Stelling 7.1 blijkt dat $z \in W$. Derhalve is voldaan aan de eerste inclusie van (73). Als $|z| > R$, dan behoort $|z|$ niet tot $|W|$: dus ook aan de tweede inclusie van (73) is voldaan. Tenslotte is het duidelijk dat R door de opgelegde eis uniek bepaald is. $\square$

De volgende stelling is in de praktijk veelal toereikend om de convergentiestraal van een machtreeks te bepalen.

Lemma 7.3 (a) *Bestaat* $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = L$ *dan wordt de convergentiestraal van* $\sum a_n z^n$ *gegeven door* $R = L^{-1}$.

(b) *Bestaat* $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = M$ *dan geldt* $R = M^{-1}$.

Opmerking. Het bovenstaande is zo bedoeld dat als $L = 0$, dan $R = \infty$, terwijl $L = \infty$ impliceert dat $R = 0$.

Bewijs: Veronderstel dat L uit (a) bestaat. Dan geldt dat $\lim \sqrt[n]{|a_n z^n|} = L|z|$ en de conclusie volgt door toepassing van Stelling 2.12. Op soortgelijke manier volgt (b) door toepassing van Stelling 2.13. $\square$

Voorbeelden.

(1) De meetkundige reeks $\sum z^n$ heeft convergentiestraal 1, immers immers $L = 1$.

(2) De reeks $\sum n z^n$ heeft convergentiestraal 1, immers $M = 1$.

(3) De reeks $\sum \frac{z^n}{n!}$ heeft convergentiestraal ∞, immers $M = 0$.

(4) De reeks $\sum n! z^n$ heeft convergentiestraal 0.

(5) Beschouw de reeks $\sum n z^{2n}$; dus $a_{2n} = n$, en $a_{2n+1} = 0$. Hieruit blijkt dat de limieten L en M niet bestaan. Voor de reeks $\sum n w^n$ geldt echter dat $M = 1$, dus $R = 1$. Substitutie $w = z^2$ leert ons nu dat ook de oorspronkelijke reeks convergentiestraal 1 heeft.

Een funktie gedefinieerd door een machtreeks, kan gedifferentieerd worden door de machtreeks term voor term te differentiëren. Het volgende lemma dient als voorbereiding voor dit resultaat.

Lemma 7.4 *Zij R de convergentiestraal van de machtreeks $\sum a_n z^n$. Dan heeft de machtreeks*

$$\sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1} \tag{74}$$

die hieruit door termsgewijze differentiatie ontstaat ook convergentiestraal R.

Bewijs: Stel dat $|z| < R$. Kies een willekeurig reëel getal c zo dat $|z| < c < R$. Uit de convergentie van $\sum a_n c^n$ volgt dat $\lim a_n c^n = 0$, dus er bestaat een $M > 0$ zo dat $|a_n c^n| \leq M$, ofwel

$$|a_n| \leq \frac{M}{c^n}$$

voor alle n, dus

$$|n a_n z^{n-1}| = \mathcal{O}\left(n\left(\frac{|z|}{c}\right)^n\right).$$

Volgens bovenstaand voorbeeld (2) heeft de reeks $\sum n w^n$ convergentiestraal 1. Met het majorantiecriterium zien we nu dat de reeks (74) convergeert voor $|z| < c$. Dit geldt voor iedere $c < R$, dus de reeks (74) heeft convergentiestraal minstens R. De convergentiestraal kan echter niet groter dan R zijn. Want in dat geval zou er een z met $|z| > R$ bestaan waarvoor de reeks (74) absoluut convergeert. Wegens

$$a_n z^n = \mathcal{O}\left(n a_n z^{n-1}\right) \quad (n \to \infty)$$

zou daaruit de absolute convergentie van de reeks $\sum a_n z^n$ volgen, tegenspraak. $\square$

Stelling 7.5 *Laat $\sum a_n z^n$ convergentiestraal R hebben. Dan is de funktie f gedefinieerd door*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

complex differentieerbaar op het gebied $|z| < R$, met afgeleide gegeven door

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \quad (|z| < R).$$

Bewijs: Fixeer z_0 met $|z_0| < R$; kies c zo dat $|z_0| < c < R$. We definiëren een rij funkties g_n, $n \geq 1$ op de schijf $|w| \leq c$ door:

$$g_n(w) = a_n \frac{w^n - z_0^n}{w - z_0} \tag{75}$$

als $w \neq z_0$, en door $g_n(z_0) = n z_0^{n-1}$. Zij voorts g_0 de constante funktie 0. Dan is elke funktie g_n continu in z_0. Verder is voor elke w met $|w| \leq c$:

$$|g_n(w)| = |a_n(w^{n-1} + w^{n-2} z_0 + \ldots + z_0^{n-1})| \leq n|a_n|c^{n-1}.$$

Uit Lemma 7.4 en Stelling 4.10 volgt nu dat de reeks $\sum g_n$ uniform convergeert op $|w| \leq c$. Wegens Stelling 4.6 is de somfunktie continu in z_0, dus

$$\lim_{w \to z_0} \frac{f(w) - f(z_0)}{w - z_0} = \lim_{w \to z_0} \sum_{n=0}^{\infty} g_n(w) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(z_0).$$

Hieruit volgt dat f complex differentieerbaar is in z_0, met de gewenste afgeleide. $\square$

Door herhaald toepassen van de bovenstaande stelling volgt direkt:

Gevolg 7.6 *Een machtreeks stelt binnen zijn convergentiecirkel een willekeurig vaak complex differentieerbare funktie voor. Heeft $\sum a_n z^n$ convergentiestraal $R > 0$ en is*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

dan is $f^{(n)}(0) = n! a_n$.

Laat in het vervolg V een open deelverzameling van C zijn.

Definitie 7.7 Een funktie $f : V \to \mathrm{C}$ heet *analytisch* (of *holomorf*) indien voor elk punt $\alpha \in V$ een in V gelegen cirkelschijf D met middelpunt α bestaat zo dat f op D gegeven wordt door een machtreeks:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n \tag{76}$$

met $a_n \in \mathrm{C}$.

Opmerking. Wegens Stelling 7.5 en Gevolg 7.6 is een analytische funktie dus willekeurig vaak complex differentieerbaar, en zijn de afgeleide funkties $f^{(n)}$ weer analytisch. Verder moeten de coefficienten in (76) wegens Gevolg 7.6 gelijk zijn aan

$$a_n = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}. \tag{77}$$

Derhalve is de machtreeksontwikkeling uniek.

Later zullen we zien dat omgekeerd iedere complex differentieerbare funktie $f : V \to \mathrm{C}$ ook analytisch is: zie Stelling 8.7. Op dit moment hebben we voldoende theorie ontwikkeld om machtreeksontwikkelingen voor enkele bekende complex differentieerbare funkties af te leiden.

Voorbeelden.

(1) De machtreeks $\sum \frac{z^n}{n!}$ heeft convergentiestraal ∞, dus

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

is een complex differentieerbare funktie op C. Er geldt dat $f(0) = 1$ en uit term voor term differentiëren (Gevolg 7.5) blijkt dat $f'(z) = f(z)$ voor alle $z \in$ C. Door toepassing van Stelling 1.10 volgt hieruit dat $f(z) = e^z$. Dus:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (z \in \mathrm{C}). \tag{78}$$

(2) De logarithmische funktie log is complex differentieerbaar op C $\setminus\,]-\infty, 0]$, dus in het bijzonder op de open cirkelschijf D met straal 1 rond het punt 1. De afgeleide van log heeft een machtreeksontwikkeling rond het laatstgenoemde punt:

$$\frac{\mathrm{d} \log z}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{z} = \frac{1}{1-(1-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n. \tag{79}$$

Door toepassing van Lemma 7.3 (b) blijkt dat deze machtreeks convergentiestraal 1 heeft. Beschouw nu de funktie

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (z-1)^n. \tag{80}$$

De machtreeks in (80) heeft als term voor term afgeleide de machtreeks in (79). Wegens Lemma 7.4 is zijn convergentiestraal dus 1 en wegens Gevolg 7.5 is g complex differentieerbaar op de cirkelschijf D. Voorts blijkt uit de machtreeksontwikkelingen dat

$$\frac{d}{dz}(g(z) - \log z) = 0.$$

Door toepassing van Stelling 1.7 concluderen we dat $g(z) - \log z$ constant is op D en door invullen van $z = 1$ in (80) blijkt dat $g(1) - \log 1 = 0$, dus $g = \log$ op D. Er volgt dat

$$\log z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (z-1)^n \qquad (|z-1| < 1).$$

Met de substitutie $w = 1 - z$ geeft dit

$$\log(1-w) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n} \qquad (|w| < 1). \tag{81}$$

Met behulp van het quotientcriterium ziet men gemakkelijk in dat de reeks (81) convergentiestraal 1 heeft.

Vroeger zagen we reeds dat de reeks (81) divergeert voor $w = 1$ en convergeert voor $w = -1$. We besluiten deze paragraaf met twee algemene stellingen die het ons in het onderhavige geval mogelijk maken iets te zeggen over het gedrag van de reeks in andere punten van de convergentiecirkel.

Stelling 7.8 *Zij a_n een monotoon dalende rij positieve reële getallen met $\lim a_n = 0$, en veronderstel dat de machtreeks $\sum a_n z^n$ convergentiestraal 1 heeft. Dan convergeert $\sum a_n z^n$ overal op zijn convergentiecirkel, behalve wellicht in het punt 1.*

Voorbeeld.

De reeks $\sum \frac{z^n}{n}$ heeft convergentiestraal 1 , convergeert dus absoluut voor alle z met $|z| < 1$, en divergeert voor $|z| > 1$. Op de convergentiecirkel $|z| = 1$ geldt het volgende. Voor $z = 1$ krijgen we de harmonische reeks, en deze divergeert. Als $|z| = 1$ en $z \neq 1$ dan kunnen we Stelling 7.8 toepassen en zien we dat de reeks convergeert. Merk op dat de convergentie dan niet absoluut is.

In (81) zagen we dat de bovenstaande reeks voor $|z| < 1$ convergeert met som $\log(1 - z)$. Hoe zit het nu op de convergentiecirkel buiten het punt 1? We zagen dat $\log(1 - z)$ er welgedefinieerd is en dat genoemde reeks er convergeert, maar a priori zegt dat niets over de geldigheid van (81) op de convergentiecirkel (buiten 1). Toch blijkt (81) te gelden:

Stelling 7.9 (Stelling van Abel). *Zij a_n een rij complexe getallen. Convergeert de reeks $\sum a_n z^n$ voor $z = z_0$, dan is*

$$\lim_{t\uparrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n.$$

We keren weer terug naar formule (81), geldig voor $|w| < 1$. Omdat de funktie $\log(1-w)$ complex differentieerbaar dus in het bijzonder continu is in elk punt van de verzameling $|w| \leq 1,\ w \neq 1$, vinden we door toepassing van de stelling van Abel dat voor $|w_0| = 1,\ w_0 \neq 1$ geldt:

$$\log(1 - w_0) = \lim_{t\uparrow 1} \log(1 - t w_0) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_0^n}{n}.$$

Formule (81) is dus geldig voor alle $w \neq 1$ met $|w| \leq 1$. In het bijzonder verkrijgen we door substitutie van $w = -1$ weer de vroeger al eens afgeleide formule

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

(zie het voorbeeld na Stelling 3.1).

7.2 Partiële sommatie

In deze paragraaf geven we de bewijzen van Stellingen 7.8 en 7.9. De bewijzen berusten op een formule van partiële sommatie, zo genoemd wegens de analogie met partiële integratie. Laten rijen a_n en b_n van complexe getallen gegeven zijn, en zij T_n een rij complexe getallen zo dat $b_n = T_n - T_{n-1}$ voor alle $n \geq 1$ (dit is het analogon van een primitieve funktie bij partiële integratie).

Lemma 7.10 (Partiële sommatie). *Voor alle $q > p$ geldt:*

$$\sum_{n=p+1}^{q} a_n b_n = -\sum_{n=p+1}^{q-1}(a_{n+1} - a_n)T_n + a_q T_q - a_{p+1}T_p. \tag{82}$$

Bewijs: Substitutie van $b_n = T_n - T_{n-1}$ in het eerste lid van de bovenstaande gelijkheid levert

$$\sum_{n=p+1}^{q} a_n T_n - \sum_{n=p+1}^{q} a_n T_{n-1}$$

Door in de tweede som van de ontstane uitdrukking de sommatievariabele te herbenoemen en door rekening te houden met randtermen verkrijgt men het laatste lid van (82). □

Stelling 7.11 *Zij a_n een monotoon dalende rij van niet negatieve reële getallen met $\lim a_n = 0$ en zij $\sum b_n$ een complexe reeks, waarvan de partiële sommen B_n een begrensde rij vormen, dwz. er is een $M > 0$ zo dat $|B_n| \leq M$ voor alle n. Dan is de reeks $\sum a_n b_n$ convergent.*

Bewijs: We passen partiële sommatie toe met $T_n = B_n$. Wegens de monotonie van a_n volgt door toepassing van de driehoeksongelijkheid op het tweede lid van (82) dat:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=p+1}^{q} a_n b_n\right| &\leq \sum_{n=p+1}^{q-1}(a_n - a_{n+1})M + a_q M + a_{p+1}M \\ &= (a_{p+1} - a_q + a_q + a_{p+1})M \\ &= 2a_{p+1}M\end{aligned}$$

Zij nu een willekeurige $\epsilon > 0$ gegeven. Dan bestaat er een N zo dat $a_n < \frac{\epsilon}{2M}$ voor alle $n > N$; voor alle $q > p \geq N$ geldt dan dat

$$\left|\sum_{n=p+1}^{q} a_n b_n\right| < \epsilon.$$

Met het Cauchy criterium 2.6 volgt zo de convergentie van de reeks. □

Bewijs van Stelling 7.8: Fixeer z met $|z| = 1$ en $z \neq 1$, en noem $b_n = z^n$. Dan geldt voor de partiële sommen van de reeks $\sum b_n$ dat

$$|B_n| = \left|\frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}\right| \leq \frac{2}{|1 - z|}.$$

De partiële sommen B_n vormen derhalve een begrensde rij en mbv. Stelling 7.11 zien we dat de reeks $\sum a_n z^n$ convergeert voor de gefixeerde waarde van z. □

Alvorens de stelling van Abel te bewijzen, behandelen we een hulplemma.

Lemma 7.12 *Als de complexe reeks $\sum b_n$ convergent is dan is $\sum b_n x^n$ uniform convergent op $[0, 1]$.*

Bewijs: Zij $\epsilon > 0$ willekeurig. Definieer de rij T_n door

$$T_n = -\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k.$$

Dan is $\lim T_n = 0$. Derhalve kunnen we N kiezen zo dat voor alle $n > N$ geldt: $|T_n| < \epsilon$. Omdat $T_n - T_{n-1} = b_n$ kunnen we voor iedere $x \in [0, 1]$ partiële sommatie toepassen met $a_n = x^n$. Formule (82) geeft dan:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=p+1}^{q} b_n x^n\right| &\leq \sum_{n=p+1}^{q-1} |T_n|(x^n - x^{n+1}) + |T_q|x^q + |T_p|x^{p+1} \\
&\leq \epsilon \sum_{n=p+1}^{q-1} (x^n - x^{n+1}) + 2\epsilon \\
&= \epsilon(x^{p+1} - x^q) + 2\epsilon \leq 3\epsilon
\end{aligned}$$

voor alle $x \in [0, 1]$ en alle $q > p > N$. Met behulp van het Cauchy criterium 2.6 concluderen we hieruit dat de reeks $\sum b_n x^n$ convergeert. Door limietovergang $q \to \infty$ vinden we dat

$$\left|\sum_{n=p+1}^{\infty} b_n x^n\right| \leq 3\epsilon$$

voor alle $x \in [0, 1]$ en alle $p > N$. Hieruit volgt de uniforme convergentie. □

Bewijs van Stelling 7.9: Wegens Lemma 7.12 is de reeks $\sum(a_n z_0^n)t^n$ uniform convergent op $[0, 1]$. Pas nu Stelling 4.6 toe. □

8 Integratie en de stelling van Cauchy

8.1 Lijnintegratie in het complexe vlak

In deze paragraaf zullen we definiëren wat we verstaan onder de integraal

$$\int_k f(z)\, dz \tag{83}$$

van een continue funktie f over een in C gelegen georiënteerde stuksgewijze C^1 kromme k. Hierbij volgen we de methode van [Marsden-Tromba, Ch. 6]. Onder een C^1 *pad* (in het Engels path) in C verstaan we een C^1 afbeelding $\sigma : [a, b] \to$ C, $(a < b)$.

Definitie 8.1 Zij σ een pad in C en f : beeld$(\sigma) \to$ C een continue funktie. De integraal van f over σ wordt gedefinieerd door

$$\int_\sigma f(z)dz = \int_a^b f(\sigma(t))\sigma'(t)dt. \tag{84}$$

Opmerking. We kunnen bovenstaande definitie ook formuleren in termen van de integratie van reële eenvormen over een C^1 pad in R^2. Hiertoe vatten we $f(z)dz$ op als de complexe eenvorm

$$\begin{aligned} f(z)dz &= [f_1(z) + if_2(z)]\,[dx + idy] \\ &= [f_1(z)dx - f_2(z)dy] + i\,[f_1(z)dy + f_2(z)dx]\,. \end{aligned}$$

Door nu $(\sigma_1(t), \sigma_2(t))$ te substitueren voor (x, y) zien we dat

$$\int_\sigma f(z)dz =$$

$$\int_a^b [(f_1(\sigma(t))\sigma_1'(t) - f_2(\sigma(t))\sigma_2'(t)) + i(f_1(\sigma(t))\sigma_2'(t) + f_2(\sigma(t))\sigma_1'(t))]\, dt$$

hetgeen weer gelijk is aan (84).

Voorbeelden.

(1) Beschouw het pad $\gamma(t) = re^{it}$, $0 \le t \le \pi$, dat een halve cirkel met straal r beschrijft $(r > 0)$. Dan is voor $n \in$ N :

$$\begin{aligned} \int_\gamma z^n\, dz &= \int_0^\pi [re^{it}]^n ire^{it}\, dt \\ &= ir^{n+1}\int_0^\pi e^{(n+1)it}\, dt = \frac{r^{n+1}}{n+1}\left[(-1)^{n+1} - 1\right]. \end{aligned}$$

(2) Beschouw het pad $\sigma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, dat de eenheidscirkel in positieve zin doorloopt. Dan is voor $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_\sigma z^n \, dz = \int_0^{2\pi} ie^{(n+1)it} \, dt = 0.$$

(3) We beschouwen de analytische funktie $\frac{1}{z}$ op $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, en het in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ gelegen C^1 pad σ uit het bovenstaande voorbeeld (2). Dan is

$$\int_\sigma \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} \, ie^{it} dt = 2\pi i. \tag{85}$$

Het beeld k van een C^1 pad $\sigma : [a,b] \to \mathbb{C}$ met $\sigma'(t) \neq 0$ voor alle $a \leq t \leq b$, heet *C^1 kromme.* Door van een kromme begin- en eindpunt te specificeren leggen we zijn doorlooprichting of *oriëntatie* vast. Een pad $\sigma : [a,b] \to \mathbb{C}$ met $\sigma'(t) \neq 0$ voor alle $a \leq t \leq b$ dat k als beeld heeft heet een parametrisering van k. Is bovendien $\sigma(a)$ gelijk aan het beginpunt van k en $\sigma(b)$ aan het eindpunt van k, dan heet de parametrisering σ *oriëntatiebehoudend.*

Zij k een georiënteerde C^1 kromme in $\mathbb{C}$ en $f : k \to \mathbb{C}$ een continue funktie. We definiëren de integraal van f over k door:

$$\int_k f(z)dz = \int_\sigma f(z)dz, \tag{86}$$

met σ een oriëntatiebehoudende parametrisering van k. Deze definitie is correct omdat het rechterlid van (86) onafhankelijk is van de keuze van de georiënteerde parametrisering σ (hiervoor verwijzen we naar [Tromba-Marsden, Ch.6]).

Tenslotte verstaan we onder een georiënteerde stuksgewijze C^1 kromme een eindige vereniging $k = k_1 \cup k_2 \cup ... \cup k_r$ van georiënteerde C^1 krommen zodanig dat voor elke $1 \leq j < r$ het eindpunt van k_j samenvalt met het beginpunt van k_{j+1}. Is f een op k gedefinieerde complexwaardige continue funktie, dan definiëren we

$$\int_k f(z)dz = \int_{k_1} f(z)dz + \int_{k_2} f(z)dz + \ldots + \int_{k_r} f(z)dz. \tag{87}$$

Als het beginpunt van k_1 samenvalt met het eindpunt van k_r dan heet de kromme k *gesloten.* Een georiënteerde gesloten C^1 kromme k heet *enkelvoudig* indien hij geen zelfdoorsnijdingen heeft.

Met kromme zullen we in het vervolg steeds bedoelen: een georiënteerde stuksgewijze C^1 kromme.

Voor de gebruikelijke eigenschappen van lijnintegralen verwijzen we naar [Marsden-Tromba, Ch. 6]. Daarnaast vermelden we hier nog een aantal eigenschappen die we in de toekomst nodig zullen hebben.

Stelling 8.2 *Zij k een kromme in* C *en $f : k \to$* C *een continue funktie die we op k als volgt kunnen schatten (met $M > 0$):*

$$|f(z)| \le M, \qquad z \in k.$$

Dan geldt, met $l(k) = \mathrm{lengte}(k)$:

$$\left| \int_k f(z)\, dz \right| \le Ml(k).$$

Bewijs: Eerst splitsen we de kromme k in eindig vele stukken k_i die elk een parametrisering $\gamma_i : [a_i, b_i] \to$ C toelaten. Voor elke i geldt

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_i} f(z)\, dz \right| &= \left| \int_{a_i}^{b_i} f(\gamma_i(t))\gamma_i'(t)\, dt \right| \\ &\le \int_{a_i}^{b_i} M|\gamma_i'(t)|\, dt = Ml(\gamma_i). \end{aligned}$$

Wegens $\int_k f(z)\, dz = \sum_i \int_{\gamma_i} f(z)\, dz$ volgt hieruit dat

$$\begin{aligned} \left| \int_k f(z)\, dz \right| &\le \sum_i \left| \int_{\gamma_i} f(z)\, dz \right| \\ &\le \sum_i Ml(\gamma_i) = Ml(k). \end{aligned}$$

□

Stelling 8.3 *Zij k een kromme in* C *en laat voor elke $n \in$* N *een continue funktie $F_n : k \to$* C *gegeven zijn. Veronderstel verder dat de rij F_n uniform convergeert op k, met limiet F. Dan is:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_k F_n(z)\, dz = \int_k F(z)\, dz.$$

Bewijs: Volgens Stelling 4.6 is de funktie F continu op k, zodat de integraal in het rechterlid bestaat. Verder geldt voor iedere $z \in k$ dat $|F_n(z) - F(z)| \le \|F_n - F\|_k$. Met behulp van de voorgaande stelling zien we nu dat

$$\left| \int_k F_n(z)\, dz - \int_k F(z)\, dz \right| \le l(k)\|F_n - F\|_k.$$

Wegens de uniforme convergentie volgt hieruit de bewering.

Gevolg 8.4 *Zij k een kromme in* C *en laat voor elke $n \in$* N *een continue funktie $f_n : k \to$* C *gegeven zijn. Veronderstel voorts dat de reeks $\sum f_n$ op k uniform convergeert. Dan geldt:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_k f_n(z)\, dz = \int_k \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \right) dz.$$

Bewijs: Pas de voorgaande stelling toe op de rij F_n van partiële sommen, en gebruik dat integratie verwisseld mag worden met *eindige* sommatie. □

Figuur 8:

8.2 De stelling van Cauchy

Zij B een begrensde open deelverzameling van R^2 met een stuksgewijze C^1 rand ∂B. In een dergelijke situatie zullen we steeds veronderstellen dat ∂B voorzien is van de geïnduceerde orientatie: dat is de orientatie die wordt gekenmerkt door het feit dat iedere georienteerde raakvector aan ∂B over een hoek $+\frac{1}{2}\pi$ gedraaid moet worden om tot inwendige normaalvector over te gaan (zie Figuur 8). In [Marsden-Tromba, Ch. 6] hebben we gezien dat de stelling van Green geldig is voor deze oriëntatie van ∂B. We brengen die stelling hieronder in herinnering.

We schrijven $\overline{B}$ voor de afsluiting $B \cup \partial B$ van B. Onder een *open omgeving* van $\overline{B}$ verstaan we een open deelverzameling V van C die $\overline{B}$ bevat. Veronderstel nu dat P en Q continu differentieerbare (reëel of complexwaardige) funkties op een open omgeving van $\overline{B}$ zijn. Dan luidt de stelling van Green dat

$$\int_{\partial B} P dx + Q dy = \int_B (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dx dy.$$

We beschouwen nogmaals de eenvorm $f(z)dz$. Deze is te herschrijven als $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ met $P(x,y) = f_1(z) + i f_2(z)$ en $Q(x,y) = i f_1(z) - f_2(z) = iP(x,y)$. De Cauchy-Riemann vergelijkingen (4) kunnen geherformuleerd worden als

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

zodat we door toepassing van de stelling van Green het volgende resultaat verkrijgen.

Stelling 8.5 (Cauchy). *Zij $B \subset \mathrm{C}$ een begrensde open verzameling met stuksgewijze C^1 rand ∂B. Dan geldt voor iedere complex differentieerbare funktie f gedefinieerd op een open omgeving V van $\overline{B}$ dat*

$$\int_{\partial B} f(z) dz = 0.$$

Figuur 9:

Deze stelling dient met de nodige zorgvuldigheid gehanteerd te worden, zoals blijkt uit Voorbeeld (3) van Paragraaf 8.1. De funktie $z \to \frac{1}{z}$ is complex differentieerbaar op de open verzameling $V = \mathrm{C} \setminus \{0\}$. Het beeld van het pad $\sigma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ is de eenheidscirkel in het complexe vlak. Dit is de rand ∂B van de begrensde verzameling $B = \{z \in \mathrm{C};\ \ |z| < 1\}$. De afsluiting $\overline{B} = \{z \in \mathrm{C};\ \ |z| \leq 1\}$ is niet geheel in V gelegen, zodat Stelling 8.5 niet direkt toepasbaar is. Toch heeft de stelling een interessant gevolg voor soortgelijke situaties. In het vervolg gebruiken we de notatie (2) uit Hoofdstuk 1.

Stelling 8.6 (De integraalformule van Cauchy). *Zij $B \subset \mathrm{C}$ een begrensde open verzameling met stuksgewijze C^1 rand ∂B, en zij $\alpha \in B$. Dan geldt voor iedere complex differentieerbare funktie f gedefinieerd op een open omgeving V van $\overline{B}$ dat*

$$\int_{\partial B} \frac{f(z)}{z-\alpha} dz = 2\pi i f(\alpha). \tag{88}$$

Bewijs: Kies een $\epsilon > 0$ zo dat de afsluiting van $D(\alpha, \epsilon)$ geheel binnen B ligt (dit is mogelijk, want B is open). We schrijven γ_ϵ voor de (georienteerde) rand van $D(\alpha, \epsilon)$. Zij nu A de verzameling van punten van B die niet tot de afsluiting van $D(\alpha, \epsilon)$ behoren (zie Figuur 9).

Omdat $\frac{f(z)}{z-\alpha}$ een complex differentieerbare funktie op een open omgeving van $\overline{A}$ is is zijn integraal over ∂A gelijk aan nul. De georiënteerde rand ∂A is de vereniging van de georiënteerde rand ∂B en $-\gamma_\epsilon$ (de kromme die uit γ_ϵ verkregen wordt door de oriëntatie om te draaien). Uit Stelling 8.5 volgt nu:

$$0 = \int_{\partial A} \frac{f(z)}{z-\alpha} dz$$

$$= \int_{\partial B} \frac{f(z)}{z-\alpha}dz - \int_{\gamma_\epsilon} \frac{f(z)}{z-\alpha}dz$$

De kromme γ_ϵ wordt geparametriseerd door $\gamma_\epsilon(t) = \alpha + \epsilon e^{it}$, $(0 \leq t \leq 2\pi)$. Door deze parametrisering te substitueren in de laatste integraal krijgen we

$$\int_{\partial B} \frac{f(z)}{z-\alpha}dz = \int_0^{2\pi} if(\alpha + \epsilon e^{it})dt. \tag{89}$$

Deze identiteit blijft behouden als we ϵ naar nul laten naderen. Als we kunnen aantonen dat de laatste integraal dan naar $2\pi i f(\alpha)$ nadert, zijn we klaar. Welnu

$$\left|\int_0^{2\pi} if(\alpha + \epsilon e^{it})dt - \int_0^{2\pi} if(\alpha)dt\right| \leq$$

$$\int_0^{2\pi} \left|f(\alpha + \epsilon e^{it}) - f(\alpha)\right| dt \leq$$

$$2\pi \max\left(\left|f(\alpha + \epsilon e^{it}) - f(\alpha)\right|;\ \ 0 \leq t \leq 2\pi\right) \to 0 \text{ als } \epsilon \to 0.$$

Inderdaad nadert de laatste integraal in (89) dus naar $\int_0^{2\pi} if(\alpha)dt = 2\pi i f(\alpha)$. □

8.3 Machtreeksontwikkelingen

Zij V weer een open deel van C. We brengen Definitie 7.7 in herinnering: onder een *analytische* of *holomorfe* funktie op V verstaan we een funktie $f : V \to \mathbb{C}$ die in elk punt α van V een lokale machtreeksontwikkeling heeft.

In Gevolg 7.5 hebben we bewezen dat iedere analytische funktie complex differentieerbaar is. Met behulp van de integraalformule van Cauchy zullen we hieronder bewijzen dat het omgekeerde ook waar is.

Stelling 8.7 *Laat f een complex differentieerbare funktie zijn, gedefinieerd op een open verzameling $V \subset \mathbb{C}$. Zij $\alpha \in V$ en zij D een open cirkelschijf met middelpunt α waarvan de afsluiting $\overline{D}$ nog in V ligt. Dan geldt voor alle $z \in D$ dat:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-\alpha)^n, \tag{90}$$

waarbij de coëfficiënten gegeven worden door:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(w)}{(w-\alpha)^{n+1}}dw. \tag{91}$$

Bewijs: Schrijf $D = D(\alpha, \rho)$, met $\rho > 0$. Fixeer $z \in D$. Dan geldt op grond van de integraalformule van Cauchy dat:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(w)}{w - z} dw. \tag{92}$$

We gaan de integrand van (92) in een reeks ontwikkelen; verwisseling van integratie en sommatie zal dan (90) opleveren.

Voor $w \in V$ met $|w - \alpha| > |z - \alpha|$ kunnen we schrijven:

$$\begin{aligned} \frac{1}{w - z} &= \frac{1}{w - \alpha} \frac{1}{\left(1 - \frac{z-\alpha}{w-\alpha}\right)} \\ &= \frac{1}{w - \alpha}\left(1 + \frac{z - \alpha}{w - \alpha} + \left(\frac{z - \alpha}{w - \alpha}\right)^2 + \ldots\right). \end{aligned} \tag{93}$$

Voor alle $w \in \partial D$ geldt dat

$$\left| \frac{z - \alpha}{w - \alpha} \right| = \frac{|z - \alpha|}{\rho} < 1.$$

Omdat we z vast genomen hadden concluderen we dat de reeks (93) uniform in de variabele w convergeert op ∂D. We substitueren deze reeks in de integrand van (92); wegens Gevolg 8.4 is verwisseling van integratie en sommatie geoorloofd. Dit geeft (90). $\square$

Gevolg 8.8 *Zij f een complexwaardige funktie gedefinieerd op een open deel V van* C. *Dan zijn de onderstaande uitspraken equivalent.*

(a) *f is complex differentieerbaar op V.*

(b) *f is analytisch op V.*

Bewijs: De implicatie $(b) \Rightarrow (a)$ is een direkt gevolg van Gevolg 7.5. Om in te zien dat de omgekeerde implicatie geldt beschouwen we een punt $\alpha \in V$. Omdat V open is, is er een $\rho > 0$ zo dat de afsluiting van de schijf $D(\alpha, \rho)$ bevat is in V. De funktie f heeft wegens de bovenstaande stelling dus een machtreeksontwikkeling op die schijf. $\square$

Opmerkingen. In het bijzonder zien we dat een complex differentieerbare funktie $f : V \to$ C willekeurig vaak complex differentieerbaar op V is (gebruik Gevolg 7.6). In Gevolg 7.6 zagen we dat de coëfficiënten c_n van de reeks (90) uniek bepaald zijn door de formule (77). Combineren we dit met het bovenstaande dan concluderen we dat

$$c_n = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{(z - \alpha)^{n+1}} dz \tag{94}$$

voor *iedere* cirkelschijf D met middelpunt α waarvan de afsluiting in V ligt. In het bijzonder is dus de integraal in (94) onafhankelijk van de keuze van D (ga na dat men dit ook kan inzien door Stelling 8.5 te gebruiken).

We definiëren de afstand d van α tot ∂V door

$$d := \sup\{\rho > 0;\ \overline{D}(\alpha, \rho) \subset V\}.$$

Als $z \in D(\alpha, d)$ dan is er een $0 < \rho < d$ zo dat $z \in D(\alpha, \rho)$, terwijl de afsluiting van $D(\alpha, \rho)$ bevat is in V. We concluderen dat (90) geldig is op $D(\alpha, d)$. In het bijzonder geldt:

De convergentiestraal van de reeks (90) is minstens de afstand d van α tot de rand ∂V van V.

Voorbeelden.

(1) Als voorbeeld beschouwen we nog eens de exponentiële funktie $z \mapsto e^z$ (zie ook Voorbeeld (1) onder Gevolg 7.6). Deze funktie is complex differentieerbaar op de gehele verzameling $\mathbb{C}$. Met behulp van het bovenstaande concluderen we nu direkt dat e^z een machtreeksontwikkeling rond 0 toelaat, met convergentiestraal ∞. De coëfficiënten worden nu gevonden door de eerste gelijkheid in formule (94) toe te passen. Uiteraard geeft dit weer de formule (78).

(2) De funktie $w \mapsto \log(1 - w)$ is complex differentieerbaar op de open schijf $|w| < 1$. Op die schijf heeft de funktie dus een convergente machtreeksontwikkeling, waarvan de coëfficiënten weer gevonden kunnen worden mbv. (94). Dit levert uiteraard weer formule (81).

(3) Als derde voorbeeld beschouwen we de funktie $g(z) = \frac{1}{1+z^2}$. Deze funktie is complex differentieerbaar op de open verzameling $V = \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ (gebruik Stelling 1.2 om dit in te zien). Zonder enige berekening uit te voeren concluderen we nu dat g op de schijf $|z| < 1$ gegeven wordt door de convergente machtreeks

$$\sum (n!)^{-1} g^{(n)}(0) z^n. \tag{95}$$

In het bijzonder heeft deze machtreeks convergentiestraal minstens 1. We zouden de machtreeks kunnen bepalen door $g^{(n)}(0)$ te berekenen voor elke $n \in \mathbb{N}$. Het is in dit geval echter gemakkelijker om $z^2 = -w$ te substitueren en de bekende reeksontwikkeling voor $(1 - w)^{-1}$ te gebruiken. Dit levert:

$$\frac{1}{1 + z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \quad (|z| < 1). \tag{96}$$

Dat de convergentiestraal van bovenstaande reeks niet groter, en dus precies gelijk is aan 1, zal in de volgende paragraaf verklaard worden uit het feit dat de funktie g niet complex differentieerbaar is in de punten i en $-i$ die afstand 1 tot de oorsprong hebben.

De ongelijkheden van Cauchy. We sluiten deze paragraaf af met enkele interessante gevolgen van Stelling 8.7. Laat f analytisch zijn in het gehele complexe vlak. Een dergelijke analytische funktie heet ook wel *geheel.* Volgens formule (94) hebben we

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{k_R} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz,$$

waarin k_R de positief georienteerde cirkel met middelpunt 0 en straal R is. De formule is geldig voor iedere waarde $R > 0$. Is M_R het maximum van $|f(z)|$ op k_R, dan is (vgl. Stelling 8.2)

$$\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi R \frac{M_R}{R^{n+1}} = \frac{M_R}{R^n}.$$

Deze schattingen voor de coëfficiënten van de machtreeks van f rond 0 staan bekend als de ongelijkheden van Cauchy. Een direkt gevolg is:

Stelling 8.9 (Stelling van Liouville.)
Een begrensde gehele analytische funktie is constant.

Bewijs: Zij f een gehele analytische funktie die begrensd is, dwz. er is een constante $M > 0$ zo dat $|f(z)| \leq M$ voor alle $z \in \mathbb{C}$. Uit de Cauchy ongelijkheden volgt nu dat $|(n!)^{-1} f^{(n)}(0)| \leq M R^{-n}$ voor elke n en elke $R > 0$. Door de limiet te nemen voor $R \to \infty$ concluderen we dat $f^{(n)}(0) = 0$ voor alle $n \geq 1$. Hieruit volgt dat $f(z) = f(0)$ voor alle $z \in \mathbb{C}$. $\square$

Een fraai gevolg van de stelling van Liouville is het volgende.

Gevolg 8.10 *Ieder niet constant polynoom heeft tenminste één nulpunt in het complexe vlak.*

Bewijs: Beschouw een polynoom $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_p z^p$. Veronderstel dat $f(z) \neq 0$ voor alle $z \in \mathbb{C}$; we zullen aantonen dat deze veronderstelling tot een tegenspraak leidt. Uit de veronderstelling volgt dat de funktie $g(z) = f(z)^{-1}$ geheel analytisch is. Door te schrijven

$$g(z) = \frac{1}{z^p \left[a_p + a_{p-1} z^{-1} + \ldots + a_0 z^{-p}\right]}$$

blijkt dat $g(z) \to 0$ als $|z| \to \infty$. Er bestaat derhalve een $R > 0$ zo dat $|g(z)| \leq 1$ voor alle z met $|z| > R$. Anderzijds is g continu en derhalve begrensd op de gesloten en begrensde verzameling $\{z \in \mathbb{C};\ |z| \leq R\}$. We concluderen dat g begrensd en dus wegens bovenstaande stelling van Liouville constant is: dit impliceert dat f constant is, tegenspraak. $\square$

Als een complex analytische funktie f het punt $\alpha \in \mathrm{C}$ als nulpunt heeft, dan is de machtreeksontwikkeling van f rond α van de vorm

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} b_k(z-\alpha)^k, \tag{97}$$

met $m \geq 1$, en $b_m \neq 0$. Het getal m heet de multipliciteit van het nulpunt α. Schrijven we

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+m}(z-\alpha)^k$$

dan is g analytisch rond α, terwijl $g(\alpha) \neq 0$, en

$$f(z) = g(z)(z-\alpha)^m. \tag{98}$$

Omgekeerd geldt: als we f kunnen schrijven als (98) met g analytisch rond 0 en $g(\alpha) \neq 0$, dan is α een nulpunt van f met multipliciteit m.

We beschouwen nu weer een polynoom f, van de graad $n \geq 1$. Dit polynoom is niet constant dus heeft een nulpunt α. Zij m de multipliceit van dit nulpunt. Dan breekt de machtreeks van f rond α af na de $n-$de macht (immers de hogere afgeleiden van f verdwijnen, gebruik nu (94)); derhalve is de funktie g in de ontbinding (98) een polynoom van de graad $n-m$. Door nu dezelfde redenering toe te passen op g enzovoorts, zien we in:

Ieder polynoom f van de graad $n \geq 1$ is te schrijven als produkt van lineaire factoren

$$f(z) = A \prod_{j=1}^{k} (z-\alpha_j)^{m_j}$$

met $A \in \mathrm{C}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ verschillende complexe getallen en met $m_1, \ldots, m_k \in \mathrm{Z}$, en $m_1 + \ldots + m_k = n$.

De α_j $(j = 1, \ldots, k)$ zijn uiteraard de wortels van het polynoom, de constanten m_j zijn hun respectievelijke multipliceiten.

8.4 Het principe van analytische voortzetting

Stelling 8.11 *Laat f en g analytische funkties zijn op een open cirkelschijf D met middelpunt α. Zij α_n een rij punten met $\alpha_n \neq \alpha$, terwijl $\lim \alpha_n = \alpha$, en veronderstel dat $f(\alpha_n) = g(\alpha_n)$ voor elke $n \in \mathrm{N}$. Dan is $f(z) = g(z)$ voor alle $z \in D$.*

Bewijs: Schrijf $h = f - g$; dan is h analytisch op D, dus voor alle $z \in D$ geldt dat

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$$

Figuur 10:

met $a_n = h^{(n)}(\alpha)/n!$. Uit het gegeven volgt dat $h(\alpha_n) = 0$ voor alle $n \in \mathrm{N}$. Derhalve is $a_0 = h(\alpha) = \lim_{n\to\infty} h(\alpha_n) = 0$. Hieruit volgt dat

$$a_1 = \lim_{z\to\alpha} \frac{h(z)}{z-\alpha}$$

en door in deze limiet $z = \alpha_n$ te substitueren concluderen we dat $a_1 = 0$. Hieruit volgt weer dat

$$a_2 = \lim_{z\to\alpha} \frac{h(z)}{(z-\alpha)^2}.$$

Zo doorgaande vinden we dat alle α_n nul zijn. □

Bovenstaande stelling blijkt ook te gelden voor algemenere verzamelingen dan de open schijf D.

Definitie 8.12 Een open deelverzameling V van C heet *samenhangend* als voor ieder tweetal punten α en β in V een geheel in V gelegen kromme k bestaat met beginpunt α en eindpunt β. Een samenhangende open deelverzameling van C heet ook wel *gebied*.

Voorbeelden.

(1) De open verzameling $V = \{z \in \mathrm{C};\ \ |z| < 3,\ |z-1| > 1\}$ is samenhangend, zoals uit Figuur 11 blijkt.

(2) Zij $W_1 = \{z \in \mathrm{C};\ \ |z-1| < 1\}$ en zij $W_2 = \{z \in \mathrm{C};\ \ \mathrm{Re}\, z < -1\}$. Dan zijn W_1 en W_2 open en samenhangende verzamelingen; hun vereniging $W = W_1 \cup W_2$ is open maar niet samenhangend, dus geen gebied.

Onderstaande stelling is de generalisatie van Stelling 8.11 waarop we in het bovenstaande doelden.

Figuur 11:

Stelling 8.13 *Laat f en g analytisch zijn op een gebied G. Laat voorts α een punt in G zijn, en α_n een rij punten in $G \setminus \{\alpha\}$ met limiet α. Als $f(\alpha_n) = g(\alpha_n)$ voor elke $n \in \mathrm{N}$, dan is $f(z) = g(z)$ voor alle $z \in G$.*

Bewijs: (Voor de liefhebber). Beschouw een willekeurig C^1 pad $\gamma : [0,1] \to G$ met $\gamma(0) = \alpha$. Als we kunnen bewijzen dat

$$f(\gamma(t)) = g(\gamma(t)) \tag{99}$$

voor alle $t \in [0,1]$ dan zijn we klaar. Want dan volgt mbv. Stelling 8.11 dat $f = g$ in een volle omgeving van $\gamma(1)$. We concluderen dan dat $f = g$ in een omgeving van ieder punt β dat binnen G vanuit α met een C^1 pad te bereiken is. Door eventueel paden aaneen te schakelen kunnen we dan ieder punt $\beta \in G$ bereiken en zo het bewijs voltooien.

De juistheid van (99) voor alle $t \in [0,1]$ is niet vanzelfsprekend. Door toepassing van Stelling 8.11 zien we weliswaar dat $f = g$ geldt in een volle omgeving van α. Derhalve geldt voor $\delta > 0$ voldoende klein dat aan (99) voldaan is voor voor alle $t \in [0, \delta]$. Wederom Stelling 8.11 toepassend zien we dat we vervolgens een $\delta_1 > 0$ kunnen vinden zo dat aan (99) voldaan is voor alle $t \in [0, \delta + \delta_1]$. Zo zouden we door kunnen gaan, echter zonder een garantie te hebben dat uiteindelijk het gehele interval $[0,1]$ opgevuld wordt. Het volgende argument biedt een oplossing voor dit probleem. We beschouwen de verzameling Σ van getallen $0 < s < 1$ met de eigenschap dat (99) geldt voor alle $t \in [0, s]$. Er geldt $\delta \in \Sigma$, dus Σ is niet leeg en naar boven begrensd en bezit derhalve een supremum s_0 (vergelijk Stelling 4.3). Er moet gelden dat (99) geldt voor alle $t \in [0, s_0[$. Mbv. Stelling 8.11 concluderen we nu dat $f = g$ in een omgeving van $\gamma(s_0)$. Omdat $s_0 = \sup \Sigma$ concluderen we dat $s_0 < 1$ onmogelijk is. Dus $s_0 = 1$ en het bewijs is compleet. $\square$

Opmerking. Als twee analytische funkties f en g dezelfde machtreeksontwikkeling rond een gegeven punt α van een gebied G hebben dan geldt $f = g$ op een (in eerste instantie

Figuur 12:

wellicht kleine) omgeving U van α. Uit het bovenstaande resultaat volgt dan dat $f = g$ op het hele gebied G : de identiteit van de analytische funkties f en g zet zich als het ware voort van U tot G. Stelling 8.13 staat daarom ook wel bekend als het *principe van analytische voortzetting.*

Als toepassing van het principe van analytische voortzetting beschouwen we nogmaals de funktie $g(z) = (1 + z^2)^{-1}$, analytisch op de open verzameling $V = \mathrm{C} \setminus \{-i, i\}$. In het eerder in deze paragraaf behandelde Voorbeeld (3) zagen we reeds zonder berekening dat zijn machtreeks (95) rond nul convergentiestraal $R \geq 1$ moet hebben. We zullen aantonen dat $R = 1$. Want stel dat $R > 1$, en beschouw de analytische funktie f die op de cirkelschijf $D(0, r)$ gegeven wordt door de machtreeks (95.) Omdat $D(0, R) \setminus \{-i, i\}$ samenhangend is concluderen we met behulp van Stelling 8.13 dat $g = f$ op $D(0, R) \setminus \{-i, i\}$. Nu is f differentieerbaar in i en $-i$, dus er volgt dat de discontinuïteiten van $g(z) = (1 + z^2)^{-1}$ in $-i$ en i ophefbaar zijn, hetgeen onjuist is: tegenspraak.

Een tweede situatie waarin het principe van analytische voortzetting optreedt is de volgende. We beschouwen een gebied G met de eigenschap dat $G \cap \mathrm{R}$ een niet leeg open interval I omvat (zie Figuur 12). Laat een φ een continue funktie $I \to \mathrm{C}$ zijn. We zeggen dat φ analytisch voortzetbaar is tot G als er een analytische funktie $f : G \to \mathrm{C}$ bestaat met $f = \varphi$ op I; deze funktie f heet dan een *analytische voortzetting* van φ. Wegens Stelling 8.13 is er ten hoogste één zo'n analytische voortzetting; we spreken dan ook van *de* analytische voortzetting.

Voorbeelden.

(1) De verzameling $G = \mathrm{C} \setminus]-\infty, 0]$ is een gebied. In paragraaf 1.5 definieerden we de complex differentieerbare funktie $f(z) = \log z$ op G met behulp van de formule

$$\log z = \log |z| + i \arg z.$$

In het bijzonder is deze funktie op het reële interval $[0, \infty[$ dus gelijk aan de bekende logarithmische funktie. Op grond van het bovenstaande is f de enige analytische funktie op $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ met de laatstgenoemde eigenschap: f is de analytische voortzetting van de oorspronkelijk op $]0, \infty[$ gedefinieerde logarithmische funktie tot het gebied $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$.

(2) De funktie $z \mapsto e^z$ is de analytische voortzetting tot $\mathbb{C}$ van de oorspronkelijk op $\mathbb{R}$ gedefinieerde exponentiële funktie.

(3) De funkties

$$\sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{en} \quad \cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

zijn de analytische voortzettingen tot $\mathbb{C}$ van de reële sinus en cosinus funktie. Substitutie van de machtreeksontwikkeling (78) voor de e-machten in bovenstaande formules geeft:

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{ en } \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Een identiteit als $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ die we kennen voor alle $z \in \mathbb{R}$ is wegens analytische voortzetting geldig voor alle $z \in \mathbb{C}$. Immers de funktie $\varphi(z) := \sin^2 z + \cos^2 z$ is analytisch op $\mathbb{C}$ en gelijk aan de (analytische) constante funktie 1 op $\mathbb{R}$. Derhalve is $\varphi = 1$ op $\mathbb{C}$. Op soortgelijke wijze ziet men in dat goniometrische formules als $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$ gelden voor complexe z.

(4) Beschouw de funktie $x \mapsto \arctan x$ op $\mathbb{R}$. In het college Infinitesimaalrekening A zagen we dat

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \tag{100}$$

voor alle $x \in]-1, 1[$. Met behulp van het quotient criterium zien we in dat de machtreeks in (100) convergentiestraal 1 heeft. Hieruit volgt dat arctan analytische voortzetting naar de open schijf $|z| < 1$ toelaat.

Uiteraard is de funktie

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

analytisch buiten de punten $\frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Voor $z \in]-1, 1[$ geldt dat $\tan(\arctan z) = z$. Wegens analytische voortzetting geldt deze identiteit ook voor complexe z in de buurt van 0, maw. arctan is de lokale inverse van de analytische funktie tan rond 0.

8.5 Rekenen met machtreeksen

Weten we op grond van theoretische overwegingen dat een concrete funktie in een machtreeks te ontwikkelen is, dan kunnen we de eerste termen van die reeksontwikkeling soms vinden door te vergelijken met funkties waarvan we de machtreeksontwikkeling reeds kennen. We lichten een en ander toe aan de hand van onderstaande voorbeelden.

Voorbeelden.

(1) Beschouw de funktie $f(z) = (z^2 + z + 1)^{-1}$. Deze funktie is overal holomorf behalve in de twee punten

$$\alpha = \exp(\frac{2\pi i}{3}) = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}), \quad \beta = \exp(-\frac{2\pi i}{3}) = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3}).$$

Deze punten hebben beide afstand 1 tot de oorsprong. Met een zelfde redenering als in de voorgaande paragraaf leiden we hieruit weer af dat de machtreeks van f rond 0 convergentiestraal 1 heeft. We kunnen de machtreeks als volgt bepalen. Schrijf $w = z^2 + z$. Voor voldoend kleine z is $|w| < 1$, zodat

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2+z+1} = \frac{1}{w+1} &= 1 - w + w^2 - w^3 + \dots \\ &= 1 - (z^2+z) + (z^2+z)^2 - (z^2+z)^3 + \dots \\ &= 1 - z + z^3 \ \dots \end{aligned}$$

waarbij de omschikking van de termen geoorloofd is wegens de absolute convergentie van de reeks (vgl. Stelling 2.9).

(2) Beschouw wederom de funktie f uit Voorbeeld (1). De punten α en β hebben beiden afstand $\sqrt{3}$ tot het punt 1. De machtreeksontwikkeling van f rond het punt 1 heeft derhalve convergentiestraal $\sqrt{3}$. Om de machtreeks ook daadwerkelijk te vinden, schrijven we $z - 1 = u$, ofwel $z = u + 1$. Dit geeft

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{u^2+3u+3} &= \frac{1}{3[1 + \frac{1}{3}(u^2+3u)]} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3}u + \frac{2}{9}u^2 \ \dots \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(z-1) + \frac{2}{9}(z-1)^2 \ \dots \end{aligned}$$

(3) De reeks in Voorbeeld (1) is ook op een andere manier te verkrijgen, namelijk door breuksplitsing: met de notaties van Voorbeeld (1) vinden we, voor $|z| < 1$ dat

$$\frac{1}{z^2+z+1} = \frac{1}{\alpha-\beta}\left[\frac{1}{z-\alpha} - \frac{1}{z-\beta}\right] = \frac{1}{\alpha-\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\beta^{n+1}} - \frac{1}{\alpha^{n+1}}\right) z^n$$

$$= \frac{1}{i\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[2i\sin\frac{2(n+1)\pi}{3}\right] z^n = \frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sin\frac{2(n+1)\pi}{3}\right] z^n$$

(aangezien $\alpha\beta = 1$); verder is

$$\sin\frac{2(n+1)\pi}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3},\ -\frac{1}{2}\sqrt{3},\ 0,$$

al naar gelang $n = 3k,\ n = 3k+1,\ n = 3k+2$. We vinden dat

$$\begin{aligned} f(z) &= 1 - z + z^3 - z^4 + z^6 - z^7 \ldots \\ &= (1-z) + (1-z)z^3 + (1-z)z^6 + \ldots) \end{aligned}$$

en via de laatste schrijfwijze ontdekken we nog een andere methode waarmee we de reeksontwikkeling hadden kunnen vinden: voor $z \neq 1$ is

$$f(z) = \frac{1-z}{1-z^3} = (1-z)(1 + z^3 + z^6 + \ldots).$$

Produkt van machtreeksen. In de praktijk is het vaak wenselijk om machtreeksen met elkaar te kunnen vermenigvuldigen. Laat een tweetal machtreeksen $\sum a_n z^n$ en $\sum b_n z^n$ met convergentiestralen respectievelijk R_1 en R_2 gegeven zijn. Deze machtreeksen definiëren analytische funkties f en g op respektievelijk de schijven $|z| < R_1$ en $|z| < R_2$. Hun produkt fg is holomorf op de schijf $|z| < \min(R_1, R_2)$, en wordt daar volgens Stelling 8.7 gegeven door een machtreeks $\sum c_n z^n$. De coëfficiënten c_n van deze machtreeks worden gegeven door de formule:

$$c_n = \frac{(fg)^{(n)}(0)}{n!}.$$

Volgens de *regel van Leibniz* wordt de n-de afgeleide van het produkt fg gegeven door de volgende uitdrukking met binomiaalcoefficiënten

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}\, g^{(n-k)}.$$

Derhalve geldt:

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} \binom{n}{k} f^{(k)}(0)\, g^{(n-k)}(0) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, \frac{g^{(n-k)}(0)}{(n-k)!} \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}. \end{aligned}$$

We concluderen dat voor $|z| < \min(R_1, R_2)$ de volgende tamelijk voor de hand liggende formule geldt:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n.$$

Natuurlijk geldt een soortgelijke formule voor machtreeksen rond een punt α.

Voorbeelden.

(1) Ter illustratie beschouwen we de funktie

$$f(z) = \frac{1}{\cos z} = \frac{2e^{iz}}{e^{2iz}+1}.$$

Deze funktie is overal holomorf, behalve in de punten z met $e^{2iz} = -1 = e^{\pi i}$, dus $z = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Hieruit leiden we af dat de funktie f op de schijf $|z| < \frac{\pi}{2}$ gegeven wordt door een machtreeksontwikkeling $\sum a_n z^n$ met convergentiestraal $\frac{\pi}{2}$. We concluderen dat

$$\begin{aligned} 1 = f(z)\cos z &= (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots)(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!}\ \ldots) \\ &= a_0 + a_1 z + (a_2 - \frac{1}{2}a_0)z^2 + \ldots \end{aligned}$$

Aan deze gelijkheid van analytische funkties kan alleen voldaan zijn als de machtreeksen in het eerste en het laatste lid dezelfde coëfficiënten hebben. We concluderen dat $a_0 = 1,\ a_1 = 0$, en $a_2 - \frac{1}{2}a_0 = 0$ dus $a_2 = \frac{1}{2}$.

(2) We kunnen bovenstaande machtreeks ook op een andere manier afleiden. Zij

$$f(z) = 1 - \cos z \ \text{ en } \ g(w) = \frac{1}{1-w}.$$

Dan is f analytisch, terwijl g analytisch is op $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Hun samenstelling $g \circ f : z \mapsto (\cos z)^{-1}$ is volgens Stelling 1.8 complex differentieerbaar buiten de punten z met $\cos z = 1$ dus buiten $\frac{\pi}{2} + k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}$. De machtreeksontwikkeling van $g(f(z))$ rond 0 kunnen we vinden door die van f in die van g in te vullen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos z} = g(f(z)) &= 1 + f(z) + f(z)^2 + f(z)^3 + \ldots \\ &= 1 + (\frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{4!}z^4) + (\frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{4!}z^4{}^2 + \ldots \\ &= 1 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{5}{24}z^4 + \ldots. \end{aligned}$$

Hierbij is herhaaldelijk gebruik gemaakt van de hierboven behandelde vermenigvuldiging van machtreeksen. Verder is er een omschikking van termen gebruikt om op machten van z te sorteren. Dit is geoorloofd op grond van Stelling 2.9.

Machtreeksen en limieten. Laat f analytisch zijn in een omgeving van 0. We schrijven

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k + z^{n+1} g(z)$$

waarin

$$g(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k$$

een funktie is die analytisch, dus begrensd is in een omgeving van 0. Hieruit volgt een Taylor formule met rest voor analytische funkties:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k + \mathcal{O}\left(|z|^{n+1}\right) \quad (z \to 0).$$

Met behulp hiervan kunnen we weer allerlei limieten berekenen.

Voorbeeld.

Als voorbeeld berekenen we

$$\lim_{z \to 0} \frac{z - \sin z}{\log^3(1 - \sin z)}$$

Door $w = \sin z = z - \frac{1}{6} z^3 \;\ldots$ te substitueren in $\log(1-w) = -w - \frac{1}{2} w^2 \;\ldots$ volgt

$$\log(1 - \sin z) = -z - \frac{1}{2} z^2 \;\ldots$$

dus

$$\log^3(1 - \sin z) = -z^3 - \frac{3}{2} z^4 \;\ldots.$$

De gevraagde limiet is

$$\lim_{z \to 0} \frac{\frac{1}{6} z^3 - \frac{1}{120} z^5 \;\ldots}{-z^3 - \frac{3}{2} z^4 \;\ldots} = \lim_{z \to 0} \frac{\frac{1}{6} - \frac{1}{120} z^2 \;\ldots}{-1 - \frac{3}{2} z \;\ldots} = -\frac{1}{6}.$$

Bovengenoemde methode is analoog aan de in het college Infinitesimaalrekening A besproken methode voor het berekenen van limieten, met dien verstande dat de daar behandelde limieten steeds voldoend vaak continu differentieerbare funkties van een reële variabele betroffen, terwijl hier sprake is van analytische funkties van een complexe variabele.

9 Polen en residuen

9.1 Laurentreeksen

Onder een *Laurentreeks* verstaan we een reeks van de vorm

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n, \tag{101}$$

met $\alpha \in \mathrm{C}$, $a_n \in \mathrm{C}$ $(n \in \mathrm{N})$. Beschouw de machtreeksen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} v^n, \tag{102}$$

met u en v complexe variabelen. Door sommatie van de bovenstaande machtreeksen na substitutie $u = z-\alpha$ en $v = (z-\alpha)^{-1}$ ontstaat de reeks (101). Zij R_2 de convergentiestraal van de eerste en R_1 de convergentiestraal van de tweede machtreeks in (102); dan leiden we uit het bovenstaande direkt af:

(a) *de reeks* (101) *convergeert voor* $z \in \mathrm{C}$ *met* $R_1^{-1} < |z-\alpha|$ *en* $|z-\alpha| < R_2$;

(b) *de reeks* (101) *divergeert voor* $z \in \mathrm{C}$ *met* $|z-\alpha| < R_1^{-1}$ *of* $|z-\alpha| > R_2$.

In het bovenstaande laten we toe dat $R_1 = \infty$; daarbij interpreteren we R_1^{-1} dan als nul. Als $R_1^{-1} > R_2$ dan volgt uit het bovenstaande dat de reeks (101) nergens convergeert. Is $R_1^{-1} = R_2$ dan zijn er mogelijkerwijs punten waar de reeks convergeert; volgens het bovenstaande moeten die dan alle op de cirkel $|z-\alpha| = R_2$ liggen.

In het vervolg veronderstellen we dat $R_1^{-1} < R_2$; we schrijven $r_1 = R_1^{-1}$ en $r_2 = R_2$. Uit de bovenstaande conditie (a) volgt dat de Laurentreeks (101) convergeert op het *ringgebied*

$$G = \{z \in \mathrm{C};\ \ r_1 < |z-\alpha| < r_2\}. \tag{103}$$

Lemma 9.1 *Veronderstel dat de Laurentreeks* (101) *convergeert op het ringgebied G gegeven door* (103)*. Dan is de funktie*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n \tag{104}$$

analytisch op G. Bovendien geldt voor iedere positief georiënteerde in G gelegen cirkel k met middelpunt α dat

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_k \frac{f(w)}{(w-\alpha)^{n+1}}\, dw \quad (n \in \mathrm{Z}). \tag{105}$$

Bewijs: We beschouwen weer de machtreeksen (102). De eerste machtreeks convergeert voor u met $r_1 < |u| < r_2$ en heeft dus een convergentiestraal minstens r_2. De tweede machtreeks in (102) convergeert voor alle v met ${r_2}^{-1} < |v| < {r_1}^{-1}$ en heeft dus een convergentiestraal minstens r_1^{-1}. Zij $g(u)$ de analytische funktie gedefinieerd door de eerste en $h(v)$ de analytische funktie gedefinieerd door de tweede machtreeks in (102). Dan geldt voor $z \in G$ dat $f(z) = g(z-\alpha) + h((z-\alpha)^{-1})$, waaruit de analyticiteit van f blijkt.

Machtreeksen convergeren uniform op ieder gesloten begrensd gebied binnen hun convergentiecirkel. Hieruit concluderen we dat de reeks (104) uniform convergeert op iedere cirkel k met middelpunt α die in G ligt. Fixeer $l \in \mathbb{Z}$. Dan convergeert ook de reeks

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-\alpha)^{n-l-1} = \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{l+1}} \tag{106}$$

uniform op k. Termsgewijze integratie van deze reeks over k is dus geoorloofd. Door k te parametriseren als $k(\varphi) = \alpha + re^{i\varphi}$ $(0 \le \varphi \le 2\pi)$, zien we in dat

$$\begin{aligned} \int_k (z-\alpha)^{n-l-1}\, dz &= 0 \quad \text{als} \quad n \neq l \\ &= 2\pi i \ \text{ als } \ n = l. \end{aligned}$$

Termsgewijze integratie van (106) levert derhalve dat

$$2\pi i\, a_l = \int_k \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{l+1}}\, dz,$$

dus (105). □

Het onderstaande resultaat zegt dat omgekeerd iedere op een ringgebied G gedefinieerde analytische funktie f in een Laurentreeks te ontwikkelen is.

Stelling 9.2 *Laat f analytisch zijn op het ringgebied G. Dan geldt voor alle $z \in G$ dat*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n, \tag{107}$$

met coëfficiënten gegeven door (105); hierin mag voor k iedere (positief georiënteerde) cirkel met middelpunt α en straal $r \in]r_1, r_2[$ genomen worden.

Bewijs: We fixeren een willekeurig punt $z \in G$. Kies ρ_1 en ρ_2 zo dat $r_1 < \rho_1 < |z-\alpha| < \rho_2 < r_2$. Laat k_1 en k_2 de positief georiënteerde cirkels zijn met middelpunt α en stralen ρ_1 resp. ρ_2. Kies $\epsilon > 0$ zo klein dat de afsluiting van de cirkelschijf $D_\epsilon = \{w \in \mathbb{C};\ \ |w-z| < \epsilon\}$ in het ringgebied

$$G(\rho_1, \rho_2) = \{w \in \mathbb{C};\ \ \rho_1 < |w-\alpha| < \rho_2\}$$

ligt (zie Figuur 13). We beschouwen nu de begrensde open verzameling B van punten

Figuur 13:

$w \in G(\rho_1, \rho_2)$ die niet in de gesloten schijf $\overline{D_\epsilon}$ liggen. Deze verzameling heeft georiënteerde rand $\partial B = k_2 \cup -k_1 \cup -\partial D_\epsilon$. De funktie $w \mapsto \frac{f(w)}{w-z}$ is analytisch op een open omgeving van $\overline{B}$, en met behulp van Stelling 8.5 concluderen we door integratie over ∂B dat

$$\int_{k_2} \frac{f(w)}{w-z} dw = \int_{k_1} \frac{f(w)}{w-z} dw + \int_{\partial D_\epsilon} \frac{f(w)}{w-z} dw. \tag{108}$$

Wegens Stelling 8.6 is de laatste integraal gelijk aan $2\pi i f(z)$. We vinden derhalve dat

$$2\pi i f(z) = \int_{k_2} \frac{f(w)}{w-z} dw - \int_{k_1} \frac{f(w)}{w-z} dw. \tag{109}$$

De eerste integraal behandelen we als in het bewijs van Stelling 8.7; dit is mogelijk omdat $|w - \alpha| > |z - \alpha|$ voor alle $w \in k_2$. De integraal wordt weer gegeven door een reeks $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-\alpha)^n$ met

$$b_n = \int_{k_1} \frac{f(w)}{(w-\alpha)^{n+1}}\, dw. \tag{110}$$

De tweede integraal in (109) behandelen we als volgt. Voor $w \in k_1$ geldt

$$\frac{|w-\alpha|}{|z-\alpha|} = \frac{\rho_1}{|z-\alpha|} < 1,$$

en dus

$$\begin{aligned} \frac{1}{w-z} &= -\frac{1}{z-\alpha}\left(\frac{1}{1-\frac{w-\alpha}{z-\alpha}}\right) \\ &= -\frac{1}{z-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w-\alpha}{z-\alpha}\right)^n, \end{aligned}$$

waarbij de reeks uniform convergeert in de variabele $w \in k_1$. Door substitutie van de bovenstaande reeks in de tweede integraal in (109) krijgen we een reeks $-\sum_{n=1}^{\infty} b_{-n}(z-\alpha)^{-n}$ met

$$\begin{aligned} b_{-n} &= \int_{k_1} f(w)(w-\alpha)^{n-1}\,dw \\ &= \int_{k_1} \frac{f(w)}{(w-\alpha)^{-n+1}}\,dw \quad (n \geq 1). \end{aligned} \tag{111}$$

Aangezien de funktie $w \mapsto \frac{f(w)}{(w-\alpha)^{n+1}}$ $(n \in \mathbb{Z})$ analytisch is in het gebied G mogen de cirkels k_2 en k_1 in (110) en (111) worden vervangen door de cirkel k zonder dat daardoor de integralen veranderen. Uit de gevonden reeksontwikkelingen voor de integralen in (109) vinden we tenslotte de reeks (107) met $a_n = (2\pi i)^{-1} b_n$ $(n \in \mathbb{Z})$. $\square$

Opmerkingen. (1) Merk op dat de bovenstaande stelling juist is met $r_2 = \infty$. (2) Uit Lemma 9.1 volgt dat de reeksontwikkeling (107) eenduidig bepaald is door de funktie f op het ringgebied G.

In de praktijk bepaalt men vaak Laurentreeksen met behulp van de eerder voor machtreeksen behandelde methoden (zie Paragraaf 8.5). We geven enkele voorbeelden.

Voorbeelden.

(1) De funktie $(1+z^2)^{-1}$ is analytisch op het ringgebied $|z| > 1$, en heeft daar dus een convergente Laurentreeksontwikkeling, die we als volgt kunnen vinden:

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}}\right) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^6} + \ldots.$$

(2) De funktie $(1+z^2)^{-1}$ is ook complex differentieerbaar in het ringgebied $0 < |z-i| < 2$. De Laurentreeks in dat ringgebied vinden we als volgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+z^2} &= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right] \\ &= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{z-i} - \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{z-i} - \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-i}{2i}\right)^n\right]. \end{aligned}$$

Het kan ook anders: we schrijven $z - i = w$ ofwel $z = w + i$, en er komt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+z^2} &= \frac{1}{2iw\left(1+\frac{w}{2i}\right)} \\ &= \frac{1}{2iw}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{w}{2i}\right)^n \\ &= \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2}i)^n(z-i)^{n-1}. \end{aligned}$$

9.2 Singuliere punten

Onder een *singulier punt* van een funktie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ verstaan we een punt α waarin f niet complex differentieerbaar is. Het punt α heet een *geïsoleerd singulier punt* van f als f analytisch is in een *gereduceerde omgeving* van α, dwz. in een gebied van de vorm

$$U = \{z \in \mathbb{C};\ \ 0 < |z - \alpha| < \epsilon\} \tag{112}$$

met $\epsilon > 0$. In het vervolg veronderstellen we dat f analytisch is in de gereduceerde omgeving U. Uit Stelling 9.2 met $r_1 = 0$ blijkt dat f in U in een Laurentreeks te ontwikkelen is:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n. \tag{113}$$

Er zijn nu twee mogelijkheden:

(1) Er geldt $a_n \neq 0$ voor oneindig vele $n < 0$. In dit geval noemen we α een *essentieel singulier punt* van f.

(2) Voor slechts eindig vele $n < 0$ geldt $a_n \neq 0$. In dit geval kunnen we de reeks (113) herschrijven als:

$$f(z) = a_{-k}(z - \alpha)^{-k} + a_{-k+1}(z - \alpha)^{-k+1} + \ldots \tag{114}$$

met $k \geq 0$, $\ a_{-k} \neq 0$.

Als $k = 0$ dan is dit een machtreeks, en we zien dat we de funktie f analytisch kunnen maken in een volle omgeving van α door hem in α te herdefiniëren door $f(\alpha) = a_0$. We noemen α in dit geval dan ook wel een *ophefbare singulariteit*. Voorbeeld: $\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} \ldots$ heeft in 0 een ophefbare singulariteit.

Als $k \geq 1$ dan noemen we het punt α een *pool* van f. Het positieve gehele getal k heet de *orde* van de pool. In dit geval kunnen we de reeks (113) herschrijven als

$$f(z) = (z - \alpha)^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-k}(z - \alpha)^n \tag{115}$$

De machtreeks in het rechterlid van (115) convergeert op de gereduceerde omgeving U en heeft dus een convergentiestraal minstens ϵ. Derhalve is de door die machtreeks gedefinieerde funktie g analytisch op een volle omgeving van α. We concluderen dat $f(z) = (z - \alpha)^{-k} g(z)$, met g analytisch in een volle omgeving van α. Merk op dat $g(\alpha) = a_{-k} \neq 0$.

Definitie 9.3 (Residue). Laat $\alpha \in \mathbb{C}$ een geïsoleerde singulariteit van de funktie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zijn, en zij (113) de Laurentreeks van f op een *gereduceerde* omgeving van α. De coëfficiënt van de macht $(z-\alpha)^{-1}$ in de Laurentreeks (113) rond α, dus a_{-1}, heet het *residu* van de funktie f in α. We schrijven

$$\mathrm{Res}_\alpha(f) := a_{-1}.$$

Opmerking. Is f analytisch op de gereduceerde omgeving (112) van α, dan volgt door toepassing van Stelling 9.2 met $r_1 = 0$ dat

$$\mathrm{Res}_\alpha(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_k f(z)\,dz \tag{116}$$

voor iedere in U gelegen positief georiënteerde cirkel k.

Voorbeelden.

(1) De funktie $z \to z^{-2}$ heeft residu 0 in 0.

(2) We beschouwen de funktie $(1+z^2)^{-1}$ rond het punt $z = i$. Uit de in Paragraaf 9.1, Voorbeeld (2) gevonden Laurentreeks lezen we af dat

$$\operatorname*{Res}_{z=i}\left(\frac{1}{1+z^2}\right) = \frac{1}{2i}.$$

Het is echter niet noodzakelijk eerst de gehele Laurentreeks te bepalen. Een snellere methode is de volgende: de funktie $(z+i)^{-1}$ is analytisch in een volle omgeving van $z = i$ en heeft dus een machtreeksontwikkeling

$$\frac{1}{z+i} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-i)^n. \tag{117}$$

Hieruit volgt dat

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = a_0(z-i)^{-1} + \ldots$$

en we zien dat

$$\operatorname*{Res}_{z=i}\left(\frac{1}{1+z^2}\right) = a_0$$

zodat we slechts a_0 hoeven te bepalen. Invullen van $z = i$ in (117) levert $a_0 = (2i)^{-1}$.

(3) We beschouwen de funktie $f(z) = (1+z^2)^{-1}\cos z$. Deze funktie is overal analytisch, behalve in de punten i en $-i$. We beschouwen eerst het geïsoleerde singuliere punt $-i$. De funktie $(z-i)^{-1}\cos z$ is analytisch in $z = -i$ en heeft dus een machtreeksontwikkeling $a_0 + a_1(z+i) + \ldots$ in een volle omgeving van dit punt; hierin is $a_0 = -(2i)^{-1}\cos(-i) = \frac{1}{4}i(e+e^{-1})$. Derhalve is

$$\frac{\cos z}{1+z^2} = \frac{1}{z+i}\left(\frac{\cos z}{z-i}\right) = a_0(z+i)^{-1} + \ldots.$$

Het punt $-i$ is dus een pool van de orde 1 van f; het residu van f in $-i$ is $\frac{1}{4}i(e+e^{-1})$.

Op soortgelijke wijze zien we in dat i een eerste orde pool van f is. Het residu is:

$$\mathrm{Res}_i(f) = \left[\frac{\cos z}{z+i}\right]_{z=i} = -\tfrac{1}{4}i(e+e^{-1}).$$

(4) We beschouwen de funktie $f(z) = [(e^z - 1)\sin z]^{-1}$ rond $z = 0$. Eerst merken we op dat

$$(e^z - 1)\sin z = z^2(1 + \frac{1}{2}z + \ldots)(1 - \frac{1}{6}z^2 + \ldots) = z^2 g(z)$$

met

$$g(z) = 1 + \frac{1}{2}z + \ldots$$

analytisch in een volle omgeving van $z = 0$. De funktie $h(z) = g(z)^{-1}$ is analytisch in een omgeving van nul (want $g(0) \neq 0$) en heeft daar dus een machtreeksontwikkeling $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Nu is

$$f(z) = \frac{h(z)}{z^2} = a_0 z^{-2} + a_1 z^{-1} + a_2 + \ldots.$$

Hierin is $a_0 = h(0) = 1$, dus $z = 0$ is een tweede orde pool van f. Het residu van f in 0 vinden we door:

$$\mathrm{Res}_0\,(f) = a_1 = h'(0) = -\frac{g'(0)}{g(0)^2} = -\frac{1}{2}.$$

(5) De funktie $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ is analytisch op $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ en heeft daar een Laurentreeksontwikkeling:

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + (\frac{1}{z}) + \frac{1}{2!}(\frac{1}{z})^2 + \ldots.$$

Het punt $z = 0$ is derhalve een essentiële singulariteit en er geldt $\mathrm{Res}_0\,(f) = 1$.

In het bovenstaande zijn we enige malen de situatie tegengekomen die behandeld wordt in het onderstaande lemma.

Lemma 9.4 *Laat f een geïsoleerde singulariteit in het punt α hebben terwijl*

$$\lim_{z \to \alpha} f(z)(z - \alpha) = L \neq 0$$

(in het bijzonder veronderstellen we dus dat de limiet bestaat). Dan is α een eerste orde pool van f, terwijl

$$\mathrm{Res}_\alpha\,(f) = L.$$

Bewijs: Schrijf $g(z) = f(z)(z - \alpha)$. Wegens Stelling 9.2 met $r_1 = 0$ heeft g een Laurentreeksontwikkeling (107) in een gereduceerde omgeving van α. Zij $n \geq 1$. Dan wordt de coëfficiënt a_{-n} gegeven door

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{k_\epsilon} g(z)(z - \alpha)^{n-1}\, dz$$

met k_ϵ de cirkel met middelpunt α en straal $\epsilon > 0$ (voldoende klein). Door schatting onder het integraalteken (vergelijk Stelling 8.2) vinden we:

$$|a_{-n}| \leq \frac{1}{2\pi} l(k_\epsilon)\epsilon^{n-1} \|g\|_{k_\epsilon} = \epsilon^n \|g\|_{k_\epsilon}.$$

Uit $\lim_{z\to\alpha} g(z) = L$ volgt dat de bovenstaande uitdrukking limiet 0 heeft voor $\epsilon \downarrow 0$. We concluderen dat $a_n = 0$ voor alle $n < 0$, maw. het punt α is een ophefbare singulariteit van g. Bovendien is $a_0 = \lim_{z\to\alpha} g(z) = L$. Gevolg:

$$f(z) = \frac{1}{z-\alpha}\, g(z) = \frac{1}{z-\alpha}\, (a_0 + a_1(z-\alpha)^2 + \ldots)$$

en we concluderen dat α een eerste orde pool van f is, terwijl $\mathrm{Res}_\alpha(f) = a_0 = L$. □

Voorbeeld.

Als toepassing van het bovenstaande lemma behandelen we de funktie $f(z) = p(z)^{-1}$ met $p(z) = (1 + z^6)$. Deze funktie is overal analytisch behalve in de geïsoleerde singulariteiten α_k, $k = 0, 1, \ldots 5$ waarin

$$\alpha_k = e^{(2k+1)\frac{\pi i}{6}}.$$

We beschouwen een der singulariteiten α_m. Er geldt

$$\begin{aligned}\lim_{z\to\alpha_m} f(z)(z-\alpha_m) &= \lim_{z\to\alpha} \frac{z-\alpha_m}{p(z)-p(\alpha_m)} \\ &= (p'(\alpha_m))^{-1} = \frac{1}{6(\alpha_m)^5} = -\frac{\alpha_m}{6}.\end{aligned}$$

Derhalve heeft f in α_m een eerste orde pool met residu $\mathrm{Res}_{\alpha_m}(f) = -\frac{1}{6}\alpha_m$.

9.3 De residuenstelling

Soms kan men integralen berekenen door gebruik te maken van het in de vorige paragraaf geïntroduceerde residu van een funktie. De volgende stelling is daarbij van cruciaal belang.

Stelling 9.5 (De residuenstelling.)
Zij B een begrensde open verzameling in $\mathbb{C}$ met stuksgewijze C^1 rand ∂B. Zij f een funktie gedefinieerd op een open omgeving V van $\overline{B}$ en veronderstel dat f overal in V analytisch is met uitzondering van een eindig aantal in B gelegen geïsoleerde singulariteiten $\alpha_1, \ldots \alpha_m$. Dan is

$$\int_{\partial B} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Res}_{\alpha_k}(f). \tag{118}$$

Bewijs: Door $\epsilon > 0$ voldoende klein te nemen bereiken we dat de afsluiting van iedere cirkelschijf

$$D_j(\epsilon) = \{z \in \mathbb{C};\ \ |z-\alpha_j| < \epsilon\}$$

geheel in B ligt. Zij k_j de georiënteerde rand van de cirkelschijf $D_j(\epsilon)$. We beschouwen de open en begrensde verzameling Ω van punten $z \in B$ die buiten de afsluiting van iedere $D_j(\epsilon)$

Figuur 14:

liggen (zie Figuur 14). De georiënteerde rand van Ω is gelijk aan $\partial B \cup (-k_1) \cup \ldots \cup (-k_m)$, en de funktie f is analytisch op $\overline{\Omega}$. Door integratie over $\partial\Omega$ en toepassing van Stelling 8.5 vinden we

$$\int_{\partial B} f(z)\, dz = \sum_{j=1}^{m} \int_{k_j} f(z)\, dz. \tag{119}$$

Hieruit volgt tenslotte (118) door toepassing van (116). $\square$

In het vervolg behandelen we enige toepassingen van de bovenstaande residuenstelling.

Voorbeelden.

(1) Allereerst beschouwen we de integraal

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + \sin\varphi};$$

hierbij is a een reëel getal, $a > 1$, zodat de integrand continu is. Schrijven we $z = e^{i\varphi}$, dan is

$$\frac{d\varphi}{a + \sin\varphi} = \left(\frac{2i}{2ia + z - z^{-1}}\right) \frac{dz}{iz} = \frac{2\, dz}{z^2 + 2iaz - 1}.$$

Laat k de positief georienteerde eenheidscirkel met middelpunt 0 zijn, dan geldt dus dat

$$I = \int_k \frac{2\, dz}{z^2 + 2iaz - 1}.$$

De noemer in de bovenstaande integrand heeft wortels $\alpha_1 = -i(a - \sqrt{a^2 - 1})$ en $\alpha_2 = -i(a + \sqrt{a^2 - 1})$. Hiervan ligt α_1 binnen en α_2 buiten k. Met behulp van

Figuur 15:

Stelling 9.5 concluderen we dat

$$
\begin{aligned}
I &= 2\pi i \ \operatorname{Res}_{\alpha_1}\left(\frac{2}{z^2+2iaz-1}\right) = 2\pi i \ \operatorname{Res}_{\alpha_1}\left(\frac{2}{[z-\alpha_1][z-\alpha_2]}\right) \\
&= \frac{4\pi i}{\alpha_1-\alpha_2} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.
\end{aligned} \tag{120}
$$

(2) Als tweede toepassing berekenen we de integraal

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^6} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^6}.$$

Zij $R > 1$ en zij $B(R)$ de begrensde open halve cirkelschijf bestaande uit de punten $z \in \mathbb{C}$ met $\operatorname{Im} z > 0$ en $|z| < R$. De nulpunten van $p(z) = z^6 + 1$ zijn

$$\alpha_k = \exp\left(\frac{(2k+1)\pi i}{6}\right), \quad k = 0, \ldots 5.$$

Hiervan zijn α_k voor $k = 0, 1, 2$ binnen $B(R)$ gelegen, en voor $k = 3, 4, 5$ buiten $\overline{B}(R)$ gelegen (zie Figuur 15). Derhalve is

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial B(R)} \frac{dz}{1+z^6} &= 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{\alpha_0}\left(\frac{1}{p}\right) + \operatorname{Res}_{\alpha_1}\left(\frac{1}{p}\right) + \operatorname{Res}_{\alpha_2}\left(\frac{1}{p}\right)\right) \\
&= 2\pi i \left(-\frac{\alpha_0}{6} - \frac{\alpha_1}{6} - \frac{\alpha_2}{6}\right) = \frac{2\pi}{3}
\end{aligned} \tag{121}
$$

(vergelijk het voorbeeld onder Lemma 9.4). In het bijzonder zien we dat de integraal in (121) onafhankelijk is van $R > 1$. Hiervan maken we als volgt gebruik. De georiënteerde rand $\partial B(R)$ is te schrijven als $J(R) \cup k(R)$, met $J(R) = [-R, R]$ en $k(R)$ de positief georiënteerde halve cirkel $|z| = R$, $\operatorname{Im} z > 0$. De integraal in (121) is derhalve te splitsen in een som van integralen over $k(R)$ en $[-R, R]$. De twee nieuwe integralen zijn wel afhankelijk van R. We onderzoeken wat er gebeurt als $R \to \infty$. Voor $z \in k(R)$ geldt $|1 + z^6| \geq |z^6| - 1 = R^6 - 1$. Hieruit volgt dat

$$\left| \int_{k(R)} \frac{dz}{z^6 + 1} \right| \leq \frac{l(k)}{R^6 - 1} = \frac{\pi R}{R^6 - 1}, \tag{122}$$

en we concluderen dat de integraal in (122) limiet 0 heeft voor $R \to \infty$. Door in (121) de limiet te nemen voor $R \to \infty$ zien we tenslotte dat

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{3} &= \lim_{R\to\infty} \int_{k(R)} \frac{dz}{1 + z^6} + \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dz}{1 + z^6} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^6}, \end{aligned}$$

dus $I = \frac{1}{3}\pi$.

(3) Als derde toepassing berekenen we de integraal

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1 + x^2}\, dx. \tag{123}$$

Laat voor $R > 1$ het gebied $B(R)$ weer gedefinieerd zijn als in de vorige toepassing. De funktie $f(z) = (1 + z^2)^{-1} e^{iz}$ is overal analytisch, behalve in de punten $-i$ en i. Hiervan ligt alleen i binnen $B(R)$. Het residu van f in i is

$$\operatorname{Res}_i(f) = \left[\frac{e^{iz}}{z + i} \right]_{z=i} = -\frac{1}{2} i e^{-1}.$$

Hieruit volgt dat

$$\int_{\partial B(R)} \frac{e^{iz}}{1 + z^2}\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}_i(f) = \frac{\pi}{e}. \tag{124}$$

De integraal in (124) is wederom te splitsen in een integraal over het interval $J(R)$ en een integraal over de halve cirkelboog $k(R)$. Als $z \in k(R)$ dan geldt

$$|f(z)| = \frac{e^{\operatorname{Re} iz}}{|1 + z^2|} \leq \frac{e^{-\operatorname{Im} z}}{|z^2| - 1} \leq \frac{1}{R^2 - 1}.$$

Hieruit volgt dat

$$\left| \int_{k(R)} f(z)\, dz \right| \leq \frac{\pi R}{R^2 - 1},$$

dus

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{e} &= \lim_{R\to\infty}\int_{k(R)} f(z)\,dz + \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(z)\,dz\\ &= \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(z)\,dz = I.\end{aligned}$$

Door substitutie van $y = -x$ in de integraal (123) zien we dat tevens geldt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iy}}{1+y^2}\,dy = \frac{\pi}{e} \tag{125}$$

Tenslotte vinden we door sommatie van (123) en (125) dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{e}.$$

(4) Als laatste toepassing behandelen we de integraal

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx. \tag{126}$$

Dat deze oneigenlijke integraal convergeert zagen we reeds in het laatste voorbeeld in Hoofdstuk 3. De integraal is gecompliceerder dan de voorgaande: splitsen we de sinus in een som van $e-$machten dan ontstaan er twee divergente integralen. We gaan daarom als volgt te werk. Allereerst merken we op dat

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{\substack{R\to\infty\\ \epsilon\downarrow 0}} \frac{1}{2i}\left(I_1(R,\epsilon) + I_2(R,\epsilon)\right), \tag{127}$$

waarin

$$I_1(R,\epsilon) = \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x}\,dx, \qquad I_2(R,\epsilon) = \int_{\epsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x}\,dx$$

Hierdoor gemotiveerd beschouwen we voor $0 < \epsilon < R$ het gebied $S_{R,\epsilon}$ bestaande uit de punten $z \in \mathbb{C}$ met $\epsilon < |z| < R$ en $\operatorname{Im} z > 0$ (zie Figuur 16). De funktie $f(z) = z^{-1}e^{iz}$ is analytisch op een open omgeving van de afsluiting van $S_{R,\epsilon}$ dus er volgt:

$$\int_{\partial S_{R,\epsilon}} f(z)\,dz = 0. \tag{128}$$

De georiënteerde rand van $S_{R,\epsilon}$ is gelijk aan

$$\partial S_{R,\epsilon} = [-R,-\epsilon] \cup [\epsilon, R] \cup\ -k_1(\epsilon) \cup k_2(R),$$

waarin $k_1(\epsilon)$ en $k_2(R)$ twee positief georiënteerde halve cirkelbogen met stralen ϵ resp. R zijn (zie Figuur 16). Er volgt:

$$I_1(R,\epsilon) + I_2(R,\epsilon) = \int_{k_1(\epsilon)} f(z)\,dz - \int_{k_2(R)} f(z)\,dz \tag{129}$$

Figuur 16:

Voor $\varphi \in [0, \frac{1}{2}\pi]$ geldt dat $\sin \varphi \geq \frac{2}{\pi}\varphi$ (teken de grafieken om dit in te zien). Maken we gebruik van de parametrisering $\varphi \mapsto Re^{i\varphi}$ voor $k_2(R)$ dan vinden we dat

$$\begin{aligned}
\left| \int_{k_2} f(z)\, dz \right| &\leq \int_0^\pi |\exp(iRe^{i\varphi})|\, d\varphi \\
&= \int_0^\pi e^{-R\sin\varphi}\, d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\varphi}\, d\varphi \\
&\leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp\left(-\frac{2R\varphi}{\pi}\right)\, d\varphi = \frac{\pi}{R}\left(1 - e^{-R}\right)
\end{aligned}$$

waaruit blijkt dat de laatste integraal in (129) limiet nul heeft voor $R \to \infty$. Door gebruik te maken van (127) en (129) concluderen we tenslotte dat

$$I = \frac{1}{2i} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{k_1(\epsilon)} f(z)\, dz$$

mits de laatste limiet bestaat. Dit laatste is een gevolg van een lemma dat we hieronder zullen formuleren. De conclusie zal uiteindelijk zijn dat

$$I = \frac{\pi i}{2i} \operatorname{Res}_0(f) = \frac{\pi}{2}.$$

Lemma 9.6 *Laat f in α een enkelvoudige pool hebben. Zij $c > 0$ en $k(c, \delta)$ een positief georiënteerde cirkelboog met middelpunt α, straal δ en grootte c (radialen); zie Figuur 17. Dan is*

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \int_{k(c,\delta)} f(z)\, dz = ci \operatorname{Res}_\alpha(f).$$

Bewijs: Uit de Laurentreeksontwikkeling van f in een gereduceerde omgeving van α leiden we af dat

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - \alpha} + g(z)$$

Figuur 17:

met g analytisch in een volle omgeving van α. Parametriseren we $k(c,\delta)$ door $z = \alpha + \delta e^{i\varphi}$ dan zien we dat

$$\int_{k(c,\epsilon)} \frac{a_{-1}}{z-\alpha}\, dz = cia_{-1}.$$

Anderzijds geldt:

$$\left| \int_{k(c,\delta)} g(z)\, dz \right| \leq c\delta \sup_{|z-\alpha|=\delta} |g(z)| \ \to 0$$

als $\delta \downarrow 0$. $\square$

10 Meerwaardigheid van analytische funkties

De logarithme. In Paragraaf 1.5 definieerden we de logarithmische funktie op het gebied W dat ontstaat door uit het complexe vlak de *coupure* $L =]-\infty, 0]$ weg te laten: $W = \mathbb{C} \setminus L$. Op W wordt de logarithmische funktie log gegeven door de formule

$$\log z = \log|z| + i \arg z, \quad -\pi < \arg z < \pi.$$

Op de positieve reële as $]0, \infty[$ is deze funktie precies de reële logarithmische funktie. De funktie log is complex differentieerbaar op W: zij is dus de (uniek bepaalde) *analytische voortzetting* van de reële logarithmische funktie tot W.

De bovenstaande definitie van logarithmische funktie werd mogelijk door het complex vlak te couperen langs $L =]-\infty, 0]$. Door de coupure anders te kiezen kunnen we ook over een logarithmische funktie langs de negatieve reële as beschikken.

Kies $\psi \in]-\pi, \pi[$ en zij L_ψ de halfrechte bestaande uit de punten met argument $\pi + \psi$:

$$L_\psi = \{ -\rho e^{i\psi}; \ \ \rho \geq 0 \}.$$

Definieer voorts

$$W_\psi = \mathbb{C} \setminus L_\psi.$$

Op W_ψ definiëren we de funktie $\log_\psi$ door

$$\log_\psi z = \log|z| + i \arg_\psi z, \tag{130}$$

waarbij $\arg_\psi$ de waarde van het argument is die tot het interval $]-\pi+\psi, \pi+\psi[$ behoort.

Ook de funktie $\log_\psi$ kan opgevat worden als inverse van de exponentiële funktie. Hiertoe merken we op dat de exponentiële funktie $\exp : z \mapsto e^z$ injectief is op de open verzameling

$$V_\psi = \{z \in \mathbb{C}; \quad -\pi + \psi < \operatorname{Im} z < \pi + \psi\}. \tag{131}$$

Het beeld van V_ψ onder exp is precies W_ψ, en $\log_\psi$ is de inverse van de bijectieve afbeelding $\exp|_{V_\psi} : V_\psi \to W_\psi$. Vergelijk dit met de definitie van log in Paragraaf 1.5. Door gebruik te maken van Stelling 1.11 concluderen we weer dat $\log_\psi$ complex differentieerbaar op W_ψ is met als complexe afgeleide:

$$\frac{d}{dz} \log_\psi z = \frac{1}{z}. \tag{132}$$

Op de positieve reële halfrechte komt $\log_\psi$ weer overeen met de reële logarithmische funktie. Derhalve is $\log_\psi$ de analytische voortzetting van de reële logarithme tot het gebied W_ψ.

De vroeger gedefinieerde logarithmische funktie kunnen we als speciaal geval opvatten van de hierboven gedefinieerde: $\log = \log_0$. In deze algemenere context heet $\log_0$ wel de *hoofdwaarde* van de logarithme. In het vervolg van dit hoofdstuk zullen we vaak de notatie $\log_0$ voor de hoofdwaarde gebruiken. In de praktijk gebruikt men dezelfde notatie log voor verschillende keuzes $\log_\psi$; daarbij dient steeds uitdrukkelijk vermeld te worden welke keuze men gemaakt heeft.

Figuur 18:

In het vervolg vergelijken we de funktie $\log_\psi$ met $\log_0$ in het geval dat $\psi \neq 0$. Gemakshalve veronderstellen we dat $\psi = -\frac{\pi}{2}$, en we schrijven $L_1 = L_\psi$, $W_1 = W_\psi$ en $\log_1 = \log_\psi$. Voor $z \in W_1$ geldt dus

$$\log_1 z = \log|z| + i \arg_1 z \quad (-\frac{3}{2}\pi < \arg_1 z < \frac{1}{2}\pi).$$

Het gemeenschappelijke domein $W_0 \cap W_1$ van $\log_0$ en $\log_1$ valt uiteen in twee gebieden (samenhangende open verzamelingen, vgl. Def. 8.12); het gebied dat de positieve reële halfrechte bevat noemen we S, het andere T (zie Figuur 18).

Omdat $\log_\psi$ en $\log_0$ beide analytische voortzettingen van dezelfde reële logarithme zijn tot het gebied S, geldt dat

$$\log_0 z = \log_1 z \quad \text{als} \quad z \in S \tag{133}$$

(gebruik Stelling 8.13). We kunnen dit ook inzien door op te merken dat $\arg_0 = \arg_1$ op S en formule (130) te gebruiken voor $\psi = 0$ resp. $\psi = \frac{\pi}{2}$.

Op het gebied T geldt dat $\arg_1 = \arg_0 - 2\pi$. Hieruit volgt dat

$$\log_1 z = \log_0 z - 2\pi i \quad (z \in T). \tag{134}$$

We zien dat $\log_0$ en $\log_1$ verschillen op het gebied T, terwijl beide funkties verkregen zijn door analytische voortzetting van dezelfde op de positieve reële halfrechte gedefinieerde reële logarithme. Dit verschijnsel heet *meerwaardigheid.* De funkties $\log_0$ en $\log_1$ heten ook wel *takken* van de logarithmische funktie op T. Als men (in eerste instantie) in het midden wil laten over welke tak men het heeft, dan spreekt men ook wel over de *meerwaardige analytische funktie* log.

In het algemeen zullen we ook in de volgende situatie spreken van een tak van de logarithmische funktie. Zij Ω een gebied in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Een complex differentieerbare funktie $f : \Omega \to \mathbb{C}$ die voldoet aan

$$e^{f(z)} = z$$

zullen we een tak van de logarithmische funktie op Ω noemen. De logarithmische funktie hoeft geen tak op Ω te hebben: dit blijkt uit het voorbeeld $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Als er echter een tak is, zeg f, dan is ook $f + 2N\pi i$ een tak, voor iedere $N \in \mathbb{Z}$. Bewering: dit zijn ze allemaal.

Bewijs: Stel g is ook een tak. Dan voldoet de complex differentieerbare funktie $v = f - g$ aan $e^{v(z)} = 1$ voor alle $z \in \Omega$. Hieruit volgt dat $(2\pi i)^{-1}v(z) \in \mathbb{Z}$ voor alle $z \in \Omega$. Uit de samenhang (Def. 8.12) van Ω en de continuïteit van v volgt nu dat v constant moet zijn. Derhalve bestaat er een $N \in \mathbb{Z}$ zo dat $v(z) = 2N\pi i$. □

Buiten de oorsprong kunnen we overal lokaal takken van de logarithmische funktie definiëren door geschikte coupures te kiezen. In de oorsprong kan dit niet, omdat 0 niet bevat is in het beeld van de exponentiële afbeelding. In 0 kan dus geen lokaal gedefinieerde inverse van exp bestaan. Het punt 0 heet ook wel: *vertakkingspunt* van de meerwaardige logarithmische funktie. Deze terminologie vindt zijn oorsprong in het volgende.

Vertakking van de logarithme. We beschouwen nogmaals de coupures L_0 en L_1 uit het voorgaande (zie Figuur 18). Door voortzetting van de reële logarithme tot W_0 verkrijgen we de tak $\log_0$ van $\log$. De beperking van $\log_0$ tot het deel T van W_0 noemen we $\log_T$. Uit (134) volgt nu dat

$$\log_T z = \log_1 z + 2\pi i \text{ als } z \in \Omega.$$

De analytische voortzetting van $\log_T$ tot W_1 is derhalve precies $\log_1 + 2\pi i$. Langs de positieve reële as is de laatste funktie gelijk aan $\log_0 + 2\pi i$. Samenvattend zien we dat door herhaald analytisch voortzetten van de reële logarithme in positieve richting rond de oorsprong een andere tak van de logarithme verkregen kan worden, namelijk $\log_0 + 2\pi i$. De logarithme vertakt zich als het ware rond de oorsprong. We lichten dit nog eens toe vanuit een ander gezichtspunt. Beschouw het pad (vgl. Paragraaf 8.1)

$$c(t) = e^{it} \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Beschouw nu de door $\log_0$ lokaal rond $c(0) = 1$ gedefinieerde tak van $\log$. Volgen we de logarithmische funktie langs het pad c zonder daarbij onderweg van tak te wisselen, dan eindigen we in $c(2\pi) = 1$ met de tak $\log_0 + 2\pi i$. We spreken wel van analytische voortzetting van $\log_0$ langs het pad c. Door k $(k \ge 1)$ keer toepassen van de hierboven beschreven voortzettingsprocedure verkrijgen we de tak $\log_0 + 2k\pi i$. Passen we een soortgelijke procedure toe, maar dan in negatieve richting rond de oorsprong, dan verkrijgen we de takken $\log_0 - 2k\pi i$ $(k \ge 1)$. We concluderen dat alle takken van de logarithmische funktie verkregen kunnen worden door analytische voortzetting van de reële logarithmische funktie.

Machtsfunkties. Zij $\alpha \in \mathbb{C}$; we beschouwen nog eens de funktie

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z} \tag{135}$$

(vgl. Paragraaf 1.5), maar nu als meerwaardige funktie met vertakkingspunt 0. De takken van deze funktie op een gebied $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ verkrijgt men door in formule (135) de verschillende takken van de logarithme te substitueren. Is er een tak $f : \Omega \to \mathrm{C}$ gegeven, dan worden alle takken g beschreven door:

$$g(z) = e^{2\pi i N\alpha}\, f(z), \tag{136}$$

met $N \in \mathrm{Z}$. Verschillende takken verschillen dus een constante factor. Voorts volgt uit het voor de logarithme behandelde dat alle takken uiteindelijk verkregen kunnen worden door analytische voortzetting van de reële machtsfunktie $x \mapsto x^\alpha$, $]0, \infty[\to \mathrm{R}$.

Uit het bovenstaande blijkt dat de machtsfunktie $z \mapsto z^\alpha$ in het algemeen lokaal oneindig vele takken bezit. Alleen voor rationale waarden van α is dit niet het geval. In dat geval kunnen we schrijven $\alpha = \frac{p}{q}$, met p en q geheel en onderling ondeelbaar en $q \geq 1$. Men verkrijgt dan alle takken precies éénmaal door in formule (136) achtereenvolgens $N = 0, 1, \ldots, q-1$ te nemen. Een bijzonder geval is nu $p = 1$, dus $\alpha = \frac{1}{q}$. In dit geval schrijven we ook

$$\sqrt[q]{z} = z^{\frac{1}{q}}.$$

Ga na dat het volgende geldt: de takken van de meerwaardige funktie $z \mapsto \sqrt[q]{z}$ op een gebied Ω zijn precies de complex differentieerbare funkties $f : \Omega \to \mathrm{C}$ die voldoen aan de vergelijking

$$f(z)^q = z.$$

Voorbeelden.

(1) Zij wederom L_0 de negatieve reële halfrechte $]-\infty, 0]$, en zij g_0 de tak van de funktie (135) op $\mathrm{C} \setminus L_0$ die ontstaat door de hoofdwaarde $\log_0$ van de logarithme te nemen. We noemen g_0 de hoofdwaarde van de machtsfunktie $z \mapsto z^\alpha$.

Als $|z| < 1$ dan is $1 + z \in \mathrm{C} \setminus L_0$, dus de funktie $f(z) = g_0(1+z)$ is analytisch voor $|z| < 1$, en derhalve binnen de eenheidscirkel ontwikkelbaar in een machtreeks van de vorm $\sum a_n z^n$ met coëfficiënten $a_n = (n!)^{-1} f^{(n)}(0) = \binom{\alpha}{n}$ waarin

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{(\alpha)(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}. \tag{137}$$

We concluderen dat voor $|z| < 1$ geldt:

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n \tag{138}$$

waarin de hoofdwaarde van de machtsfunktie genomen is.

(2) We beschouwen de meerwaardige analytische funktie

$$\sqrt{(z-\beta)(z-\gamma)}, \tag{139}$$

Figuur 19:

met β en γ twee verschillende punten in het complexe vlak. Door de bovenstaande uitdrukking te herschrijven als produkt

$$\sqrt{z-\beta}\sqrt{z-\gamma} \tag{140}$$

zien we dat de funktie meerwaardig analytisch is met vertakkingspunten β en γ. Verder zijn er lokaal rond een punt verschillend van β, γ steeds twee takken van (139) te vinden: de een is -1 keer de ander. Zij nu L de halfrechte met beginpunt β en door γ (zie Figuur 19). Dan kunnen we L als coupure voor zowel de eerste als de tweede wortel in het produkt (140) gebruiken. Derhalve heeft (139) twee analytische takken in het gecoupeerde complexe vlak $\mathbb{C} \setminus L$. Noem een der takken $f(z)$, dan is de andere tak $-f(z)$. We zullen nu laten zien dat deze takken voortgezet kunnen worden tot de verzameling Ω die ontstaat door $\mathbb{C}$ te couperen langs een deel L_1 van L, namelijk het gesloten lijnstuk dat β en γ verbindt. Zij L_2 het resterende deel van L, dus $L_2 = L \setminus L_1$. We schrijven $f(z) = \phi(z)\psi(z)$, met $\phi(z)$ resp. $\psi(z)$ een tak van $\sqrt{z-\beta}$ resp. $\sqrt{z-\gamma}$. Beide takken zijn gedefinieerd op $\mathbb{C} \setminus L$. We beschouwen de takken aan één kant van L_2. Zetten we φ analytisch voort over L_2, dan krijgen we we de tak $-\varphi$ aan de andere kant van L_2. Doen we hetzelfde met ψ, dan krijgen we de tak $-\psi$. Zetten we dus de tak $f(z)$ voort over L_2, dan verkrijgen we $(-\varphi(z))(-\psi(z)) = f(z)$. Met andere woorden: f is analytisch voortzetbaar over L_2, dus tot $\mathbb{C} \setminus L_1$.

(3) We beschouwen nogmaals het bovenstaande voorbeeld, maar nu met $\beta = 1, \gamma = -1$. Uit het bovenstaande blijkt dat de meerwaardige analytische funktie

$$\sqrt{z^2-1} = \sqrt{(z-1)(z+1)} \tag{141}$$

twee takken toelaat op $\Omega = \mathbb{C} \setminus [-1,1]$. Is f zo'n tak, dan geldt $f(z)^2 = z^2 - 1$ op Ω. Hieruit blijkt dat $f(-\sqrt{2}) = \pm 1$. We leggen nu een tak f vast door te eisen dat $f(-\sqrt{2}) = 1$. De funktie f is analytisch op Ω. Gevraagd wordt $f(i)$ te berekenen. In ieder geval geldt $f(i)^2 = -2$, dus $f(i) = \pm i\sqrt{2}$: het probleem is het teken te bepalen. Dit kan bijvoorbeeld als volgt. Eerst specificeren we nauwkeurig takken φ resp. ψ

van $\sqrt{z-1}$ resp. $\sqrt{z+1}$ op een gebied $V \subset \Omega$, dat zowel $-\sqrt{2}$ als i bevat. Zij M de halfrechte $]-1,\infty]$, en zij $V = \mathbb{C} \setminus M$. Als $z \in V$, dan geldt $1 - z \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$. We definiëren nu

$$\varphi(z) = i\sqrt{1-z}$$

waarbij we de hoofdwaarde van de wortel nemen. Als $z \in \mathbb{C} \setminus M$, dan geldt ook $-1 - z \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$. We definiëren

$$\psi(z) = i\sqrt{-1-z}$$

waarbij we wederom de hoofdwaarde van de wortel nemen. Beschouw nu de tak $g = \varphi\psi$ van (141) op $\mathbb{C} \setminus M$. Dan is

$$g(-\sqrt{2}) = \varphi(-\sqrt{2})\psi(-\sqrt{2}) = i^2\sqrt{1+\sqrt{2}}\,\sqrt{-1+\sqrt{2}}$$

waarbij steeds de positieve reële wortels genomen worden. Dus $g(-\sqrt{2}) = -1 = -f(-\sqrt{2})$. De enige takken van (141) zijn f en $-f$, dus er moet gelden dat $g = -f$ op V. We kunnen nu $f(i)$ als volgt berekenen (de gebruikte wortels zijn steeds de hoofdwaarden):

$$\begin{aligned} f(i) = -g(i) &= \sqrt{1-i}\,\sqrt{-1-i} \\ &= \sqrt{\sqrt{2}e^{-\frac{1}{4}\pi}}\sqrt{\sqrt{2}e^{-\frac{3}{4}\pi}} \\ &= \sqrt{2}\sqrt{e^{-\frac{1}{4}\pi}}\sqrt{e^{-\frac{3}{4}\pi}} \\ &= \sqrt{2}e^{-\frac{1}{8}\pi}e^{-\frac{3}{8}\pi} \\ &= \sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}\pi} = -i\sqrt{2}. \end{aligned}$$

(4) Als laatste voorbeeld van het rekenen met meerwaardige funkties berekenen we de integraal

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx$$

met a reëel, $0 < a < 1$. In de integraal is de reële $(a-1)-$ste macht van x genomen. De integraal I is de limiet van

$$I(\epsilon, R) := \int_\epsilon^R \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx$$

als $\epsilon \downarrow 0,\ R \to \infty$.

Zij $0 < \epsilon < 1 < R$; we beschouwen het gebied $G_2 = G_2(\epsilon, R)$ bestaande uit de punten $z \in \mathbb{C}$ met $\epsilon < |z| < R$ en $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Im} z < 0$, en het gebied G_1 bestaande uit de punten $z \in \mathbb{C}$ met $\epsilon < |z| < R$ en $z \notin \overline{G_2}$, zie Figuur 20. We kiezen nu takken f_1 en f_2 van de meerwaardige funktie z^{a-1}, gedefinieerd op G_1, respectievelijk G_2. Zij L_1 de halfrechte $\varphi = -\frac{1}{4}\pi$ vanuit 0, en zij L_2 de halfrechte $-L_1$ vanuit 0. Op het gecoupeerde vlak $\mathbb{C} \setminus L_1$, dat G_1 bevat, definiëren we f_1 als de voortzetting van

Figuur 20:

de reële machtsfunktie. Zij nu f_0 de beperking van f_1 tot de negatieve imaginaire as $\{ti;\ t < 0\}$. Dan definiëren we f_2 als de analytische voortzetting van f_0 tot het gecoupeerde vlak $\mathrm{C} \setminus L_2$. Merk op dat voor $x \in \mathrm{R}$, $x > 0$ geldt:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^{a-1}, & (142)\\ f_2(x) &= e^{2(a-1)\pi i} x^{a-1}. & (143) \end{aligned}$$

Definiëren we $g_j(z) = f_j(z)/(1+z),\ j = 1, 2$ dan heeft de funktie g_2 in G_2 geen polen; g_1 heeft in G_1 de enkelvoudige pool -1 met residu $f_1(-1) = e^{(a-1)\pi i}$. Met behulp van de residuenstelling vinden we daarom:

$$\int_{\partial G_1} g_1(z)\, dz + \int_{\partial G_2} g_2(z)\, dz = 2\pi i e^{(a-1)\pi i}. \tag{144}$$

We splitsen de georiënteerde rand ∂G_1 in vier stukken: het stuk $k_1(R)$ langs $|z| = R$, het stuk $c_1(\epsilon)$ langs $|z| = \epsilon$, het stuk σ langs de positieve reële as, en het stuk τ langs de negatieve imaginaire as. De georiënteerde rand ∂G_2 splitsen we in de stukken $k_2(R)$ (langs $|z| = R$), $c_2(\epsilon)$ (langs $|z| = \epsilon$), en $-\sigma, -\tau$. Uit de definities van f_1 en f_2 volgt dat $g_1 = g_2$ langs τ. Dus

$$\int_{\tau} g_1(z)\, dz + \int_{-\tau} g_2(z)\, dz = 0.$$

Uit de formules (142) en (143) volgt dat

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} g_1(z)\, dz &= I(\epsilon, R),\\ \int_{-\sigma} g_2(z)\, dz &= -e^{2(a-1)\pi i} I(\epsilon, R). \end{aligned}$$

Verder is voor $|z| = \epsilon$:
$$\left|\frac{z^{a-1}}{1-z}\right| \leq \frac{\epsilon^{a-1}}{1-\epsilon},$$
dus:
$$\left|\int_{c_1(\epsilon)} g_1(z)\, dz + \int_{c_2(\epsilon)} g_2(z)\, dz\right| \leq \frac{2\pi\epsilon^a}{1-\epsilon}.$$
Op analoge wijze ziet men in dat
$$\left|\int_{k_1(R)} g_1(z)\, dz + \int_{k_2(R)} g_2(z)\, dz\right| \leq \frac{2\pi R^a}{R-1}.$$
Door in (144) de limiet voor $\epsilon \downarrow 0$ en $R \to \infty$ te nemen krijgen we in het licht van het bovenstaande tenslotte dat
$$[1 - e^{2(a-1)\pi i}]I = 2\pi i e^{(a-1)\pi i},$$
dus
$$I = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\, dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}. \tag{145}$$

11 De gamma-funktie

11.1 Analytische voortzetting

Voor $z \in \mathrm{C}$ met $\mathrm{Re}\, z > 0$ definiëren we de *gamma-funktie* door

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}\, e^{-t}\, dt. \tag{146}$$

In het tweede van de laatste serie voorbeelden in Hoofdstuk 3 zagen we dat de bovenstaande integraal absoluut convergeert. Door partieel te integreren leiden we uit (146) af dat

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \tag{147}$$

als $\mathrm{Re}\, z > 0$. Merk op dat $\Gamma(1) = 1$; er volgt dat

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{148}$$

Hieronder zullen we op twee manieren laten zien dat de gamma-funktie analytisch voortzetbaar is. In deze paragraaf behandelen we de grote lijn. Voor details verwijzen we naar de volgende paragraaf.

De integrand van (146) is complex differentieerbaar als funktie van z, en voldoet dus aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen (1.9). Men kan nu laten zien dat partiële differentiatie naar x en y onder het integraalteken van de oneigelijke integraal (146) geoorloofd is (zie volgende paragraaf). Hieruit volgt dat de gamma-funktie voldoet aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen en dus analytisch is op $\mathrm{Re}\, z > 0$.

Door n keer ($n \geq 1$) toepassen van (147) vinden we dat

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n-1)} \tag{149}$$

voor $\mathrm{Re}\, z > 0$. Het rechterlid van de bovenstaande formule is echter gedefinieerd voor $\mathrm{Re}\, z > -n,\ z \neq 0, 1, 2, \ldots$. We gebruiken deze observatie om Γ analytisch voort te zetten tot het complexe vlak: als $z \in \mathrm{C},\ z \neq 0, -1, -2, \ldots$ dan kiezen we $n \in \mathrm{N}$ zo dat $z > -n$ en we definiëren $\Gamma(z)$ met behulp van formule (149). Deze definitie is goed in de zin dat zij onafhankelijk is van de keuze van n : dit blijkt door toepassing van (147). Zij $m \in \mathrm{N}$; dan blijkt door (149) te gebruiken voor $n = k + 1$, dat

$$\lim_{z \to -k} \Gamma(z)(z+k) = \frac{\Gamma(1)}{(-k)(-k+1)\ldots(-1)} = \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Met behulp van Lemma 9.4 concluderen we nu dat Γ in $-k$ een enkelvoudige pool met residu $(-1)^k\,(k!)^{-1}$ heeft. We hebben aangetoond:

Stelling 11.1 *De gamma-funktie is analytisch voortzetbaar tot* $\mathrm{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$. *In het punt* $z = -k$ ($k \in \mathrm{N}$) *heeft* Γ *een enkelvoudige pool met residu* $(-1)^k k!$.

Hieronder leiden we de analytische voortzetbaarheid van de gamma-funktie nog eens op een totaal andere manier af. Daarbij zullen we een fraaie produkt formule voor $\Gamma(z)$ vinden.

Voor $n \in \mathrm{N}$ beschouwen we de funktie

$$I_n(z) = \int_0^n t^{z-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \, dt. \tag{150}$$

Merk op dat met behulp van de machtreeksontwikkeling (81) volgt dat $\lim_{n\to\infty} n \log(1 - n^{-1}t) = -t$, dus $\lim_{n\to\infty}(1-n^{-1}t)^n = e^{-t}$, puntsgewijs met betrekking tot t. In de volgende paragraaf zullen we laten zien dat men in (150) overal de limiet voor $n \to \infty$ kan nemen. Dit leidt tot

$$\lim_{n\to\infty} I_n(z) = \Gamma(z); \tag{151}$$

men kan zelfs aantonen dat de convergentie uniform is op iedere verzameling van de vorm $1 < \mathrm{Re}\, z < R$, met $R > 1$. Door k keer partieel integreren in (150) zien we dat

$$I_n(z) = \frac{1}{n^k} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{z(z+1)\ldots(z+k-1)} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-k} t^{z+k-1} \, dt.$$

Voor $k = n$ kunnen we de integraal berekenen en vinden we

$$I_n(z) = \frac{n^z n!}{z(z+1)\ldots(z+n)}.$$

We concluderen

Stelling 11.2 *Zij $R > 1$. Dan is*

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^z n!}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}, \tag{152}$$

uniform op het gebied $1 < \mathrm{Re}\, z < R$.

Uit het bovenstaande resultaat volgt met Stelling 11.3 dat de gamma-funktie analytisch is op het gebied $\mathrm{Re}\, z > 0$. We gaan nu onderzoeken of de limiet (152) analytisch voortzetbaar is. Daartoe herschrijven we het quotiënt in het rechterlid van (152) als

$$\frac{1}{z} \exp\left(z(\log n - 1 - \frac{1}{2} - \ldots - \frac{1}{n})\right) \prod_{k=1}^{n} \left[\left(1 + \frac{1}{z}\right)^{-1} \exp\left(\frac{z}{k}\right)\right].$$

Door de limiet voor $n \to \infty$ te nemen, vinden we, voor $\mathrm{Re}\, z > 1$, dat

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \lim_{n\to\infty} \exp\left(\sum_{k=1}^{n} g_k(z)\right),$$

waarin

$$g_k(z) = \frac{z}{k} - \log\left(1 + \frac{z}{k}\right).$$

Zij $\rho > 0$, en zij G de cirkelschijf $|z| < \rho$ waaruit (zonodig) weggesneden zijn cirkelschijfjes $|z-k| \leq \epsilon$ ($\epsilon > 0$; $k = -1, -2, \ldots$). Uit (81) volgt

$$w - \log(1+w) = \mathcal{O}\left(w^2\right) \quad (w \to 0),$$

dus er bestaat een constante $M > 0$ zo dat voor alle $z \in G$ geldt

$$|g_k(z)| \leq \frac{M}{k^2}$$

(voor elk positief geheel getal k). Met behulp van Stelling 4.10 concluderen we nu dat de reeks $\sum g_k$ uniform convergeert op G en daar een analytische funktie definieert (wegens Stelling 11.3). We concluderen dat door

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right)^{-1} \exp\left(\frac{z}{k}\right) \tag{153}$$

de analytische voortzetting van Γ tot het complexe vlak met uitzondering van de punten $z = 0, -1, -2, \ldots$ gegeven wordt; bovendien zien we weer dat Γ in de genoemde punten enkelvoudige polen heeft.

11.2 Technische details

Allereerst behandelen we een nuttige stelling over de uniforme limiet van een rij analytische funkties.

Stelling 11.3 *Zij F_n een rij analytische funkties gedefinieerd op een open deelverzameling V van* C. *Als de rij F_n op V uniform convergeert, dan is de limietfunktie F analytisch op V. Bovendien geldt voor iedere $p \in$* N *dat*

$$F^{(p)}(z) = \lim_{n \to \infty} F_n^{(p)}(z) \qquad (z \in V). \tag{154}$$

Bewijs: Zij $\alpha \in V$ willekeurig en kies een open cirkelschijf D met middelpunt α waarvan de afsluiting $\overline{D}$ nog in V ligt. Wegens de integraalformule van Cauchy (vgl. Stelling 8.6) is, voor alle $w \in D$:

$$F_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{F_n(w)}{w - z}\, dw. \tag{155}$$

Uit de uniforme convergentie van de rij F_n volgt wegens Stelling 8.3 dat

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{F(w)}{w - z}\, dw. \tag{156}$$

De funktie F is continu; als in het bewijs van Stelling 8.7 volgt dat de integraal (156) in een machtreeks rond α te ontwikkelen is: F is derhalve analytisch. Bovendien geldt op grond van de uniforme convergentie dat

$$\begin{aligned} F^{(p)}(\alpha) &= \frac{p!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{F(w)}{(w-\alpha)^{p+1}}\, dw \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{p!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{F_n(w)}{(w-\alpha)^{p+1}}\, dw \\ &= \lim_{n\to\infty} F_n^{(p)}(\alpha). \end{aligned}$$

□

We passen het bovenstaande toe op de gamma-funktie. Definieer de funktie F_n op $\operatorname{Re} z > 0$ door

$$F_n(z) = \int_0^n t^{z-1} e^{-t}\, dt. \tag{157}$$

Fixeer $R > 2$, en definieer $V(R)$ als de verzameling van punten $z \in \mathrm{C}$ met $2 < \operatorname{Re} z < R$. Dan is voor $z \in V(R)$:

$$\begin{aligned} |\Gamma(z) - F_n(z)| &= \left| \int_n^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt \right| \\ &\leq \int_n^\infty t^{R-1} e^{-t}\, dt. \end{aligned}$$

De laatste integraal is onafhankelijk van $z \in V(R)$ en heeft limiet 0 als $n \to \infty$. We concluderen dat de rij funkties F_n op $V(R)$ uniform naar Γ convergeert als $n \to \infty$.

De integrand in (157) is een continu differentieerbare funktie in de variabelen $(z,t) = (x,y,t) \in V(R) \times [0,\infty[$. De funktie F_n is dus continu differentieerbaar in (x,y) en differentiatie onder het integraalteken is geoorloofd volgens een stelling uit Infinitesimaalrekening B. In het bijzonder is

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) F_n\,(z) = \int_0^\infty \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \left[t^{z-1}e^{-t}\right] = 0,$$

omdat de integrand complex differentieerbaar in z is en dus aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen (4) voldoet. De funktie F_n voldoet derhalve ook aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen en is dus complex differentieerbaar (vgl. Stelling 1.9). Bovendien geldt voor elke $p \in \mathrm{N}$ dat $\frac{d^p}{dz^p} F_n(z) = \frac{\partial^p}{\partial x^p} F_n(z)$ (zie het begin van Paragraaf 1.3); door differentiatie onder het integraalteken en opmerkend dat wegens de analyticiteit van de integrand de differentiaties naar x weer vervangen kunnen door differentiaties naar z concluderen we dat

$$\frac{d^p}{dz^p} F_n(z) = \int_0^n (\log t)^p t^{z-1}\, e^{-t}\, dt. \tag{158}$$

Met behulp van de bovenstaande stelling concluderen we tenslotte dat de gamma-funktie complex differentieerbaar is op iedere verzameling $V(R)$, en dus op $\operatorname{Re} z > 2$. Bovendien volgt door in (158) de limiet te nemen, dat

$$\frac{d^p\Gamma}{dz^p}(z) = \int_0^\infty (\log t)^p\, t^{z-1}\, e^{-t}\, dt. \tag{159}$$

Het linkerlid van (147) is op grond van het bovenstaande analytisch op $\mathrm{Re}\, z > 1$; hieruit leiden we af dat Γ analytisch is op $\mathrm{Re}\, z > 1$, met afgeleiden gegeven door (159). Herhaling van dit argument leert ons dat hetzelfde geldt op het gebied $\mathrm{Re}\, z > 0$.

Om de limietovergang (151) te verantwoorden hebben we in de integrand van $I_n(z)$ uniformiteit in t nodig.

Lemma 11.4 *Voor alle $n \in \mathrm{N}$, $t \in [0, n]$ geldt*

$$\left| e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n - 1 \right| \leq \frac{t^2}{n}. \tag{160}$$

Bewijs: De funktie $g : \mathrm{R} \to \mathrm{R}, x \mapsto e^x - x - 1$ voldoet aan $g'(x) < 0$ voor $x < 0$ en $g'(x) > 0$ voor $x > 0$. Uit $g(0) = 0$ volgt daarom dat $g(x) \geq 0$ voor alle $x \in \mathrm{R}$, maw. $e^x \geq x + 1$ voor alle reële x (maak een plaatje). Passen we dit toe op achtereenvolgens $x = -t/n$ en $x = t/n$ dan krijgen we

$$(1 - \frac{t}{n})^{-n} \leq e^t \leq (1 + \frac{t}{n})^n.$$

We veronderstellen nu dat $0 \leq t \leq n$. Door in de bovenstaande uitdrukking alle leden met $(1 - t/n)^n$ te vermenigvuldigen vinden we dat

$$1 \leq e^t (1 - \frac{t}{n})^n \leq (1 - \frac{t^2}{n^2})^n. \tag{161}$$

Voor alle reële x met $x \geq -1$ geldt $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ (toon dit zelf aan door volledige inductie naar n te gebruiken). Passen we deze ongelijkheid met $x = -t^2/n^2$ toe op (161) dan vinden we (160). $\square$

Uit het bovenstaande lemma leiden we af dat voor alle $z \in V(R)$ geldt dat

$$|I_n(z) - F_n(z)| \leq \int_0^n t^{R-1} e^{-t} \left| e^t (1 - \frac{t}{n})^n - 1 \right| \, dt \leq \frac{1}{n} \Gamma(R + 2).$$

Derhalve geldt dat $\|I_n - F_n\|_{V(R)} \leq n^{-1} \Gamma(R + 2) \to 0$ als $n \to \infty$.

11.3 De beta-funktie

Door substitutie van t^2 voor t in (146) zien we dat

$$\Gamma(z) = 2\int_0^\infty t^{2z-1}\, e^{-t^2}\, dt \quad (\operatorname{Re} z > 0).$$

Voor $z = \frac{1}{2}$ geeft dit een uit het college Infinitesimaalrekening B bekende integraal, en we zien dat

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \tag{162}$$

Voor $\operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Re} w > 0$ geldt dat

$$\Gamma(z)\Gamma(w) = 4\int_0^\infty \int_0^\infty s^{2w-1}\, e^{-s^2}\, t^{2z-1}\, e^{-t^2}\, ds\, dt.$$

Door substitutie van poolcoördinaten: $s = \rho\cos\varphi$ en $t = \rho\sin\varphi$ (zodat $ds\, dt = \rho\, d\rho\, d\varphi$), volgt hieruit dat

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(w) &= 4\int_0^\infty \rho^{2z+2w-1} e^{-\rho^2}\, d\rho \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{2z-1}\varphi\, \sin^{2w-1}\varphi\, d\varphi \\ &= 2\Gamma(z+w)\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{2z-1}\varphi\, \sin^{2w-1}\varphi\, d\varphi.\end{aligned}$$

We definiëren nu de beta-funktie door

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}, \tag{163}$$

voor alle z en w waarvoor het rechterlid bestaat. Er volgt dat

$$B(z,w) = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{2z-1}\varphi\, \sin^{2w-1}\varphi\, d\varphi \quad (\operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Re} w > 0). \tag{164}$$

Merk op dat $B(z,w) = B(w,z)$. Door eenvoudige substituties verkrijgen we uit (164) andere integraalvoorstellingen voor de beta-funktie. Zo levert de substitutie $\sin^2\varphi = t$:

$$B(z,w) = \int_0^1 (1-t)^{z-1} t^{w-1}\, dt \qquad (\operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Re} w > 0).$$

Gebruik van de relatie $\sin 2\varphi = \sin 2(\frac{1}{2}\pi - \varphi)$ en substitutie $\sin^2 2\varphi = t$ in (164) leert ons dat

$$B(z,z) = 4\int_0^{\frac{1}{4}\pi} (\sin\varphi\, \cos\varphi)^{2z-1}\, d\varphi = 2^{1-2z}\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\, dt$$

ofwel

$$B(z,z) = 2^{1-2z}\, B(z, \tfrac{1}{2}).$$

Gebruiken we (163) dan leiden we hieruit weer de *verdubbelingsformule* voor de $\Gamma-$funktie af:

$$\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma(z)\Gamma(z+\tfrac{1}{2}) \tag{165}$$

welke zeker geldig is voor $\operatorname{Re} z > 0$. Aangezien alle hierin voorkomende funkties analytisch zijn, geldt de formule (165) voor alle z waarvoor beide leden gedefinieerd zijn (gebruik analytische voortzetting: Stelling 8.13). Als toepassing van (165) noemen we de formule

$$\Gamma(n+\tfrac{1}{2}) = \frac{\Gamma(2n)\sqrt{\pi}}{\Gamma(n)2^{2n-1}} = \frac{(2n-1)!\,\sqrt{\pi}}{(n-1)!\,2^{2n-1}}$$

voor ieder natuurlijk getal n.

Uit (163) en (164) volgt, voor $0 < \operatorname{Re} z < 1$, dat

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = B(z, 1-z) = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{1-2z}\varphi\,\sin^{2z-1}\varphi\,d\varphi;$$

substitutie $\tan^2\varphi = t$ en gebruik van (145) leveren

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{1+t}\,dt = \frac{\pi}{\sin\pi z}$$

ofwel

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin\pi z}. \tag{166}$$

Met behulp van analytische voortzetting volgt weer dat de bovenstaande betrekking geldig is voor alle niet-gehele z. Uit (166) volgt, met (147) en (153), dat

$$\frac{\pi}{\sin\pi z} = (-z)\Gamma(z)\Gamma(-z) = \frac{1}{z}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)^{-1}\left(1-\frac{z}{k}\right)^{-1}$$

dus

$$\sin\pi z = \pi z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right). \tag{167}$$

De laatste formule is ook waar voor gehele z en dus voor alle $z \in \mathbb{C}$; voor reële waarden van z komt de formule overeen met de eerder verkregen betrekking (53). Door in (167) de waarde $z = \frac{1}{2}$ te substitueren, vinden we *het produkt van Wallis*

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4k^2}\right) = \frac{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot9\ldots}{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdot8\ldots}.$$

Tenslotte geven we nog enkele voorbeelden van integralen die men met behulp van de in dit hoofdstuk behandelde formules kan berekenen.

Voorbeelden.

(1) Uit (164) en (163) volgt, voor natuurlijke getallen p en q:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^p\varphi\sin^q\varphi\,d\varphi = \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+1\right)};$$

zo is

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^4\varphi \sin^6\varphi \, d\varphi = \frac{\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(\frac{7}{2})}{2\Gamma(6)} = \frac{3\pi}{512},$$

waarbij gebruik is gemaakt van (147), (148) en (162).

(2) Met behulp van de substitutie $1 - x^2 = y$ berekenen we

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-x^2)^n \, dx &= \frac{1}{2}\int_0^1 y^n (1-y)^{-1}\, dy \\ &= \frac{1}{2}B(n+1,\frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\frac{1}{2})}{2\Gamma(n+\frac{1}{2})} \\ &= \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n+1)!}.\end{aligned}$$

(3) Als laatste voorbeeld berekenen we

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^6}.$$

De substitutie $x^6 = y$ levert

$$\frac{1}{6}\int_0^\infty \frac{y^{-\frac{5}{6}}}{1+y}\, dy = \frac{\pi}{6\sin\frac{1}{6}\pi} = \frac{\pi}{3}$$

hetgeen overeenkomt met het eerder gevonden antwoord in Paragraaf 9.3, Toepassing (2).

11.4 De formule van Stirling

Uit (81) volgt dat

$$\log(1+\frac{1}{n}) - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

(voor $n \to \infty$). Omdat de reeks $\sum \frac{1}{n^2}$ convergeert, volgt hieruit met behulp van het majorantiecriterium 2.10 dat de reeks

$$\sum \left[n\log\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1 + \frac{1}{2n}\right]$$

convergeert. Derhalve bestaat de limiet

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left[n\log\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1 + \frac{1}{2n}\right].$$

Uit

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} n\log\left(1+\frac{1}{n}\right) &= \sum_{n=1}^{N} n[\log(n+1)-\log n] \\ &= N\log(N+1)-\log(N!)\end{aligned}$$

en

$$\sum_{n=1}^{N}\left(-1+\frac{1}{2n}\right) = -N+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{N}\right)$$

volgt nu het bestaan van

$$\lim_{N\to\infty}\left[N\log(N+1)-\log(N!)-N+\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}+\ldots\frac{1}{N})\right].$$

Nu bestaan ook de limieten

$$\lim_{N\to\infty}[N\log(N+1)-N\log N] = \lim_{N\to\infty} N\log\left(1+\frac{1}{N}\right) = 1$$

en

$$\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots\frac{1}{N}-\log N\right) = \gamma$$

(vgl. (22)). Derhalve bestaat

$$\lim_{N\to\infty}\left[N\log N-\log(N!)-N+\frac{1}{2}\log N\right].$$

Door de $e-$macht van min deze uitdrukking te nemen leiden we hieruit af dat de uitdrukking

$$\lambda_N := \frac{N!e^N}{N^N\sqrt{N}}$$

voor $N\to\infty$ een limiet $\lambda>0$ heeft. Hieruit volgt weer dat

$$N! = N^N e^{-N}\sqrt{N}\lambda_N \tag{168}$$

met $\lim_{N\to\infty}\lambda_N=\lambda$. Uit (152) met $z=\frac{1}{2}$ en (162) volgt dat

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{1}{2}}n!2^{n+1}}{(2n+1)(2n-1)\ldots3\cdot1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{1}{2}}(n!)^2 2^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sqrt{\pi}. \tag{169}$$

Substitueren we (168) met $N=n$ resp. $N=2n$ in formule (169), dan vinden we:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n^2}{\sqrt{2}\lambda_{2n}} = \sqrt{\pi}.$$

Hieruit volgt tenslotte dat

$$\lim_{N\to\infty}\lambda_N = \sqrt{2\pi}. \tag{170}$$

De betrekkingen (168) en (170) geven samen de volgende benaderingsformule van Stirling voor $N!$

Stelling 11.5 De formule van Stirling.

$$N! = N^N e^{-N} \sqrt{2\pi N}\, \mu_N \qquad \text{met} \qquad \lim_{N\to\infty} \mu_N = 1. \tag{171}$$

12 Gewone differentiaalvergelijkingen

12.1 Inleiding

Een vergelijking waarin (onbekende) funkties en hun afgeleiden voorkomen noemen we een differentiaalvergelijking. Een voorbeeld is de vergelijking

$$f'(x) - xf(x)^2 = e^x. \tag{172}$$

Hierin is sprake van een variabele $x \in \mathrm{R}$ en een funktie $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$. Onder het oplossen van de differentiaalvergelijking verstaan we het vinden van alle funkties f die aan de vergelijking (172) voldoen.

Een tweede voorbeeld is de vergelijking

$$g_{xx}(x,y) + x^2 g_{xy}(x,y) - e^y g_{yy}(x,y) = y. \tag{173}$$

Hierin is sprake van een funktie g van twee reële variabelen x en y. Onder het oplossen van de vergelijking (173) verstaan we weer het bepalen van alle funkties g die aan (173) voldoen.

In de vergelijking (172) treedt slechts één variabele (nl. x) op. Een dergelijke vergelijking heet een *gewone* differentiaalvergelijking. In het tweede voorbeeld (173) treden twee of meer variabelen op: dergelijke vergelijkingen heten *partiële* differentiaalvergelijkingen. In dit diktaat zullen we het verder (vrijwel) uitsluitend over gewone differentiaalvergelijkingen hebben.

In de differentiaalvergelijking (172) komt ten hoogste een eerste orde afgeleide van de onbekende funktie f voor. De differentiaalvergelijking heet daarom een gewone differentiaalvergelijking van de eerste orde. Algemeen ziet een gewone differentiaalvergelijking van de m-de orde ($m \geq 1$) er uit als:

$$F(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(m)}(x)) = 0. \tag{174}$$

Hierin is $F : \mathrm{R} \times \mathrm{R}^{m+1} \to \mathrm{R}$ een gegeven funktie. Onder het oplossen van de vergelijking verstaan we weer het vinden van alle mogelijke funkties $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ die aan (174) voldoen. Oplossingen f moeten dus in het bijzonder m keer differentieerbaar zijn. Later zullen we ook problemen beschouwen waarbij andere condities aan het domein van F opgelegd zijn.

Wij zullen ons vooral bezighouden met *expliciete* gewone differentiaalvergelijkingen. Dat zijn vergelijkingen van de vorm

$$f^{(m)}(x) = G(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(m-1)}(x)) \tag{175}$$

met $G : \mathrm{R} \times \mathrm{R}^m \to \mathrm{R}$ een gegeven funktie; f is weer de gezochte funktie. Deze vergelijking is te herschrijven als (174) met $F(x, u_1, \ldots u_{m+1}) = u_{m+1} - G(x, u_1, \ldots, u_m)$.

Een expliciete gewone differentiaalvergelijking van de m-de orde is altijd te herleiden tot een stelsel van expliciete eerste orde vergelijkingen. We lichten dit toe aan de hand van de vergelijking (175). Stel dat f voldoet aan (175), en definieer de funkties $g_1, \ldots, g_m : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ door

$$g_j(x) = f^{(j-1)}(x).$$

Dan voldoen $g_1, \ldots, g_m$ aan het stelsel eerste orde vergelijkingen

$$\begin{aligned} g_1' &= g_2 \\ g_2' &= g_3 \\ &\vdots \\ g_m' &= G(x, g_1, \ldots, g_m). \end{aligned} \tag{176}$$

Merk op dat we in de bovenstaande vergelijkingen gemakshalve de funkties genoteerd hebben zonder variabele. Deze slordigheid zullen we in het vervolg wel meer begaan.

Omgekeerd gaat men gemakkelijk na: als een $m-$tal funkties $g_1, \ldots, g_m$ aan de vergelijkingen (176) voldoet, dan voldoet de funktie $f = g_1$ aan de vergelijking (175). De vergelijking (175) is derhalve gelijkwaardig met het stelsel (176).

Het bovenstaande motiveert ons om meer algemeen naar een stelsel eerste orde vergelijkingen van de vorm

$$g_j'(x) = F_j(x, g_1(x), \ldots, g_m(x)) \qquad (1 \leq j \leq m) \tag{177}$$

te kijken. Hierbij is sprake van een m-tal gegeven funkties $F_j : \mathrm{R} \times \mathrm{R}^m \to \mathrm{R}$ en een m-tal onbekende funkties $g_j : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$. We kunnen het stelsel (177) als één vergelijking schrijven door vectornotatie te gebruiken: definieer de funktie $F : \mathrm{R} \times \mathrm{R}^m \to \mathrm{R}^m$ door $F(x, u) = (F_1(x, u), \ldots, F_m(x, u))$ en schrijf $g = (g_1, \ldots, g_m)$. Dan kunnen we het stelsel (177) herschrijven als

$$g'(x) = F(x, g(x)). \tag{178}$$

Tenslotte behandelen we nog enige veelgebruikte terminologie. De expliciete m-de orde vergelijking (175) heet *homogeen* als de funktie $f = 0$ een oplossing is; dit betekent precies dat $G(x, 0 \ldots, 0) = 0$ voor alle $x \in \mathrm{R}$. Zo is de vergelijking $f'' = -f + (1 - f^2) f'$ homogeen, terwijl de vergelijking $f'' = -f + ((1 - f^2) f' + x$ dat niet is. Het stelsel (177), of equivalent daarmee de vectorvergelijking (178) heet homogeen als $F_j(x, 0) = 0$ $(x \in \mathrm{R}, 1 \leq j \leq m)$.

De vergelijking (175) heet *lineair* als de funktie G geschreven kan worden als $G(x, u) = b(x) - \sum_{j=0}^{m-1} a_j(x) u_j$, met b, a_j funkties $\mathrm{R} \to \mathrm{R}$. De vergelijking (175) wordt dan

$$f^{(m)}(x) + a_{m-1}(x) f^{(m-1)}(x) + \cdots + a_0(x) f(x) = b(x). \tag{179}$$

In het bijzonder is de vergelijking homogeen als $b = 0$. De vector vergelijking (178) heet lineair als $F(x, u) = A(x)u + b(x)$, met $A(x)$ een $m \times m$-matrix waardige funktie van $x \in \mathrm{R}$, en b een funktie $\mathrm{R} \to \mathrm{R}^m$. De vergelijking (178) wordt dan dus

$$g'(x) = A(x) g(x) + b(x). \tag{180}$$

De bovenstaande vergelijking is weer homogeen als $b = 0$.

Tenslotte vermelden we nog dat de vergelijking (175) (of (178)) *autonoom* heet als de funktie $G(x,u)$ (of $F(x,u)$) niet van zijn eerste variabele $x \in \mathrm{R}$ afhangt. Een voorbeeld van een autonoom stelsel vergelijkingen vormen de vergelijkingen van Hamilton:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}(p,q), \qquad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}(p,q). \tag{181}$$

Hierin is H een gegeven differentieerbare funktie $\mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$, de zogenaamde Hamiltoniaan. De onbekende funkties zijn $q, p : \mathrm{R} \to \mathrm{R}^n$. Verder hebben we in het bovenstaande de notaties

$$\frac{\partial H}{\partial p} = (\frac{\partial H}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial x_n})$$

en

$$\frac{\partial H}{\partial q} = (\frac{\partial H}{\partial x_{n+1}}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial x_{2n}})$$

gebruikt. Deze (traditionele) notatie is wellicht enigszins verwarrend omdat daardoor in formule (181) de symbolen p en q zowel voor funkties als voor variabelen gebruikt worden.

12.2 Vector- en richtingsvelden

We beschouwen de autonome expliciete eerste orde vergelijking:

$$y' = F(y) \tag{182}$$

met F een R^n-waardige funktie op R^n. De onbekende $y = (y_1, \ldots, y_n)$ (voorheen g geheten, vgl. (178)) is een R^n-waardige funktie van een reële variabele x. Bij de in (182) gebruikte notatie is de volgende waarschuwing op zijn plaats.

Waarschuwing.

(a) het symbool y stelt een funktie voor, en niet een (multi-) variabele;

(b) de funkties y en y' zijn genoteerd zonder hun variabelen. De vergelijking (182) dient gelezen te worden als:

$$y'(x) = F(y(x)).$$

Van de funktie F veronderstellen we ditmaal slechts dat hij gedefinieerd is op een deel D van R^n. Onder een oplossing van (182) verstaan we nu een funktie $y : I \to \mathrm{R}^n$, gedefinieerd op een interval $I \subset \mathrm{R}$, die voldoet aan $y(x) \in D$ voor alle $x \in I$, en aan de vergelijking (182).

De funktie F voegt aan ieder punt $y \in D$ een vector $F(y)$ toe (merk op dat y hier een variable voorstelt). We noemen F daarom wel een vectorveld op D. Meetkundig gezien is een oplossing van (182) dus een geparametriseerde kromme y in D, waarvan de snelheidsvector $y'(x)$ gegeven wordt door $F(y(x))$. Een oplossing heet daarom in deze context ook wel een integraal- of oplossingskromme voor het vectorveld F.

Is $y : I \to D$ een oplossingskromme van (182), dan is voor iedere vaste $c \in \mathrm{R}$ ook

$$z(x) = y(x - c) \tag{183}$$

een oplossingskromme van (182), gedefinieerd op het verschoven interval $J = c + I$. Dit is een gevolg van de autonomie van de vergelijking. Merk op dat y en z dezelfde kromme in D als beeld hebben.

In de praktijk heeft x vaak de interpretatie van tijdvariabele. Men gebruikt dan meestal de notatie t ipv. x en $\dot{y}$ ipv. y'. In deze context noemt men F een *tijdsonafhankelijk* vectorveld: het is onafhankelijk van de variable t. De oplossing (183) is in deze optiek uit y verkregen door verschuiving van het tijdstip $t = 0$.

Door het vectorveld F te tekenen kan men zich vaak een beeld vormen van het kwalitatieve gedrag van de oplossingskrommen. We lichten dit toe aan de hand van een voorbeeld.

Voorbeeld.

We beschouwen een voorbeeld van een autonome vectorvergelijking van de vorm:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= F_1(y_1, y_2), \\ \dot{y}_2 &= F_2(y_1, y_2), \end{aligned}$$

met $F = (F_1, F_2)$ een vectorveld op R^2. De variable heet t en wordt geinterpreteerd als tijdvariable. Het y_1, y_2-vlak dat we bij deze vergelijking bestuderen heet het *fasevlak*. In het algemeen spreken we bij een autonome vectorvergelijking van dimensie $n \geq 3$ over de faseruimte.

De wiskundige slinger (massapunt opgehangen aan een onrekbaar koord) wordt beschreven door de tweede orde vergelijking

$$\ddot{\varphi} + k \sin \varphi = 0. \tag{184}$$

Hierin is φ de hoek die het koord met de verticaal door het ophangpunt maakt, als funktie van de tijd t. Voorts is $k = g/l$ met g de versnelling van de zwaartekracht en l de lengte van het koord. Schrijven we $y_1 = \varphi$ en $y_2 = \dot{\varphi}$, dan krijgen we de vergelijkingen voor de oplossingskrommen in het fasevlak van de wiskundige slinger:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= -k \sin y_1. \end{aligned} \tag{185}$$

In Figuur 21 is het bijbehorende tijdsonafhankelijke vectorveld

$$F(y_1, y_2) = (y_2, -k \sin y_1)$$

geschetst. De nulpunten van dit vectorveld zijn $(k\pi, 0)$, $k \in \mathrm{Z}$. Het plaatje is periodiek met periode 2π in de y_1-richting. Oplossingskrommen gaan derhalve door

Figuur 21:

verschuiving over de vector $(2\pi, 0)$ weer in oplossingskrommen over. We kunnen dus volstaan met een analyse in het deel C bepaald door $-\pi \leq y_1 \leq \pi$ in het fasevlak. Hierbij kunnen we elk punt $(-\pi, y_2)$ identificeren met (π, y_2), zodat we eigenlijk op een cilinder werken. In feite is deze cilinder een natuurlijker faseruimte voor de wiskundige slinger: de hoekvariabele wordt hierbij als punt op de cirkel beschouwd.

Ga na dat het vectorveld ook symmetrisch is ten aanzien van puntspiegeling in de oorsprong. Deze spiegeling voert daarom oplossingskrommen over in oplossingskrommen. Na deze opmerkingen hebben we reeds enig kwalitatief inzicht in het gedrag van de oplossingskrommen.

Door de bovenstaande vergelijkingen op een bepaalde manier af te leiden kunnen we ons inzicht vergroten. Beschouw de willekeurig vaak differentieerbare funktie

$$H(y_1, y_2) = \frac{1}{2}y_2^2 - k\cos y_1$$

op de faseruimte R^2 (H staat voor Hamiltoniaan). De energie van het massapunt met hoek φ en hoeksnelheid $\dot{\varphi}$ wordt gegeven door

$$\frac{1}{2}l^2\dot{\varphi}^2 - l\,g\,\cos\varphi = l^2 H(\varphi, \dot{\varphi}).$$

Op grond van de wet van behoud van energie vermoeden we dat de slinger beschreven wordt door de vergelijking

$$\frac{d}{dt}H(\varphi(t), \dot{\varphi}(t)) = 0. \tag{186}$$

Door het linkerlid van de bovenstaande vergelijking uit te werken met de kettingregel verkrijgen we, na deling door $\dot{\varphi}(t)$, wederom formule (184). Hieraan zien we dat (186) gelijkwaardig is met (184) en dus inderdaad geldt. Een oplossingskromme $y(t)$ van (185) moet daarom voldoen aan

$$H(y_1(t), y_2(t)) = \text{constant}.$$

Opmerking. We kunnen het laatste ook inzien door uit te gaan van de vergelijkingen (185). Eerst merken we op dat

$$(\frac{\partial H}{\partial y_2}, -\frac{\partial H}{\partial y_1}) = F. \tag{187}$$

Hieruit volgt dat de vectorvelden grad$H$ en F onderling loodrecht zijn. Is $y(t)$ een oplossingskromme voor (185), dan geldt dus

$$\frac{d}{dt}H(y(t)) = \text{grad}H(y(t)) \cdot \dot{y}(t) = \text{grad}H(y(t)) \cdot F(y(t)) = 0,$$

waaruit volgt dat H constant is langs $y(t)$. Wegens (187) zijn de vergelijkingen (185) juist de Hamilton vergelijkingen voor de funktie H (vgl. (181)).

Aan (187) zien we verder dat de niveaulijnen van H overal raken aan F. Door ze met de juiste doorloopsnelheid te parametriseren verkrijgen we zo precies de oplossingskrommen van (185). Beschouw nu het deel Ω van C dat gegeven wordt door de vergelijking

$$H(y_1, y_2) < k.$$

De rand $\partial\Omega$ is de verzameling $(y_1, y_2) \in C$ met

$$y_2^2 = 2k(1 + \cos y_1),$$

zie Figuur 21.

Oplossingskrommen binnen Ω zijn gesloten. Ze corresponderen met een periodieke slingerbeweging waarbij een grootste hoek aangenomen wordt: dit is juist de y_1-coordinaat van het snijpunt van de kromme met de positieve y_1-as.

Oplossingskrommen buiten $\overline{\Omega}$ corresponderen met een slingerbeweging waarbij alle hoeken doorlopen worden: de slinger gaat helemaal rond. In de cylindrische faseruimte zijn ook deze krommen gesloten.

De nulpunten van F corresponderen met evenwichtssituaties. Zo correspondeert $(0, 0)$ met de oplossing $z(t) \equiv (0, 0)$. Dit is een stabiel evenwicht: iedere oplossingskromme met een punt in de buurt van $(0, 0)$ blijft in de buurt van $(0, 0)$. Het nulpunt $(\pi, 0)$ correspondeert met het labiele evenwicht $z(t) \equiv (\pi, 0)$. Er zijn startpunten willekeurig dicht bij $(\pi, 0)$ van waaruit de oplossingskrommen ver van $(\pi, 0)$ weglopen.

Figuur 22:

Tenslotte merken we nog op dat de rand $\partial\Omega$ gesplitst kan worden in vier delen, namelijk de punten $(-\pi, 0)$, $(\pi, 0)$, het deel k_1 van $\partial\Omega$ dat strikt boven de y_1-as ligt, en het deel k_2 van $\partial\Omega$ dat strikt onder de y_1-as ligt. Al deze delen zijn de beelden van oplossingskrommen. Zo kan men laten zien dat er een oplossingskromme $y(t)$ bestaat die k doorloopt, en waarvoor geldt:

$$\lim_{t\to-\infty} y(t) = (-\pi, 0), \qquad \lim_{t\to\infty} y(t) = (\pi, 0).$$

Wat is de fysische betekenis van deze oplossing?

We beschouwen nu de algemene expliciete eerste orde vectorvergelijking

$$y' = F(x, y). \tag{188}$$

Hierbij is F een R^n-waardige funktie op een deel D van $\mathrm{R} \times \mathrm{R}^n$. Onder een oplossing van (188) verstaan we een op een interval $I \subset \mathrm{R}$ gedefinieerde R^n-waardige funktie met $(x, y(x)) \in D$ $(x \in I)$, die voldoet aan (188).

We beschouwen eerst het geval $n = 1$. Dan is $D \subset \mathrm{R}^2$. Een oplossing y van (188) is nu een funktie $y : I \to \mathrm{R}$ waarvan de grafiek graf y in D ligt, terwijl de raaklijn aan graf y in ieder punt $(x, y(x))$ richtingscoëfficiënt $F(x, y(x))$ heeft. Voeg nu aan ieder punt $(x, y) \in D$ de lijn $L_{x,y}$ door (x, y) met richtingscoefficiënt $F(x, y)$ toe. De collectie van deze lijnen heet het richtingsveld van de vergelijking (188). Zie Figuur 22. Een differentieerbare funktie $y : I \to \mathrm{R}$ met in D gelegen grafiek is oplossing van (188) als in ieder punt $(x, y(x))$ geldt dat $L_{x,y(x)}$ raakt aan de grafiek van y.

In het algemeen kunnen we meetkundig inzicht verkrijgen in de oplossingen van (188) door de vergelijking als volgt te herschrijven als een autonome vergelijking. Definieer het vectorveld $G : D \to \mathrm{R}^{n+1}$ door

$$G(x, y) = (1, F(x, y)).$$

Merk op dat voor $n = 1$ geldt:

$$L_{x,y} = (x, y) + \langle G(x, y) \rangle.$$

Het vectorveld $G = (1, F)$ heet daarom ook wel het raakvectorveld bij (188).

Is $y : I \to D$ een oplossing van (188), dan is voor iedere vaste $c \in \mathrm{R}$ de funktie

$$z(t) = (t - c, y(t - c))$$

een op $c + I$ gedefinieerde oplossing van de autonome vergelijking

$$\dot{z} = G(z). \tag{189}$$

Beschouwen we omgekeerd een op een interval J gedefinieerde oplossing z van (189), dan is $\dot{z}_1 = 1$, dus $z_1(t) = t - c$ voor een constante $c \in \mathrm{R}$. Gebruiken we de notatie $\tilde{z} = (z_2, \ldots, z_{n+1})$ dan zien we voorts dat

$$\dot{\tilde{z}} = F(t - c, \tilde{z}).$$

De funktie $y(t) = \tilde{z}(t + c)$ is dus een op $I = -c + J$ gedefinieerde oplossing van (188). Merk op dat $z(t) = (t - c, y(t - c))$, $t \in c + I$. De oplossingen van (188) corresponderen dus met oplossingen van (189).

Voorbeeld.

We beschouwen op R de differentiaalvergelijking

$$y'(x) = \frac{y(x)}{1 + x^2}.$$

Deze vergelijking is niet-autonoom. Het richtingsveld van de vergelijking bestaat uit de lijnen $L_{x,y} \subset \mathrm{R}^2$, $((x, y) \in \mathrm{R}^2)$, gegeven door: $L_{x,y}$ is de lijn door (x, y) met richtingscoëfficiënt $y/(1 + x^2)$. Schets dit veld.

De bijbehorende autonome vergelijking is de vectoriële vergelijking bepaald door het vectorveld $G(x, y) = (1, y/(1 + x^2))$. Schets dit vectorveld op R^2 en merk op dat $L_{x,y}$ de lijn met steunvector (x, y) en richtingsvector $G(x, y)$ is. Het bij G horende (autonome) stelsel vergelijkingen is

$$\begin{cases} \dot{x} &= 1 \\ \dot{y} &= \frac{y}{1+x^2}. \end{cases}$$

Ga na: $(x(t), y(t))$ is een oplossingskromme voor het stelsel dan en slechts dan als $x(t) = t + x(0)$ en als $x \mapsto y(x - x(0))$ een oplossing is van de oorspronkelijke vergelijking.

Met behulp van de methode van scheiding van veranderlijken (zie de volgende paragraaf) kan men de vergelijking ook daadwerkelijk oplossen. De oplossing met $y(x_0) = y_0$ wordt gegeven door

$$y(x) = y_0 e^{-\arctan x_0} e^{\arctan x}.$$

Ga na dat dit daadwerkelijk een oplossing definieert.

Voor ieder punt (x_0, y_0) heeft het stelsel precies één oplossing $(x(t), y(t))$ die voldoet aan de beginconditie $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$, namelijk

$$(x(t), y(t)) = (t + x_0, y_0 e^{-\arctan x_0} e^{\arctan(t+x_0)}).$$

13 Elementaire oplossingsmethoden

13.1 Scheiding van veranderlijken

We beschouwen de eerste orde vergelijking

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y), \tag{190}$$

met $f : [a,b] \to \mathrm{R}$ en $g : [c,d] \to \mathrm{R}$. Dit is een vergelijking van type (188), met $n = 1$ en $F(x,y) = f(x)g(y)$. We noemen een dergelijke vergelijking van het type van gescheiden veranderlijken. Voor oplossingen y met $g(y(x)) \neq 0$ geldt dat

$$\frac{1}{g(y)} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x). \tag{191}$$

In het vervolg veronderstellen we dat f en g continu zijn, en dat g op $[c,d]$ eindig veel nulpunten $\eta_1, \ldots, \eta_m$ heeft.

Men gaat eenvoudig na dat de constante funkties $y_j(x) \equiv \eta_j$ oplossingen van (190) zijn.

Veronderstel nu dat y een op een interval $I \subset [a,b]$ gedefinieerde oplossing van (190) is met $g(y(x)) \neq 0$ voor alle $x \in I$. Dan geldt (191) voor alle $x \in I$. Zij nu $x_0 \in I$ en schrijf $y_0 = y(x_0)$. Integreren we de vergelijking (191) van x_0 tot x, dan zien we dat

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{dt}{g(t)} = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt, \tag{192}$$

voor $x \in I$. Zij J het maximale open interval dat y_0 bevat, doch geen der nulpunten $\eta_1, \ldots \eta_m$. Dan wordt door

$$\Phi(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{dt}{g(t)} \qquad (y \in J)$$

een differentieerbare funktie op J gedefinieerd. Iedere op het interval I nergens verdwijnende oplossing y van (190) met $y(x_0) = y_0$ voldoet nu aan de impliciete vergelijking

$$\Phi(y(x)) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \qquad (x \in I).$$

Voldoet omgekeerd een differentieerbare funktie y aan de bovenstaande vergelijking, dan blijkt door differentiatie naar x dat y een oplossing van (190) is.

Voorbeeld.

Een vrij opgehangen, homogeen en volkomen buigzaam koord hangt volgens de zgn. kettinglijn. Stellen we deze kettinglijn voor dmv. van de grafiek van een reëelwaardige funktie y van een reële veranderlijke x, dan wordt hij beschreven door de differentiaalvergelijking

$$y'' = \lambda\sqrt{1 + (y')^2}, \tag{193}$$

met $\lambda > 0$ een constante. Schrijven we $z(x) = y'(x)$ dan volgt:

$$z' = \lambda\sqrt{1+z^2}.$$

Door scheiding van veranderlijken en integratie verkrijgen we de impliciete vergelijking:

$$\log(z + \sqrt{1+z^2}) = \lambda x + a.$$

Hierin is a een integratieconstante: het verband met de grenzen x_0 en z_0 vinden we door $x = x_0$ in te vullen. De verkregen vergelijking kunnen we oplossen naar z :

$$z(x) = \sinh(\lambda x + a).$$

Hieruit volgt weer dat

$$y(x) = \frac{1}{\lambda}\cosh(\lambda x + a) + b$$

met $b \in \mathrm{R}$ een integratieconstante. Indien we de ophangpunten (x_0, y_0) en (x_1, y_1) van de kettinglijn voorschrijven, dan kunnen we a en b oplossen uit het stelsel van vergelijkingen dat ontstaat door achtereenvolgens $x = x_0$ en $x = x_1$ te substitueren.

13.2 Variatie van de constante

Gegeven is de lineaire vergelijking

$$y' = f(x)y + g(x) \tag{194}$$

met f en g continue funkties $[a, b] \to \mathrm{R}$. We beschouwen eerst het homogene probleem dat ontstaat door $g \equiv 0$ te nemen:

$$z' = f(x)z. \tag{195}$$

Passen we hierop de in Paragraaf 13.1 behandelde methode van scheiding van veranderlijken toe, dan vinden we als oplossingen:

$$z(x) = Ce^{F(x)} \qquad (C \in \mathrm{R}). \tag{196}$$

Hierin is F een primitieve van f, dus bv.

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt,$$

met $x_0 \in [a, b]$. Als oplossing van de oorspronkelijke vergelijking (194) proberen we nu een funktie van de vorm (196) met C een funktie ipv. een constante:

$$y(x) = C(x)e^{F(x)}. \tag{197}$$

Invullen van deze funktie in (194) levert

$$C'(x)e^{F(x)} + C(x)e^{F(x)}f(x) = f(x)C(x)e^{F(x)} + g(x)$$

dus

$$C'(x) = e^{-F(x)}g(x)$$

en we concluderen dat

$$C(x) = \int_{x_0}^{x} e^{-F(t)}\, g(t)\, dt + A.$$

met A een reële constante. Door invullen in (194) blijkt dat voor iedere $A \in \mathrm{R}$ door

$$y(x) = Ae^{F(x)} + e^{F(x)} \int_{x_0}^{x} e^{-F(t)}\, g(t)\, dt \tag{198}$$

een oplossing van (194) gegeven wordt. In een latere paragraaf komen we nog uitgebreid terug op deze methode van variatie van de constante in de algemenere context van hogere orde lineaire vergelijkingen, of, equivalent daarmee, van stelsels lineaire eerste orde vergelijkingen. We zullen dan zien dat door (198) alle oplossingen van (194) gegeven worden.

Voorbeeld.

Beschouw de vergelijking $y' = -y + x^2$. Het bijbehorende homogene probleem is $z' = -z$, de oplossing daarvan: $z = Ce^{-x}$. Vullen we $y(x) = C(x)e^{-x}$ in in de oorspronkelijke vergelijking, dan vinden we

$$C'(x) = x^2 e^x.$$

Met partiële integratie naar x vinden we vervolgens:

$$C(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x + A,$$

met $A \in \mathrm{R}$ een constante. De oorspronkelijke vergelijking bezit dus oplossingen van de vorm

$$y(x) = Ae^{-x} + x^2 - 2x + 2$$

met $A \in \mathrm{R}$ een willekeurige constante.

13.3 Exacte vergelijkingen; integrerende factor

We beschouwen de impliciete differentiaalvergelijking

$$h(x, y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + g(x, y) = 0 \tag{199}$$

met g, h continue funkties op een gegeven open deel D van R^2. Deling door $h(x, y)$ levert problemen op als h op D nulpunten bezit: in dat geval kan de bovenstaande vergelijking op D niet expliciet gemaakt worden.

De vergelijking (199) heet *exact* als er een continu differentieerbare funktie $F : D \to \mathrm{R}$ bestaat zo dat

$$\mathrm{grad}\, F = (F_x, F_y) = (g, h) \text{ op } D.$$

Een funktie met de bovenstaande eigenschap heet *stamfunktie*. Het nut ervan blijkt uit het volgende. Zij y een differentieerbare funktie $I \to \mathrm{R}$ met $(x, y(x)) \in D$ voor alle $x \in I$ (hierin is $I \subset \mathrm{R}$ een interval). De funktie y is oplossing van (199) precies dan als

$$F(x, y(x)) = \text{constant}.$$

Dit blijkt door differentiatie van de bovenstaande vergelijking naar x en toepassing van de kettingregel.

Veronderstel nu dat g en h beide continu differentieerbaar zijn. Dan is een stamfunktie F tweemaal continu differentieerbaar, zodat partiële afgeleiden verwisseld mogen worden: $F_{xy} = F_{yx}$. Hieruit volgt dat

$$g_y = h_x \tag{200}$$

een noodzakelijke voorwaarde voor exactheid van de vergelijking (199) is. Zonder bewijs vermelden we dat voorwaarde (200) ook voldoende is als gegeven is dat D een enkelvoudig samenhangende verzameling is, zie de onderstaande definitie.

Definitie 13.1 Een gebied (samenhangende open verzameling) $D \subset \mathrm{R}^2$ heet enkelvoudig samenhangend als ieder gesloten continu pad in D continu samentrekbaar is tot een punt in D zonder dat D daarbij verlaten wordt.

Intuïtief betekent enkelvoudige samenhang dat D geen gaten heeft.

Voorbeelden.

(1) De verzamelingen C, $\{z \in \mathrm{C};\ \mathrm{Re}\, z > 0\}$, $\{z \in \mathrm{C}; |z| < R\}$, en $\mathrm{C} \setminus]-\infty, 0]$ zijn enkelvoudig samenhangend.

De verzamelingen $\{z \in \mathrm{C};\ |Z| > R\}$, $\mathrm{C} \setminus \{0\}$, en $\{z \in \mathrm{C};\ \rho < |z| < R\}$ zijn wel samenhangend, maar niet enkelvoudig samenhangend.

(2) De noodzaak van een conditie op D blijkt als we $D = \mathrm{R}^2 \setminus \{0\}$ beschouwen. Zij L de negatieve x-as in D. Op $D \setminus L$ beschouwen we de funktie $S(x, y) = \mathrm{Im}\, \log(x + iy)$ waarbij de hoofdwaarde van de logarithme genomen wordt. Door gebruik te maken van de Cauchy-Riemann vergelijkingen zien we dat

$$S_x = -\frac{\partial}{\partial y} \log \sqrt{x^2 + y^2} = -\frac{x}{x^2 + y^2}$$

en

$$S_y = \frac{\partial}{\partial x} \log \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

De funkties $g(x, y) = S_x$ en $h(x, y) = S_y$ zijn uitbreidbaar tot continu differentieerbare funkties op $D = \mathrm{R}^2 \setminus \{0\}$. Op D vervullen g en h de voorwaarden (200). De funktie S is een stamfunktie van het bijbehorende probleem (199) op $D \setminus L$. Iedere stamfunktie F verschilt een constante van S op $D \setminus L$ (waarom?) en kan dus niet continu differentieerbaar zijn op de gehele verameling D. Merk op dat $D \setminus L$ enkelvoudig samenhangend is, terwijl D dat niet is.

Is gegeven dat g en h continu differentieerbaar zijn op het enkelvoudig samenhangende gebied D, terwijl niet voldaan is aan (200) dan kan men de vergelijking (199) soms toch exact maken door te vermenigvuldigen met een op D continu differentieerbare funktie $M(x,y)$. Zo'n funktie M heet dan *integegererende factor* (of multiplicator van Euler). Op grond van het hierboven behandelde is een continu differentieerbare funktie $M : D \to \mathrm{R}$ een integrerende factor indien:

$$(Mh)_x = (Mg)_y, \tag{201}$$

ofwel

$$hM_x - gM_y + (h_x - g_y)M = 0. \tag{202}$$

De zo verkregen partiële differentiaalvergelijking is in het algemeen moeilijker oplosbaar dan (199). In de praktijk werkt de methode soms echter met een funktie M die uitsluitend van x of van y afhangt. Veronderstel bijvoorbeeld dat $M(x,y) = M(x)$ alleen van x afhangt. Dan volgt uit (202) dat

$$\frac{M_x}{M} = \frac{g_y - h_x}{h}. \tag{203}$$

De vergelijking (201) is dus alleen oplosbaar met $M = M(x)$ als het tweede lid van (203) alleen van x afhangt. Is dit het geval, dan kan M direkt gevonden worden door integratie. Uiteraard moeten we ons hierbij beperken tot de verzameling van punten waarbij $h(x,y) \neq 0$.

Voorbeeld.

We beschouwen de vergelijking

$$(3y^2 + x)y' + (2x^2 + 2xy^2 + 1)y = 0. \tag{204}$$

Stellen we $M = M(x)$ dan wordt de vergelijking voor de multiplicator

$$\frac{M_x}{M} = 2x.$$

Integratie levert de multiplicator

$$M(x) = e^{x^2}.$$

De stamfunktie F van de na vermenigvuldiging met M verkregen exacte vergelijking wordt dus bepaald door de vergelijkingen:

$$F_x = e^{x^2}(2x^2 + 2xy^2 + 1)\,y \qquad F_y = e^{x^2}(3y^2 + x).$$

Uit de tweede vergelijking volgt

$$F(x,y) = e^{x^2}(y^3 + xy) + l(x).$$

De funktie l moet zo bepaald worden dat ook de eerste vergelijking geldt: we vinden dat $l \equiv 0$ voldoet. We concluderen tenslotte dat oplossingen $y(x)$ van (204) impliciet bepaald worden door de vergelijking

$$y(x)\, e^{x^2}(x + y(x)^2) = F(x, y(x)) = C.$$

In het bovenstaande hebben we ons geen zorgen gemaakt over het gebied waar de berekeningen geldig zijn. Ga na dat er geen problemen zijn wanneer men zich beperkt tot een der twee samenhangende vlakdelen $D_{12} : \pm(3y^2 + x) > 0$.

14 Beginwaardeproblemen

In dit hoofdstuk beschouwen we nog eens de eerste orde vergelijking

$$y'(x) = F(x, y(x)), \tag{205}$$

met F een funktie $D = I \times \Omega \to \mathrm{R}^n$ waarin $I \subset \mathrm{R}$ een interval (niet noodzakelijkerwijs open) en $\Omega \subset \mathrm{R}^n$ een deelverzameling is. Zij $x_0 \in I$ een gegeven punt. In het algemeen heeft de vergelijking (205) vele oplossingen y die gedefinieerd zijn in een omgeving van het punt x_0. Anders wordt het wanneer we ons beperken tot die oplossingen y die voldoen aan

$$y(x_0) = y_0, \tag{206}$$

met $y_0 \in \Omega$ een tevoren gegeven punt. De vergelijking (205) met daarbij de *beginvoorwaarde* (206) noemen we een *beginwaardeprobleem.*

Voorbeeld.

Als voorbeeld beschouwen we de vergelijking $y' = y$ op R. Hierbij is $I = \mathrm{R}$, $\Omega = \mathrm{R}$. Zij $x_0 = 0$, $y_0 \in \mathrm{R}$. De (reëelwaardige) oplossingen van de vergelijking (205) zijn

$$y(x) = A\, e^x$$

met $A \in \mathrm{R}$. Eisen we dat de oplossing voldoet aan de beginconditie $y(0) = y_0$, dan moet $A = y_0$ zijn. Er is dus precies één oplossing van het beginwaardeprobleem.

In dit hoofdstuk zullen we bekijken wat voor algemeens er te zeggen is over het beginwaardeprobleem (205,206). Allereerst vermelden we zonder bewijs een stelling die het bestaan van oplossingen garandeert.

Stelling 14.1 (Stelling van Peano). *Veronderstel dat Ω open is en dat de funktie F continu is op $I \times \Omega$. Dan bezit het beginwaardeprobleem (205,206) een in de buurt van x_0 gedefinieerde oplossing.*

Fysische systemen die zich vanuit een begintoestand in de tijd ontwikkelen worden dikwijls beschreven door een beginwaardeprobleem van de vorm (205,206): x heeft dan de interpretatie van tijdsvariable. De vraag doet zich nu voor of het systeem deterministisch is, maw. of het beginwaardeprobleem een unieke oplossing heeft. Dit hoeft niet altijd het geval te zijn wanneer we slechts eisen dat F continu is.

Voorbeeld.

We beschouwen het probleem

$$y' = 2\sqrt{|y|}, \qquad y(0) = 0,$$

voor $y : I = [0, 1] \to \mathrm{R}$. Hierin is $F(x, y) = 2\sqrt{|y|}$ een continue funktie op $I \times \mathrm{R}$. Er zijn twee oplossingen, namelijk $y(x) \equiv 0$ en $y(x) = x^2$.

In het vervolg zullen we steeds veronderstellen dat de funktie $F : I \times \Omega \to \mathrm{R}^n$ continu is. Om eenduidigheid van het beginwaardeprobleem te kunnen garanderen voeren we het begrip Lipschitz continuiteit in.

Definitie 14.2 De funktie $F : I \times \Omega \to \mathrm{R}^n$ heet op $I \times \Omega$ Lipschitz continu naar de tweede (multi-)variabele als er een constante $L > 0$ bestaat (de zgn. Lipschitz constante) zo dat

$$\|F(x, y_1) - F(x, y_2)\| \leq L \|y_1 - y_2\|$$

voor alle $x \in I,\ y_1, y_2 \in \Omega$.

Stelling 14.3 (De existentie- en eenduidigheidsstelling). *Zij $I = [x_0, x_0 + r]$ en zij Ω de gesloten bol in R^n met middelpunt y_0 en straal R $(r, R > 0)$. Veronderstel dat de continue funktie $F : I \times \Omega \to \mathrm{R}^n$ Lipschitz continu is in zijn tweede variabele, met Lipschitz constante $L > 0$. Veronderstel verder dat $|F|$ op $I \times \Omega$ begrensd is door een constante $M > 0$.*

Laat $\delta > 0$ voldoende klein zijn. Dan heeft het beginwaardeprobleem (205, 206) precies één oplossing $y : J = [x_0, x_0 + \delta] \to \Omega$.

Bewijs: In het vervolg zal blijken dat een δ met

$$0 < \delta < \min(r, L^{-1}, M^{-1}R)$$

voldoende klein is. Allereerst merken we op dat het beginwaardeprobleem equivalent is met de integraalvergelijking

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, y(t))\, dt. \tag{207}$$

Iedere oplossing van het beginwaardeprobleem voldoet aan de bovenstaande integraalvergelijking. Omgekeerd geldt: is $y : J \to \Omega$ een continue funktie die aan (207) voldoet, dan is y automatisch differentieerbaar, en oplossing van het beginwaardeprobleem.

Gemotiveerd door het bovenstaande beschouwen we nu de verzameling $\mathcal{F}$ van alle continue funkties $\varphi : J \to \Omega$. Voor een funktie $\varphi \in \mathcal{F}$ definiëren we een nieuwe funktie $T\varphi : J \to \mathrm{R}^n$ door

$$T\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, \varphi(t))\, dt. \tag{208}$$

Merk op dat $T\varphi$ weer een continue funktie is. Verder geldt dat de waarden van $T\varphi$ weer in Ω liggen. Immers voor $x \in J$ hebben we

$$\begin{aligned} |T\varphi(x) - y_0| &\leq \int_{x_0}^{x} |F(t, \varphi(t))|\, dt \\ &\leq \delta M < R. \end{aligned}$$

We zien dus dat $T\varphi$ weer in $\mathcal{F}$ ligt. Met andere woorden, T is een operator van $\mathcal{F}$ naar zichzelf. We kunnen de stelling nu als volgt herformuleren:

Er bestaat precies één $\varphi \in \mathcal{F}$ zo dat $T\varphi = \varphi$.

Het bestaan van een oplossing van dit probleem gaan we nu als volgt bewijzen. We kiezen een startfunktie $\varphi_0 \in \mathcal{F}$. (De constante funktie $x \mapsto y_0$ is een voorbeeld van zo'n keuze.) Vervolgens definiëren we door iteratie een rij van funkties $\varphi_n \in \mathcal{F}$ als volgt:

$$\varphi_{n+1} = T\varphi_n \qquad (n \geq 0). \tag{209}$$

We zullen laten zien dat de rij φ_n een uniforme limiet $\varphi \in \mathcal{F}$ heeft, en dat men uit (209) door limietovergang krijgt: $T\varphi = \varphi$, met andere woorden: het probleem heeft tenminste één oplossing. Dat er niet meer dan één oplossing is zien we als volgt in. Zij $\|\cdot\|_J$ de supnorm op J. Dus voor $\varphi \in \mathcal{F}$ is

$$\|\varphi\|_J = \sup_{x \in J} \|\varphi(x)\|.$$

In het onderstaande zullen we laten zien dat er een constante $0 < C < 1$ bestaat zo dat voor elk tweetal $\varphi, \psi \in \mathcal{F}$ geldt

$$\|T\varphi - T\psi\|_J \leq C\,\|\varphi - \psi\|_J. \tag{210}$$

(een T met deze eigenschap heet ook wel contractie). In het bijzonder geldt nu voor een tweetal oplossingen φ en ψ dat $\|\varphi - \psi\|_J \leq C\|\varphi - \psi\|_J$. Hieraan kan alleen voldaan zijn als $\varphi = \psi$.

Voor de liefhebber laten we nu zien hoe de verschillende beweringen verantwoord kunnen worden. Eerst merken we op dat de schatting (210) volgt uit

$$\begin{aligned}
|T\varphi(x) - T\psi(x)| &\leq \int_{x_0}^{x} \|F(t,\varphi(t)) - F(t,\psi(t))\|\,dt \\
&\leq \int_{x_0}^{x} L\|\varphi(t) - \psi(t)\|\,dt \\
&\leq \delta L\|\varphi - \psi\|_J,
\end{aligned}$$

dus we kunnen $C = \delta L$ nemen.

Vervolgens tonen we aan dat de rij φ_n uniform convergent is. Schrijven we $\psi_n = \varphi_n - \varphi_{n-1}$ $(n \geq 1)$ dan is

$$\varphi_n = \varphi_0 + \sum_{k=1}^{n} \psi_k.$$

we moeten dus laten zien dat de reeks

$$\sum_{k \geq 1} \psi_k \tag{211}$$

uniform convergeert op J. Hiertoe merken we op dat $\psi_{n+1} = T\varphi_n - T\varphi_{n-1}$, dus vanwege de contractie eigenschap: $\|\psi_{n+1}\|_J \leq C\|\psi_n\|_J$. Met inductie volgt hieruit dat $\|\psi_{n+1}\|_J \leq C^n\,\|\psi_1\|_J$ voor alle $n \geq 0$. Wegens Stelling 4.10 volgt hieruit dat de reeks (211) en dus de rij φ_n uniform convergeert op J. De uniforme limiet φ van de rij φ_n is een continue funktie op J. Zijn waarden liggen weer in Ω (limietovergang!). Dus $\varphi \in \mathcal{F}$.

Tenslotte merken we nog op dat de limietovergang in (208) geoorloofd is. Hiertoe moeten we laten zien dat

$$T\varphi_n \to T\varphi$$

uniform. Maar dit volgt weer uit de contractie eigenschap (210). □

Bovenstaande stelling laat zien dat het belangrijk is om Lipschitz continuiteit te kunnen herkennen. Het volgende lemma levert een vaak gemakkelijk te verifiëren criterium. Een verzameling $V \subset \mathrm{R}^n$ heet convex als voor ieder tweetal punten $u, v \in V$ geldt dat ook het verbindingslijstuk van u naar v in V ligt, maw: $u + t(v-u) \in V$ voor alle $t \in [0,1]$.

Lemma 14.4 *Zij $\Omega \subset \mathrm{R}^n$ een convexe open verzameling en veronderstel dat $F : I \times \Omega \to \mathrm{R}^n, (x,y) \mapsto F(x,y)$ continu is en partieel differentieerbaar in de variabelen $y_1, \ldots, y_n$. Als de partiële afgeleiden $\partial F/\partial y_j$ begrensd zijn op $I \times \Omega$, dan is F op $I \times \Omega$ Lipschitz continu in de variabele y.*

Bewijs: Zij $u, v \in \Omega$, en schrijf $u(t) = u + t(v-u)$. Dan $u(0) = u,\ u(1) = v$ en $u(t) \in \Omega$ voor alle $t \in [0,1]$. Zij $x \in I$. Uit de kettingregel volgt dat de funktie $f(t) = F(x, u(t))$ differentieerbaar is, terwijl:

$$\frac{df}{dt}(t) = \mathrm{grad}_y F(x, f(t)) \cdot (v-u).$$

Er is een constante $M > 0$ zo dat $\|\mathrm{grad}_y F\| \leq M$ op $I \times \Omega$. We concluderen dat $\|f'(t)\| \leq M\|v-u\|$. Derhalve geldt:

$$\begin{aligned} \|F(x,v) - F(x,u)\| = \|f(1) - f(0)\| &= \|\int_0^t f'(t)\, dt\| \\ &\leq M\|v-u\|. \end{aligned}$$

□

Voorbeeld.

We beschouwen weer het beginwaardeprobleem $y' = y,\ y(0) = y_0$ met $y_0 \in \mathrm{R}$. In dit geval is $F(x,y) = y$, dus de Lipschitz constante is $L = 1$. We fixeren $r > 1$ en $R > 0$ als in Stelling 14.3 en schrijven $I = [0,r]$ en $\Omega = [y_0 - R, y_0 + R]$. De maximale waarde van F op Ω is $M = R$. Derhalve is $\min(r, L^{-1}, M^{-1}R) = 1$. Volgens de existentie- en eenduidigheidsstelling is het beginwaardeprobleem dus eenduidig oplosbaar op het interval $[0,\delta]$ voor iedere $0 < \delta < 1$. (Dat wisten we natuurlijk al, we weten zelfs dat het probleem eenduidig oplosbaar is op $[0,\infty[$.) De oplossing kunnen we volgens het bewijs van Stelling 14.3 benaderen door middel van Picard iteratie. Is $\varphi_0 : [0,\delta] \to \Omega$ een continue funktie dan is de rij φ_n recursief gedefinieerd door

$$\varphi_n(x) = y_0 + \int_0^x \varphi_{n-1}(t)\, dt \qquad (n \geq 1).$$

Nemen we $\varphi_0 \equiv y_0$, dan blijkt met inductie dat:

$$\varphi_n(x) = y_0 \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

Hieruit volgt dus opnieuw dat de reeks $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ uniform convergent is op het interval $[0, 1]$ met als som de oplossing $x \mapsto e^x$ van het beschouwde beginwaardeprobleem met $y_0 = 1$.

De existentie- en eenduidigheidsstelling doet in eerste instantie alleen een lokale uitspraak over de oplosbaarheid van het beginwaardeprobleem. In het vervolg beschouwen we een *open* interval $J \subset \mathrm{R}$, een *open* deelverzameling $U \in \mathrm{R}^n$ en een continue funktie $F : J \times U \to \mathrm{R}^n$ die overal *lokaal* Lipschitzcontinu is. Daarmee bedoelen we dat er voor elk tweetal punten $x_0 \in J$ en $y_0 \in U$ een omgeving I van x_0 in J en een omgeving Ω van y_0 in U bestaan, zo dat F op $I \times \Omega$ Lipschitz continu in y is. Hieraan is bijvoorbeeld voldaan als $\mathrm{grad}_y F$ continu is (gebruik Lemma 14.4).

Zij nu $x_0 \in J$ en $y_0 \in U$. Kies $r > 0$, $R > 0$ zo dat $I = [x_0 - r, x_0 + r]$ in J en $\Omega = \{y \in \mathrm{R}^n; \|y - y_0\| \leq R\}$ in U ligt, en zo dat F Lipschitz continu is op $I \times \Omega$. Dan is F continu, dus begrensd op $I \times \Omega$. Voor voldoend kleine $\delta > 0$ heeft het beginwaardeprobleem (205,206) dus een unieke oplossing $y : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to \Omega$.

Lokale Lipschitz continuiteit van F garandeert dus dat het beginwaardeprobleem lokaal een unieke oplossing heeft.

Gevolg 14.5 *Zij ϕ_1, ϕ_2 een tweetal oplossingen van het beginwaardeprobleem, gedefinieerd op een gesloten interval $I_0 = [a, b] \subset J$ dat x_0 bevat. Dan is $\varphi_1 = \varphi_2$ op het interval I_0.*

Bewijs: We beschouwen het geval dat $a = x_0$. Het geval $x_0 = b$ kan op dezelfde wijze bewezen worden en door combinatie volgt dan het algemene geval. We weten al dat $\varphi_1 = \varphi_2$ in een voldoend kleine omgeving van x_0. Maar stel dat dit niet waar is op het gehele interval $[x_0, b]$. Het intuïtieve idee is nu dat er een kleinste punt $c \in [x_0, b[$ moet zijn waarin φ_1 en φ_2 van elkaar gaan verschillen. Dit betekent echter wel dat

$$\varphi_1(c) = \lim_{x \uparrow c} \varphi_1(x) = \lim_{x \uparrow c} \varphi_2(x) = \varphi_2(c).$$

vanwege de continuiteit van φ_1 en φ_2. Dus φ_1 en φ_2 hebben eenzelfde waarde y_1 in c. De funkties φ_1 en φ_2 zijn dus ook oplosingen van het beginwaardeprobleem (205) met beginvoorwaarde $y(c) = y_1$. Maar wegens de lokale eenduidigheid van oplossingen moeten φ_1 en φ_2 dan in een volle omgeving van c aan elkaar gelijk zijn. Tegenspraak.

Voor de liefhebber maken we het bewijs nu af. Het probleem is vooral om een goede definitie voor het punt c te geven. Dit gaat als volgt. We beschouwen de verzameling S van punten $s \in [x_0, b]$ met de eigenschap dat $\varphi_1 = \varphi_2$ op het interval $[x_0, s]$. De verzameling S is niet leeg en naar boven begrensd, dus heeft een kleinste bovengrens $c \in [x_0, b]$. In ieder geval geldt nu dat $[x_0, c[\subset S$, en met de bovenstaande limietredenering concluderen we dat $c \in S$, dus $S = [x_0, c]$. Nu kunnen we het bewijs als in het bovenstaande afmaken. □

Figuur 23:

Het fraaie gevolg van de bovenstaande stelling is nu dat we de lokale oplossing van het beginwaardeprobleem eenduidig kunnen voortzetten tot een zo groot mogelijk interval $I \subset J$ dat x_0 bevat. Dit gaat als volgt. Zij $I \subset J$ een interval dat x_0 bevat. We noemen I een existentie interval voor het probleem (205,206) als het probleem een op I gedefinieerde oplossing toelaat (deze oplossing is dan meteen uniek). De vereniging $I_{\max}$ van al dergelijke intervallen is weer een interval in J dat x_0 bevat. Bovendien laat het een oplossing toe. We zullen $I_{\max}$ het maximale existentie interval noemen.

In de plaatjes in Figuur 23 is weergegeven door wat voor oorzaken het maximale existentie interval $I_{\max}$ kleiner kan zijn dan het interval J.

Het eerste plaatje spreekt voor zich: het probleem treedt op omdat $y(x)$ de rand van U nadert als x de bovengrens van $I_{\max}$ nadert.

In het tweede plaatje is $U = \mathrm{R}^n$ maar de oplossing $y(x)$ gaat naar oneindig als x de bovengrens van $I_{\max}$ nadert. We lichten deze laatste mogelijkheid nog eens toe aan de hand van een voorbeeld.

Voorbeeld.

We beschouwen het beginwaardeprobleem

$$y' = 1 + y^2, \qquad y(x_0) = 0.$$

Als definitie gebied voor $F(x, y) = 1 + y^2$ nemen we $J \times U = \mathrm{R} \times \mathrm{R}$. Door scheiding van variabelen zien we dat $d/dx(\arctan y) = 1$, dus $\arctan y = x + A$ ($A \in \mathrm{R}$). Door invullen van de beginvoorwaarde zien we dat $y(x) = \tan(x - x_0)$. Hier geldt dus dat

$$I_{\max} = \left] \, x_0 - \frac{\pi}{2}, x_0 + \frac{\pi}{2} \, \right[\, .$$

De oplossing heeft verticale asymptoten $x = x_0 \pm \frac{\pi}{2}$.

15 Het lineaire beginwaardeprobleem

15.1 Variabele coëfficiënten

In dit hoofdstuk beschouwen we het lineaire beginwaardeprobleem

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = A(x)y + b(x), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{212}$$

op een interval $I \subset \mathrm{R}$ dat x_0 bevat. Hierbij veronderstellen we dat $A(x)$ een complexe $n \times n$-matrix is die continu afhangt van $x \in I$. Verder veronderstellen we dat b een continue funktie $I \to \mathrm{C}^n$ is. Hoewel hier sprake is van een complexe matrix A en een complexwaardige funktie b valt dit probleem toch onder de in Hoofdstuk 14 behandelde theorie. Dit is een gevolg van het feit dat $\mathrm{C} = \mathrm{R}^2$ (met de extra vermenigvuldigingsstructuur). Aldus kan het probleem opgevat worden als probleem voor R^{2n}-waardige funkties op I.

Schrijven we $F(x, y) = A(x)y + b(x)$, dan zien we dat

$$\|F(x, y) - F(x, z)\| = \|A(x)(y - z)\| \leq \|A(x)\|\|y - z\|.$$

Omdat A continu is, dus lokaal begrensd, volgt hieruit dat de funktie F Lipschitz continu naar de variable y is op $I_0 \times \mathrm{C}^n$, voor elk gesloten en begrensd deelinterval $I_0 \subset I$. De Lipschitz constante is $L = \max_{x \in I_0} \|A(x)\|$. We zien dus dat het lineaire beginwaardeprobleem lokaal eenduidig oplossingen toelaat. De volgende stelling, die we hier niet zullen bewijzen, zegt dat voor het lineaire beginwaardeprobleem oplossingen altijd voortzetbaar zijn tot het gehele definitiegebied van A en b.

Stelling 15.1 *Het beginwaardeprobleem (212) laat een op het gehele interval I gedefinieerde oplossing toe.*

Het bovenstaande resultaat maakt het ons mogelijk iets te zeggen over de collectie $\mathcal{S}_I$ van alle op I gedefinieerde oplossingen van de inhomogene vergelijking

$$y' = A(x)y + b(x)$$

(we leggen dus even geen beginvoorwaarde op). Veronderstel dat er een oplossing $\varphi_0 \in \mathcal{S}_I$ van de inhomogene vergelijking gegeven is. Als $\varphi \in \mathcal{S}_I$ dan geldt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\varphi - \varphi_0)(x) &= (A(x)\varphi(x) + b(x)) - (A(x)\varphi_0(x) + b(x)) \\ &= A(x)(\varphi(x) - \varphi_0(x)) \end{aligned}$$

dus $\varphi - \varphi_0$ is een oplossing van de homogene vergelijking

$$y' = A(x)y. \tag{213}$$

Noteren we de verzameling van alle op I gedefinieerde oplossingen van (213) met $\mathcal{S}$, dan zien we dus dat $\varphi - \varphi_0 \in \mathcal{S}$ voor alle $\varphi \in \mathcal{S}_I$. Is omgekeerd $\psi \in \mathcal{S}$, dan gaat men gemakkelijk na dat $\varphi_0 + \psi \in \mathcal{S}_I$. We concluderen:

$$\mathcal{S}_I = \varphi_0 + \mathcal{S}. \tag{214}$$

In woorden: is er één oplossing φ_0 van de inhomogene vergelijking gegeven, dan worden alle oplossingen van de inhomogene vergelijking gegeven door $y = \varphi_0 + \psi$, met ψ een oplossing van de homogene vergelijking. Op grond hiervan onderzoeken we nu eerst de oplossingsruimte S van de homogene vergelijking.

Stelling 15.2 *De verzameling S is een (complexe) vectorruimte van dimensie n.*

Bewijs: Men gaat gemakkelijk na: als $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}$, dan $\varphi_1 + \varphi_2 \in \mathcal{S}$, en $\lambda\varphi_1 \in \mathcal{S}$, voor $\lambda \in \mathrm{C}$. Hieruit volgt dat $\mathcal{S}$ een lineaire ruimte is.

Uit de nu volgende redenering blijkt hoe nuttig het is om $\mathcal{S}$ als lineaire ruimte te zien. We leggen een punt $x_0 \in I$ vast, en beschouwen de afbeelding $\epsilon : \mathcal{S} \to \mathrm{C}^n$ gedefinieerd door $\epsilon(\varphi) = \varphi(x_0)$ (de zgn. evaluatie afbeelding). De afbeelding ϵ voldoet aan $\epsilon(\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2) = \lambda\epsilon(\varphi_1) + \mu\epsilon(\varphi_2)$, dus is *lineair.*

De afbeelding ϵ is *injectief.* Immers stel dat $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}$, en $\epsilon(\varphi_1) = \epsilon(\varphi_2)$. Dan geldt dat φ_1 en φ_2 in x_0 dezelfde waarde hebben, zeg y_0, dus beide zijn oplossingen van (213) met beginvoorwaarde $y(x_0) = y_0$. Hieruit volgt dat $\varphi_1 = \varphi_2$ (Stelling 14.5).

De afbeelding ϵ is *surjectief.* Want zij $y_0 \in \mathrm{C}^n$. Dan heeft het homogene beginwaardeprobleem met beginvoorwaarde $y(x_0) = y_0$ een oplossing φ. Hiervoor geldt dat $\epsilon(\varphi) = y_0$.

De afbeelding ϵ is derhalve een bijectieve lineaire afbeelding $S \to \mathrm{C}^n$. De inverse voert iedere basis van C^n over in een basis van $\mathcal{S}$. Een basis van $\mathcal{S}$ heeft dus n elementen. □

Op grond van de bovenstaande stelling is de volgende definitie zinvol.

Definitie 15.3 Onder een fundamentele matrix voor de vergelijking (213) verstaan we een $n \times n$ matrix $Y(x) = \left(y_i^j(x)\right)$ (van funkties op I) waarvan de kolommen $y^1, \ldots, y^n$ een *basis* van $\mathcal{S}$, de oplossingsruimte van (213), vormen.

Op grond van Stelling 15.2 heeft de vergelijking (213) een fundamentele matrix. Het nut daarvan blijkt uit het volgende.

Stelling 15.4 *Zij Y een fundamentele matrix van de vergelijking (213). Dan worden de oplossingen van de homogene vergelijking (213) beschreven door*

$$y(x) = Y(x)c \tag{215}$$

met $c \in \mathrm{C}^n$ een constante vector.

Bewijs: De kolommen $y^1, \ldots, y^n$ van Y vormen een basis van $\mathcal{S}$, dus iedere oplossing van (213) kan op precies één manier geschreven worden als

$$y(x) = c_1 y^1(x) + \ldots c_n y^n(x),$$

met $c_1, \ldots, c_n \in \mathrm{C}$. Maar dit is precies (215). $\square$

Laat $y^1, \ldots, y^n$ een $n-$tal oplossingen van de homogene vergelijking (213) zijn, en zij Y de matrix waarvan de kolommen gevormd worden door deze oplossingen. Dan kan men gemakkelijk nagaan of Y een fundamentele matrix is. Daartoe dienen namelijk de oplossingen $y^1, \ldots, y^n$ lineair onafhankelijk te zijn. Op grond van het bewijs van Stelling 15.2 is dit gelijkwaardig met het feit dat $y^1(x_0), \ldots y^n(x_0)$ een basis van C^n vormen, en dit is weer gelijkwaardig met $\det Y(x_0) \neq 0$. We zien nu in:

Lemma 15.5 *Zij $Y(x)$ een $n \times n$ matrix waarvan de kolommen oplossingen van de vergelijking (213) zijn. Dan zijn de volgende uitspraken gelijkwaardig.*

(1) *Y is een fundamentele matrix;*

(2) $\det Y(x_0) \neq 0$;

(3) $\det Y(x) \neq 0$ *voor iedere $x \in I$.*

Merk op dat een fundamentele matrix voldoet aan de matrix differentiaalvergelijking

$$\frac{d}{dx} Y(x) = A(x) \circ Y(x).$$

Gevolg 15.6 *De afbeelding $Y \mapsto Y(x_0)$ definieert een bijectie van de collectie van alle fundamentele matrices van (213) op de collectie van alle inverteerbare $n \times n$ matrices.*

Is Z een gegeven fundamentele matrix, dan wordt de collectie van alle fundamentele matrices beschreven door

$$Y(x) = Z(x) \circ C, \tag{216}$$

met C een inverteerbare constante $n \times n$ matrix.

Bewijs: De eerste uitspraak volgt uit het bewijs van Stelling 15.2 gecombineerd met Lemma 15.5 (2).

Is $Z(x)$ een fundamentele matrix, dan zijn de kolommen van (216) oplossingen van (213), dus wegens Lemma 15.5 (2) is Y fundamenteel zodra C inverteerbaar is. Zijn Z en Y fundamenteel, dan is er een inverteerbare C zo dat $Y(x_0) = Z(x_0) \circ C$. Nu zijn Y en $Z(x) \circ C$ fundamenteel en gelijk in het punt x_0, en op grond van de eerste uitspraak van deze stelling geldt dus (216). $\square$

Is er eenmaal een fundamentele matrix Y van (213) gevonden, dan is het oorspronkelijke beginwaardeprobleem (212) volledig oplosbaar. We bepalen eerst de algemene oplossing van de inhomogene vergelijking. Wegens (214) is het voldoende om een speciale oplossing te bepalen. Dit gaat met behulp van een variant op variatie van de constante. De algemene oplossing van de homogene vergelijking wordt gegeven door (215). Als oplossing van de inhomogene vergelijking proberen we nu

$$y(x) = Y(x)c(x),$$

met c een *funktie* $I \to \mathbb{C}^n$. Invullen in de inhomogene vergelijking geeft

$$Y(x)c'(x) = b(x).$$

Hieruit kan c gevonden worden door integratie:

$$c(x) = C + \int_{x_0}^{x} Y(t)^{-1}b(t)\,dt \qquad (C \in \mathbb{C}^n).$$

Merk op dat er wegens Lemma 15.5 geen problemen zijn met het inverteren van Y. Als oplossing van de inhomogene vergelijking vinden we nu

$$y(x) = Y(x)\left(C + \int_{x_0}^{x} Y(t)^{-1}b(t)\,dt\right). \tag{217}$$

Invullen van de beginvoorwaarde $y(x_0) = y_0$ geeft tenslotte dat:

$$C = Y(x_0)^{-1}y_0.$$

We beëindigen dit hoofdstuk met de behandeling van het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)}(x) + \ldots a_0(x)\,y(x) = f(x); \\ \\ y(x_0) = y_0^1, \quad y'(x_0) = y_0^2, \; \ldots, \; y^{(n-1)}(x_0) = y_0^n. \end{cases}$$

Hierbij zijn $a_0, \ldots, a_{n-1}$ en f gegeven complexwaardige continue funkties op I. Voorts is $y_0^1, \ldots, y_0^n$ een gegeven n-tal complexe getallen. In Paragraaf 12.1 behandelden we reeds het herschrijven van de bovenstaande hogere orde vergelijking als vector differentiaalvergelijking. Het bovenstaande beginwaardeprobleem gaat daarbij over in een beginwaardeprobleem van de vorm (212). Voeren we $z_j = y^{(j-1)}$ als nieuwe onbekenden in, dan krijgt het probleem de vector gedaante:

$$\frac{d}{dx}z(x) = A(x)z(x) + b(x), \qquad z(x_0) = z_0, \tag{218}$$

met

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \ldots & & 0 & 1 \\ -a_0 & \ldots & & \ldots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad b(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix} \tag{219}$$

en $z_0 = (y_0^1, \dots, y_0^n)$. Uit Stelling 15.2 volgt dat de oplossingsruimte van de homogene vergelijking

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)}(x) + \dots a_0(x)\, y(x) = 0$$

n dimensionaal is. Zij nu $y_1, \dots y_n$ een n-tal oplossingen van de bovenstaande vergelijking. Als $y_1, \dots, y_n$ lineair onafhankelijk zijn, dan geldt hetzelfde voor de funkties $z^j = (y_j, y_j', \dots, y_n^{(j)})$. Derhalve is de matrix

$$Z(x) = (z^1(x), \dots, z^n(x)) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & & & \vdots \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) \end{pmatrix} \tag{220}$$

een fundamentele matrix voor de vergelijking (218). Is omgekeerd (220) een fundamentele matrix, dan zijn de kolommen lineair onafhankelijke funkties. We claimen dat $y_1, \dots, y_n$ al lineair onafhankelijke funkties moeten zijn. Want stel dat voor $\lambda_1 \dots, \lambda_n \in \mathrm{C}$ geldt: $\lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_n y_n = 0$ (op I), dan volgt door van deze uitdrukking de eerste tot en met de n de afgeleide te nemen dat $\lambda_1 z^1 + \dots \lambda_n z^n = 0$, dus $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

In het vervolg beperken we ons tot de vaak voorkomende inhomogene tweede orde vergelijking

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x). \tag{221}$$

Veronderstel dat we reeds een niet-triviale oplossing φ van de bijbehorende homogene vergelijking

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0. \tag{222}$$

kennen. Vullen we in (222) een funktie van het type $y(x) = \varphi(x)z(x)$ in, dan krijgen we de vergelijking

$$\varphi\, z'' + (2\varphi' + a_1\varphi)\, z' = 0.$$

Uit deze eerste orde vergelijking in z' kunnen we $w = z'$ impliciet vinden met behulp van scheiding van veranderlijken. Door integratie vinden we tenslotte z zodanig dat $y = \varphi z$ een tweede oplossing van (222) is.

Voorbeeld.

We beschouwen de tweede orde vergelijking

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0 \tag{223}$$

op een interval I dat de punten ± 1 niet bevat. Op dat interval kunnen we door deling door $1 - x^2$ de vergelijking in de expliciete vorm (222) brengen zodat het voorgaande toepasbaar is. Door bijvoorbeeld polynoom oplossingen te proberen vinden we $y_1(x) = \varphi(x) = x$ als oplossing. Substitutie van $y(x) = xz(x)$ in de vergelijking levert

$$z'' + \left(\frac{2}{x} - \frac{2x}{1 - x^2}\right) z' = 0.$$

We vinden
$$z'(x) = \frac{c}{x^2(1-x^2)},$$
met c een constante. Na breuksplitsing kunnen we de bovenstaande funktie primitiveren en we vinden uiteindelijk (na geschikte keuze van integratieconstanten) een tweede oplossing
$$y_2(x) = 1 - \frac{x}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|.$$
Het is niet moeilijk in te zien dat deze oplossing lineair onafhankelijk is van y_1. De algemene oplossing van de beschouwde vergelijking is dus van de vorm
$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x). \tag{224}$$
Als voorbeeld nemen we $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ en we beschouwen het beginwaardeprobleem met beginwaarden $y(0) = 2,\ y'(0) = 3$. Door substitutie van $y_1(0) = 0, y_1'(0) = 1$ en $y_2(0) = 1, y_2'(0) = 0$ in (224) vinden we voor de oplossing dat $A = 3$ en $B = 2$.

Ter illustratie herschrijven we de vergelijking (223) tenslotte nog eens als vectorvergelijking ($z_1 = y,\ z_2 = y'$):
$$z'(x) = A(x)\,z(x)$$
met
$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{1-x^2} & \frac{2x}{1-x^2} \end{pmatrix}.$$
Uit de hierboven gevonden oplossingen y_1 en y_1 van (223) vinden we op $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ de fundamentele matrix
$$Z(x) = \begin{pmatrix} y_2(x) & y_1(x) \\ y_2'(x) & y_1'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{x}{2}\log\frac{1+x}{1-x} & x \\ -\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} - \frac{x}{1-x^2} & 1 \end{pmatrix}.$$
Merk op dat $Z(0) = I$. De oplossing van het hierboven beschreven beginwaardeprobleem vinden we dus als eerste component van de vectorwaardige funktie
$$Z(x)\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

We keren terug naar de vergelijking (221). Veronderstel dat we reeds een tweetal lineair onafhankelijke oplossingen y_1, y_2 van de homogene vergelijking (222) gevonden hebben. Zij φ een oplossing van de inhomogene vergelijking. Dan is de funktie $\psi = (\varphi, \varphi')$ een oplossing van de inhomogene vergelijking (218)(waarbij $n = 2$). Dus
$$\psi(x) = Z(x)\,c(x)$$
voor een differentieerbare funktie $c = (c_1, c_2)$. Nu kunnen we (217) toepassen met $C = 0$ en Z ipv. Y. Merk op dat
$$Z(t)^{-1} = w(t)^{-1}\begin{pmatrix} y_2'(t) & -y_2(t) \\ y_1(t) & y_2'(t) \end{pmatrix}$$

met

$$w(t) = \det Z(t),$$

de zogenaamde Wronskiaan van Z. We vinden aldus de volgende oplossing van de inhomogene vergelijking:

$$\varphi(x) = -y_1(x) \int_{x_0}^{x} w(t)^{-1}\, y_2(t)\, f(t)\, dt + y_2(x) \int_{x_0}^{x} w(t)^{-1}\, y_1(t)\, f(t)\, dt.$$

De algemene oplossing van de inhomogene vergelijking is

$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x) + \varphi(x),$$

met $A, B \in \mathrm{C}$.

Berekening van de Wronskiaan. Op grond van het bovenstaande resultaat zijn we gemotiveerd om in het algemeen de Wronskiaan

$$w(x) = \det Y(x)$$

te berekenen voor een fundamentele matrix Y van de n-dimensionale lineaire vergelijking (213). Zij $M = (m_{ij})$ een $n \times n$ matrix van complexe getallen. Dan wordt het spoor $\mathrm{sp}\, M$ van M gedefinieerd door:

$$\mathrm{sp}\, M = m_{11} + \ldots + m_{nn}.$$

Lemma 15.7 *De Wronskiaan van de fundamentele matrix Y wordt gegeven door*

$$w(x) = \det Y(x_0)\, e^{\int_{x_0}^{x} \mathrm{sp} A(t)\, dt}.$$

Voordat we dit lemma bewijzen leiden we een hulpresultaat af dat op zichzelf reeds interessant is.

Lemma 15.8 *Zij $M(t)$ een $n \times n$ matrix die rond 0 op differentieerbare wijze afhangt van een reële variabele t; veronderstel voorts dat $M(0) = I$. Dan is*

$$\frac{d}{dt}_{t=0} \det M(t) = \mathrm{sp}\, M'(0).$$

Bewijs: Schrijf

$$M(t) = I + t\, M'(0) + R(t),$$

dan is

$$\lim_{t \to 0} \frac{R(t)}{t} = 0.$$

Voorts is

$$\det M(t) - 1 = t \operatorname{sp} M'(0) + \rho(t) \tag{225}$$

met $\rho(t)$ een eindige som van eindige produkten waarin telkens minstens één coëfficiënt $R_{ij}(t)$ als factor voorkomt (gebruik de definitie van determinant om dit in te zien). Hieruit volgt dat

$$\lim_{t\to 0} \frac{\rho(t)}{t} = 0.$$

Het bewijs wordt nu voltooid door (225) door t te delen en vervolgens de limiet voor $t \to 0$ te nemen. □

Bewijs van Lemma 15.7: We beschouwen een willekeurig punt $x \in I$, en definiëren de matrix

$$M(t) = Y(x+t)\,Y(x)^{-1}.$$

Deze matrix voldoet aan de voorwaarden van het vorige lemma. De afgeleide in $t = 0$ wordt gegeven door

$$M'(0) = Y'(x)Y(x)^{-1} = A(x),$$

en we concluderen dat

$$\begin{aligned} w'(x)\,w(x)^{-1} &= \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0} w(x+t)\,w(x)^{-1} \\ &= \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0} \det M(t) = \operatorname{sp} A(x). \end{aligned}$$

Dit geldt voor willekeurige $x \in I$, dus de funktie $w(x)$ voldoet op I aan de differentiaalvergelijking

$$w(x)^{-1} w'(x) = \operatorname{sp} A(x).$$

Hieruit volgt het gewenste resultaat. □

Tenslotte merken we nog op dat

$$\operatorname{sp} A(x) = -a_{n-1}(x)$$

als A van de vorm (219) is.

Voorbeeld.

We beschouwen de inhomogene harmonische oscillator

$$y'' + y = f(x), \tag{226}$$

met f een gegeven continue funktie op R. Een lineair onafhankelijk stel van oplossingen van de bijbehorende homogene vergelijking is $y_1(x) = \cos x,\ \ y_2(x) = \sin x$. Als bijbehorende fundamentele matrix vinden we

$$Z(x) = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}.$$

Hieraan zien we direkt dat $w(x) \equiv 1$. Het kan ook met behulp van het bovenstaande: $a_1 = 0$, dus

$$w(x) = \det Z(0)\, e^0 = 1.$$

Een oplossing van de inhomogene vergelijking wordt dus gegeven door

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \left[Z(x) \int_0^x Z(t)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix} \, dt \right]_1 \\ &= -\cos x \int_0^x \sin t\, f(t)\, dt + \sin x \int_0^x \cos t\, f(t)\, dt \\ &= \int_0^x f(t) \sin(x-t)\, dt. \end{aligned}$$

De algemene oplossing van de inhomogene vergelijking (226) is tenslotte:

$$y(x) = A\cos x + B\sin x + \int_0^x \sin(x-t)\, f(t)\, dt,$$

met $A, B \in$ C.

15.2 Constante coëfficiënten

In deze paragraaf beschouwen we de homogene lineaire vergelijking (213) met $A(x) \equiv A$ een constante $n \times n$ matrix met complexe coëfficiënten:

$$\frac{dy}{dx} = Ay \tag{227}$$

In dit geval is het altijd mogelijk een fundamentele matrix te bepalen. In het college Algebra CN heeft u namelijk gezien dat de funktie

$$e^{xA} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n A^n}{n!}$$

differentieerbaar is met als afgeleide

$$\frac{d}{dx} e^{xA} = A e^{xA}.$$

Hieruit volgt dat

$$Y(x) = e^{xA}$$

de fundamentele matrix van (227) is met $Y(0) = I$ (vgl. Gevolg 15.6). In de praktijk laat de matrix Y zich het best berekenen door A op Jordannormaalvorm te brengen. Zij $s^1, \ldots, s^n$ een basis van $\mathbb{C}^n$ ten aanzien waarvan A een Jordan normaalvorm heeft. Dan is de matrix S opgebouwd uit de kolomen s^j inverteerbaar en er geldt:

$$S^{-1} A\, S = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_p \end{pmatrix}.$$

Hierin is iedere J_k een $d_k \times d_k$ matrix van de vorm

$$J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \lambda_k & 1 \\ 0 & \ldots & & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

met λ_k een eigenwaarde van A. Verder geldt uiteraard $d_1 + \ldots + d_p = n$. Schrijven we $B = S^{-1}AS$, dan is $Y(x) = SZ(x)S^{-1}$, met

$$Z(x) = e^{xB} = \begin{pmatrix} e^{xJ_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{xJ_p} \end{pmatrix}.$$

We berekenen nu e^{xJ_k} op twee manieren. Allereerst schrijven we $J = \lambda\, I + N$, waarbij we gemakshalve de index k weggelaten hebben, en waarin

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De matrices I en N commuteren met elkaar, zodat we mbv. het binomium van Newton vinden dat:

$$\frac{1}{k!}\,(\lambda\, I + N)^k = \sum_{l=1}^{k} \frac{\lambda^{k-l}}{(k-l)!}\frac{N^l}{l!}.$$

Merk op dat in de bovenstaande som de termen voor $l \geq n$ verdwijnen: immers N^l is de matrix die bestaat uit nullen, behalve op de plaatsen (i, j) (i het rij- en j het kolomnummer) met $j - i = l$, waar enen staan. Derhalve is $N^l = 0$ voor $l \geq n$. Gebruiken we dit inzicht in de reeks voor e^{xJ}, dan krijgen we:

$$e^{xJ} \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} x^k \sum_{l=0}^{\min(k,n)} \frac{\lambda^{k-l}}{(k-l)!}\frac{N^l}{l!}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{l=0}^{n} \left(\sum_{k=l}^{\infty} \frac{x^k \lambda^{k-l}}{(k-l)!} \right) \frac{N^l}{l!} \\
&= \sum_{l=0}^{n} x^l \, e^{x\lambda} \frac{N^l}{l!}.
\end{aligned}
$$

Hieruit volgt dat

$$
e^{xJ} = e^{\lambda x} \begin{pmatrix} 1 & x & (2!)^{-1}x^2 & \dots & (n-1)!^{-1}x^{n-1} \\ 0 & 1 & x & \dots & (n-2)!^{-1}x^{n-2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & 1 & x \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Men kan de matrix $U(x) = e^{xJ}$ ook berekenen door op te merken dat het de (uniek bepaalde) fundamentele matrix met $U(0) = I$ is voor het probleem

$$
u' = Ju.
$$

De bovenstaande vergelijking is te schrijven als stelsel:

$$
\begin{aligned}
u_1' &= \lambda u_1 + u_2, \\
u_2' &= \lambda u_2 + u_3, \\
&\vdots \\
u_{n-1}' &= \lambda u_{n-1} + u_n, \\
u_n' &= \lambda u_n.
\end{aligned}
$$

De bovenstaande vergelijkingen zijn successievelijk op te lossen, te beginnen met de laatste. De laatste vergelijking heeft als algemene oplossing: $u_n(x) = a_n \, e^{\lambda x}$. Hierna kunnen we met behulp van variatie van de constante de een na laatste vergelijking oplossen: $u_{n-1} = (a_{n-1} + a_n x)e^{\lambda x}$. Zo voortgaande vinden we met behulp van induktie dat

$$
u_j(x) = (a_{n-j} + a_{n-j+1}x + \dots + a_n \frac{x^j}{j!})e^{\lambda x}.
$$

De k-de kolom u^k van U voldoet aan de bovenstaande vergelijkingen en vervult de beginvoorwaarde $u^k(0) = e_k$, de k-de standaard basisvector in $\mathbb{C}^n$. Hieruit kunnen we de coëfficiënten a_j bepalen: $a_j = 0$ als $j \neq k$, en $a_k = 1$, dus

$$
u^k(x) = \begin{pmatrix} (k-1)!^{-1} \, x^{k-1} \\ (k-2)!^{-1} \, x^{k-2} \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

Hieruit volgt nogmaals de formule voor e^{xJ}.

Over de conjugatie met S die in het bovenstaande is gemaakt om de matrix $Y(x) = \exp(xA)$ te bepalen valt nog het volgende op te merken. Schrijven we

$$z(x) = S^{-1}y(x),$$

dan gaat de vergelijking (227) over in

$$z' = Bz,$$

met $B = S^{-1}AS$. Vinden we een oplossing z van dit stelsel, dan is $y(x) = Sz(x)$ een oplossing van het oorspronkelijke stelsel. Dus ook

$$\tilde{Y}(x) = SZ(x) \tag{228}$$

is een fundamentele matrix voor (227), en wel diegene met $\tilde{Y}(0) = S$.

Het kan voorkomen dat de matrix A uit de oorspronkelijke vergelijking (227) reëel is, maar complexe eigenwaarden heeft. De fundamentele matrix $Y(x) = \exp(xA)$ is dan reëel, maar in de in het voorgaande beschreven berekening komen dan toch complexe matrices voor. Uit de bovenstaande formules blijkt in ieder geval dat de coëfficiënten Y_{ij} van Y te schrijven zijn als

$$Y_{ij}(x) = \sum_{k=1}^{p} P_k(x)e^{\lambda_k x}, \tag{229}$$

met P_k een complex polynoom van graad hoogstens $d_k - 1$. (Let op: het is mogelijk dat onder de λ_k gelijke eigenwaarden voorkomen.) Anderzijds weten we dat Y reële coëfficiënten heeft. Schrijf nu $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$, met α_k en β_k reëel. Dan blijkt door in (229) van beide zijden het reële deel te nemen dat:

$$Y_{ij}(x) = \sum_{k=1}^{p} e^{\alpha_k x}(Q_k(x)\cos\beta_k x + R_k(x)\sin\beta_k x),$$

met Q_k en R_k reële polynomen van de graad hoogstens $d_k - 1$.

De hierboven behandelde methoden zijn algemeen. Voor kleine stelsels kan men in de praktijk door proberen vaak sneller oplossingen vinden. De eenvoudigste probeeroplossing is wel:

$$y(x) = e^{x\lambda}v, \tag{230}$$

met $\lambda \in \mathbb{C}$, $v \in \mathbb{C}^n, v \neq 0$. Door invullen van deze funktie in de vergelijking blijkt direkt $Av = \lambda v$, dus:

De funktie (230) is oplossing van de vergelijking (227) dan en slechts dan als v een eigenvector is van A bij de eigenwaarde λ.

Een bijzondere situatie ontstaat als de matrix A diagonaliseerbaar is. Dit betekent dat er een basis $s_1, \ldots, s_n$ van eigenvectoren bestaat, met respectievelijke eigenwaarden $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (waaronder gelijken kunnen voorkomen). Is eenmaal zo'n basis gevonden dan is $u^1(x) = e^{\lambda_1 x} s_1, \ldots, u^n(x) = e^{\lambda_n x} s_n$ een stel oplossingen van de vergelijking (227). Door evaluatie in $x = 0$ blijkt dit stel lineair onafhankelijk te zijn: de matrix $U(x) = (u^1(x) \ldots u^n(x))$ is derhalve een fundamentele matrix. Merk op dat $U(0) = S$: U is derhalve juist de reeds eerder in (228) gevonden fundamentele matrix $\tilde{Y}$.

Voorbeeld.

Beschouw de vergelijking (227) met $n = 3$ en

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

De karakteristieke vergelijking is $(1-\lambda)(\lambda^2+\lambda+2) = 0$. Schrijven we $\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{7}$, dan vinden we de eigenwaarden

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \alpha i, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} - \alpha i, \quad \lambda_3 = 1.$$

Als bijbehorende eigenvectoren vinden we achtereenvolgens

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + \alpha i \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \overline{v_1}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Als lineair onafhankelijke oplossingen van (227) vinden we

$$y_j = e^{\lambda_j x} v_j \qquad (1 \leq j \leq 3).$$

Omdat A reëel is verkrijgen we hieruit de lineair onafhankelijke reële oplossingen

$$z_1 = \operatorname{Re} y_1 = e^{-\frac{1}{2}x} \left[\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cos \alpha x - \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sin \alpha x \right]$$

en

$$z_2 = \operatorname{Im} y_1 = e^{-\frac{1}{2}x} \left[\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cos \alpha x - \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \sin \alpha x \right].$$

Een derde hiervan lineair onafhankelijke oplossing is $z_3 = y_3$.

15.3 Hogere orde vergelijkingen met constante coëfficiënten

We beschouwen de hogere orde vergelijking

$$y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \ldots + a_0\, y = 0 \tag{231}$$

met constante coëfficiënten. Herleiden we deze vergelijking tot een eerste orde vector vergelijking, dan krijgen we een vergelijking

$$z' = Az$$

met A als in (219). In het bijzonder heeft A constante coëfficiënten en kunnen we de vergelijking in principe oplossen mbv. de methoden van de vorige paragraaf. Omdat A zo'n speciale gedaante heeft, blijkt de situatie veel eenvoudiger te zijn. Daarom wijden we een aparte paragraaf aan de hogere orde vergelijking met constante coëfficiënten.

De funktie $y(x) = e^{\lambda x}$ voldoet aan de vergelijking (231) dan en slechts dan als

$$\lambda^n + a_{n-1}\, \lambda^{n-1} + \ldots + a_0 = 0 \tag{232}$$

(ga na!). Vergelijking (232) heet: de karakteristieke vergelijking van (231). De laatste opmerking uit de vorige paragraaf doet vermoeden dat deze karakteristieke vergelijking te maken heeft met de eigenwaardevergelijking van A. Dit is inderdaad het geval:

Lemma 15.9 *Voor alle $\lambda \in \mathrm{C}$ geldt:*

$$\lambda^n + a_{n-1}\, \lambda^{n-1} + \ldots + a_0 = (-1)^n \det(A - \lambda I)$$

Bewijs: We beschouwen de matrix $A - \lambda I$ en vegen achtereenvolgens $n-1$ keer met kolommen als volgt. De j-de keer ($1 \le j \le n-1$) vermenigvuldigen we de $j+1$ ste kolom met λ^j, en tellen we er de j de kolom bij op. Aldus onstaat de matrix

$$B(\lambda) = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & -\lambda^2 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & -\lambda^{n-1} & 0 \\ b_1(\lambda) & \ldots & & b_{n-1}(\lambda) & b_n(\lambda) \end{pmatrix} \tag{233}$$

met

$$b_j(\lambda) = -(a_0 + a_1\, \lambda + \ldots + a_{j-1}\, \lambda^{j-1}).$$

Uit de uitgevoerde bewerkingen volgt dat

$$\det B(\lambda) = \lambda^{\frac{1}{2}(n-1)n} \det(A - \lambda I).$$

Anderzijds volgt uit formule (233) dat

$$\det B(\lambda) = (-1)^{n-1}\, \lambda^{\frac{1}{2}(n-1)n}\, b_n(\lambda).$$

Hieruit volgt dat $\det(A - \lambda I) = (-1)^{n-1} b_n(\lambda)$. □

De volgende stelling maakt het in de praktijk overbodig om de homogene hogere orde vergelijking met constante coëfficiënten te herleiden tot een stelsel.

Stelling 15.10 *Laten $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ de verschillende wortels van de karakteristieke vergelijking (232) zijn. Zij m_j de multipliciteit van de wortel λ_j. Dan wordt een basis van oplossingen van de vergelijking (231) gegeven door*

$$\begin{array}{l} e^{\lambda_1 x},\ xe^{\lambda_1 x},\ \ldots,\ x^{m_1-1}e^{\lambda_1 x}, \\ e^{\lambda_2 x},\ xe^{\lambda_2 x},\ \ldots,\ x^{m_2-1}e^{\lambda_2 x}, \\ \quad\vdots \\ e^{\lambda_k x},\ xe^{\lambda_k x},\ \ldots,\ x^{m_k-1}e^{\lambda_k x}. \end{array}$$

Bewijs: Voor $1 \leq j \leq k$ beschouwen we de lineaire ruimte S_j van funkties opgespannen door de funkties $e^{x\lambda_j}, \ldots, x^{m_j-1}e^{x\lambda_j}$. Uit het voorgaande lemma blijkt dat λ_j eigenwaarde is van A met multipliciteit m_j. Derhalve is m_j een bovengrens van de maat van ieder Jordanblok van A waarin λ_j voorkomt. Uit de redenering van de vorige paragraaf blijkt nu dat iedere oplossing φ van (231) te schrijven is als $\varphi = \sum_{j=1}^{k} \varphi_j$, met $\varphi_j \in S_j$. Zij S de ruimte van alle oplossingen van (231). Dan geldt dus:

$$S \subset S_1 + \ldots + S_k. \tag{234}$$

We weten echter dat $\dim S = n$, terwijl uit de definitie van de ruimten S_j volgt dat $\dim S_j \leq m_j$. De dimensie van het rechterlid van (234) is dus nooit groter dan de dimensie van het linkerlid. Dit kan alleen als de inclusie (234) een gelijkheid is. $\Box$

Tenslotte merken we nog op: als de coëfficiënten van (231) reëel zijn, dan zijn er n lineair onafhankelijke oplossingen. Die verkrijgt men door de reële delen te nemen van de complexe oplossingen. Is μ een wortel van de karakteristieke vergelijking (232), dan is $\bar{\mu}$ dat ook, en wel met dezelfde multipliciteit. We concluderen:

Gevolg 15.11 *Veronderstel dat de coëfficiënten van (232) reëel zijn. Dan kan men de wortels van (232) ordenen als $\mu_1, \ldots, \mu_r, \alpha_1 \pm i\beta_1, \ldots, \alpha_s \pm i\beta_q$, met μ_i, α_j, β_j reëel. Zij p_i de multipliciteit van μ_i, en q_j die van $\alpha_j \pm i\beta_j$. Dan wordt een basis van reële oplossingen van de vergelijking (231) gegeven door*

$$\begin{array}{l} e^{\mu_1 x}, \ldots,\ x^{p_1-1}e^{\mu_1 x}, \\ \quad\vdots \\ e^{\mu_r x}, \ldots,\ x^{p_r-1}e^{\mu_r x}, \\ e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x, \ldots,\ x^{q_1-1}e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x, \\ e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x, \ldots,\ x^{q_1-1}e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x, \\ \vdots \\ e^{\alpha_s x}\cos\beta_s x, \ldots,\ x^{q_s-1}e^{\alpha_s x}\cos\beta_s x, \\ e^{\alpha_s x}\sin\beta_s x, \ldots,\ x^{q_s-1}e^{\alpha_s x}\sin\beta_s x. \end{array}$$

16 Vergelijkingen met analytische coëfficiënten

16.1 De tweede orde vergelijking

Zij I een open interval in R. Een funktie $f : I \to \mathrm{C}$ heet (reëel) analytisch als er voor iedere $x_0 \in I$ een $\delta > 0$ bestaat zo dat f op $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ te ontwikkelen is in een machtreeks:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \tag{235}$$

met coëfficiënten $a_n \in \mathrm{C}$. Merk op dat uit Stelling 8.7 volgt dat de bovenstaande machtreeks convergentiestraal minstens δ heeft.

We beschouwen nu de tweede orde vergelijking

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0, \tag{236}$$

met p en q reëel analytische funkties $I \to \mathrm{C}$.

Stelling 16.1 *Iedere oplossing van (236) op I is reëel analytisch.*

Hoewel we deze stelling niet zullen bewijzen, zullen we hem in de volgende paragraaf in verband brengen met de complexe funktie theorie uit het eerste deel van het diktaat.

We lichten het belang van het bovenstaande resultaat toe aan de hand van een voorbeeld.

Voorbeeld.

We beschouwen de Airy vergelijking

$$\frac{d^2y}{dx^2} - xy = 0 \tag{237}$$

op het interval $I = \mathrm{R}$. Hier is $p(x) = 0$, en $q(x) = -x$. Deze coefficiënten zijn reëel analytisch op R; hun machtreeksen rond 0 worden gegeven door $p_j = 0$, $(j \geq 0)$, en door $q_1 = -1$, $q_j = 0$, $(j \geq 0, j \neq 1)$. Iedere oplossing y van de Airy vergelijking heeft volgens het bovenstaande resultaat een machtreeksoplossing van de vorm $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Vullen we deze machtreeks in in de vergelijking (237), dan vinden we

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0.$$

Door herbenoemen van de sommatievariabele ($m = n - 2$ in de eerste en $m = n + 1$ in de tweede reeks) leiden we af dat

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+1)(m+2)\, a_{m+2} x^m - \sum_{m=1}^{\infty} a_{m-1} x^m = 0.$$

Door sommeren van de twee machtreeksen in het linkerlid vinden we een machtreeks die de nulfunktie voorstelt; hieruit volgt dat alle coëfficiënten van de somreeks nul moeten zijn. Voor de coëfficiënt van x^0 geeft dit $a_2 = 0$ en voor de coëfficiënt van x^m, $m \geq 1$ geeft dit

$$a_{m+2} = \frac{1}{(m+2)(m+1)} a_{m-1} \quad (m \geq 1).$$

Deze betrekkingen laten zien dat men a_0 en a_1 vrij kan kiezen. Vervolgens kunnen de coëfficiënten $a_2, a_3, \ldots$ achtereenvolgens bepaald worden. Betrekkingen waarbij men coëfficiënten achtereenvolgens kan bepalen uit hun voorgangers, heten ook wel recurrente betrekkingen. Het feit dat a_0 en a_1 vrij te kiezen zijn, waarna de overige coëfficiënten vastliggen, correspondeert met de existentie en eenduidigheid van het beginwaardeprobleem. Er geldt immers $a_0 = y(0)$ en $a_1 = y'(0)$. Er bestaat een oplossing y die aan deze beginwaarden voldoet, de oplossing, en daarmee alle coëfficiënten a_m, $m \geq 0$, wordt door deze condities volledig bepaald. Zie ook de bespreking van de algemene situatie hieronder.

Uit de bovenstaande recurrente betrekkingen voor de coëfficiënten volgt

$$\begin{aligned} a_{3k} &= \frac{1.4.7.\ldots(3k-2)}{(3k)!} a_0, \\ a_{3k+1} &= \frac{2.5.8.\ldots(3k-1)}{(3k+1)!} a_1, \\ a_{3k+2} &= 0, \end{aligned}$$

voor $k \geq 0$. We zullen zodadelijk zien dat de algemene theorie voorspelt dat de machtreeks voor $y(x)$ convergentiestraal oneindig heeft. Probeer dit ook direkt in te zien door de formules voor de coëfficiënten te gebruiken.

Ook in de algemene situatie kan men recurrente betrekkingen vinden voor de coëfficiënten van de machtreeksontwikkelingen van de oplossingen van (236). Hiervoor gebruiken we dezelfde procedure als in het bovenstaande voorbeeld.

Zij $x_0 \in I$. Dan heeft elke oplossing y van (236) een machtreeksontwikkeling rond het punt x_0, zie Stelling 16.1. In het vervolg zal blijken dat deze machtreeks uit te drukken is in de machtreeksontwikkelingen van p, q rond x_0. Door verschuiving zien we dat het voldoende is het geval $x_0 = 0$ te beschouwen. We beschouwen de machtreeksontwikkelingen voor p en q:

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \qquad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n.$$

Zij y een oplossing van (236). Dan heeft y een machtreeksontwikkeling

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Nu is

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)\, a_{n+2} x^n,$$

terwijl

$$p(x)y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (k+1)\, a_{k+1} p_{n-k} \right) x^n$$

en tenslotte

$$q(x)y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k q_{n-k} \right) x^n$$

We substitueren al deze machtreeksen in de vergelijking (236) en merken op dat de in het linkerlid verkregen machtreeks nul moet zijn. Dit kan alleen als de coëfficiënt van iedere macht x^n nul is. Passen we dit toe op de coëfficiënt van x^0, dan vinden we

$$2a_2 + p_0 a_1 + q_0 a_0 = 0.$$

Door naar coëfficiënten van hogere machten te kijken vinden we algemener de vergelijkingen:

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + \sum_{k=0}^{n} ((k+1)a_{k+1} p_{n-k} + a_k q_k) = 0 \quad (n \geq 0).$$

Hieruit blijkt: zijn de coëfficiënten a_0 en a_1 bekend, dan kan men achtereenvolgens $a_2, a_3, \ldots$ uit de bovenstaande recurrente betrekkingen bepalen. Dit was te verwachten: immers $y(0) = a_0$, en $y'(0) = a_1$, en vanwege de uniciteit van het beginwaardeprobleem legt dit de oplossing y volledig vast.

Tenslotte merken we nog op dat we iets kunnen zeggen over de convergentiestraal van de machtreeks voor y.

Lemma 16.2 *Veronderstel dat de machtreeksen voor p en q rond x_0 beiden een convergentiestraal $\geq \rho$ hebben. Dan heeft iedere oplossing van (236) rond x_0 een machtreeksontwikkeling met convergentiestraal $\geq \rho$.*

In de volgende paragraaf zal ook dit resultaat nader toegelicht worden.

16.2 Stelsels met analytische coëfficiënten

Laat I weer een open interval in R zijn. We beschouwen de vectorvergelijking (213), dus

$$y'(x) = A(x)y(x), \tag{238}$$

met $A(x)$ een matrix waarvan de coëfficiënten op reëel analytische wijze van $x \in I$ afhangen. In het onderstaande zullen we zien dat het vanwege de analyticiteit natuurlijker is de variabele x complex te maken.

Figuur 24:

Beschouw weer een reëel analytische funktie $f : I \to \mathbb{C}$ met een machtreeksontwikkeling rond x_0 als in (235). Dan is f mbv. formule (235) voortzetbaar tot een complex analytische funktie op de cirkelschijf $|z - x_0| < \delta$ in het complexe vlak (zie Figuur 24)! Deze voortzetting is uniek wegens Stelling 8.13. Door de voortzettingen voor verschillende $x_0 \in I$ samen te nemen zien we dat er een open deel $\Omega \subset \mathbb{C}$ bestaat zo dat $I = \Omega \cap \mathbb{R}$ en zo dat f een (unieke) complex analytische uitbreiding tot Ω heeft (zie Figuur 24). Omgekeerd is de restrictie tot I van iedere op een omgeving van I gedefinieerde complex differentieerbare funktie een reëel analytische funktie. Passen we deze beschouwing toe op de coëfficiënten van de matrix A dan zien we (voor geschikte Ω) dat de coëfficiënten A_{ij} voortzetbaar zijn tot complex differentieerbare funkties $\Omega \to \mathbb{C}$. We beschouwen nu de complexe vectordifferentiaalvergelijking

$$\frac{d}{dz} f(z) = A(z) f(z). \tag{239}$$

Hierbij is $A(z)$ dus een $n \times n$ matrix waarvan de coëfficiënten $A(z)_{ij}$ complex differentieerbare funkties op een open verzameling $\Omega \subset \mathbb{C}$ zijn. Onder het oplossen van de vergelijking verstaan we nu het vinden van alle *complex differentieerbare* funkties $f : \Omega \to \mathbb{C}^n$ die voldoen aan (239). In dit verband hebben we een fraaie lokale existentie en eenduidigheidsstelling. Het bewijs geven we hier niet.

Stelling 16.3 *Zij $A(z)$ complex differentieerbaar op een open verzameling Ω, en zij $z_0 \in \Omega$. Dan is er voor iedere $c \in \mathbb{C}^n$ precies één lokaal rond z_0 gedefinieerde (complex differentieerbare) oplossing f van (239) met $f(z_0) = c$.*

Over *globale* voortzetbaarheid van oplossingen kunnen we iets zeggen als we een beperking aan Ω opleggen.

Definitie 16.4 Een samenhangende open verzameling $\Omega \subset \mathbb{C}$ heet *enkelvoudig samenhangend* als iedere in Ω gelegen gesloten continue kromme continu samentrekbaar is tot een punt, zonder daarbij Ω te verlaten.

Intuïtief betekent enkelvoudige samenhang dat Ω geen gaten heeft.

Voorbeelden.

(1) De verzamelingen $\mathbb{C}$, $\{z \in \mathbb{C}\,;\ \operatorname{Re} z > 0\}$, $\{z \in \mathbb{C}\,; |z| < R\}$, en $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ zijn enkelvoudig samenhangend.

(2) De verzamelingen $\{z \in \mathbb{C}\,;\ |Z| > R\}$, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, en $\{z \in \mathbb{C}\,;\ \rho < |z| < R\}$ zijn wel samenhangend, maar niet enkelvoudig samenhangend.

We hebben nu de volgende stelling die we niet zullen bewijzen.

Stelling 16.5 *Zij $A(z)$ complex differentieerbaar op een enkelvoudig samenhangende open verzameling $\Omega \subset \mathbb{C}$. Dan is iedere lokaal gedefinieerde oplossing van (239) voortzetbaar tot Ω.*

Met behulp van dezelfde techniek als in het bewijs van Stelling 15.2 concluderen we nu:

Gevolg 16.6 *Zij A complex differentieerbaar op de open verzameling Ω. Dan is de ruimte S van alle op Ω gedefinieerde oplossingen van (239) een n-dimensionale complexe vectorruimte.*

Onder een fundamentele matrix voor (239) verstaan we weer een $n \times n$ matrix $Y(z)$ van complex differentieerbare funkties op Ω, waarvan de kolommen een basis van de oplossingsruimte S vormen. Ga zelf na dat de Stellingen 15.4, 15.5 en 15.6 versies voor de huidige context hebben.

We keren nu terug naar de situatie van de reëel analytische vergelijking (238) op een open interval I. We kunnen $\Omega \subset \mathbb{C}$ zo kiezen dat Ω enkelvoudig samenhangend is, terwijl $I \subset \Omega$, en zo dat A complex analytisch voortzetbaar is tot Ω. Op Ω heeft de voortgezette vergelijking een fundamentele matrix met complex differentieerbare funkties. Beperken we die fundamentele matrix weer tot I, dan zien we:

Gevolg 16.7 *Zij $A(x)$ reëel analytisch in de variabele $x \in I$. Dan is iedere oplossing van (238) een reëel analytische funktie op I.*

We passen het bovenstaande nu toe op de tweede orde vergelijking (236) uit de vorige paragraaf. We kunnen deze vergelijking weer op de gebruikelijke wijze herschrijven als een vectorvergelijking, vgl. (219), maar nu met $A(x)$ reëel analytisch. Derhalve is elke oplossing van (236) reëel analytisch, dus Stelling 16.1 geldt.

Lemma 16.2 leiden we nu als volgt af. We beschouwen de open schijf Ω in $\mathbb{C}$ met middelpuint x_0 en straal ρ, en het interval $J = \Omega \cap \mathbb{R} =]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$. Dan hebben p en q en dus A een complex analytische voortzeting tot Ω. Wegens Stelling 16.5 heeft iedere lokale oplossing van het stelsel rond x_0 een complex analytische voortzetting tot Ω. Iedere rond x_0 gedefinieerde oplossing y van (236) heeft derhalve een analytische voortzeting tot Ω. De machtreeks van deze oplossing rond x_0 heeft dus convergentiestraal minstens ρ.

17 Vergelijkingen met singuliere coëfficiënten

17.1 De tweede orde vergelijking

Doel van deze paragraaf is inzicht te verkrijgen in het gedrag van oplossingen van de vergelijking

$$y''(x) + \frac{1}{x-a}\, p(x)\, y'(x) + \frac{1}{(x-a)^2}\, q(x)\, y(x) = 0 \tag{240}$$

Hierbij wordt verondersteld dat p en q reëel analytische funkties zijn met een machtreeksontwikkeling rond a die convergeert op het interval $I = \,]\, a-\rho, a+\rho\, [\quad (a \in \mathrm{R}, \rho > 0)$. De coëfficiënten in de bovenstaande vergelijking hebben een singulariteit in $x = a$. De coëfficiënt van de j-de orde afgeleide heeft in a een pool van $2-j$ de orde: een dergelijke vergelijking heet regulier singulier in het punt a (in oudere literatuur spreekt men wel van een zwak singulier punt). Men kan niet verwachten dat de oplossingen van (240) regulier zijn in $x = a$. We beperken ons daarom tot het interval $J = \,]\, a, a+\rho\, [$. Oplossingen zijn altijd voortzetbaar tot het gehele interval J; de ruimte S van op J gedefinieerde oplossingen is een tweedimensionale complexe vectorruimte en bestaat uit analytische funkties.

Voorbeelden.

Voorbeelden van (240) zijn onder andere de vergelijking van Laguerre (zie Paragraaf 18.3) en de vergelijking van Bessel (zie Paragraaf 18.4). We verwijzen naar deze voorbeelden ter illustratie van de hieronder behandelde algemene theorie.

Door translatie kunnen we de vergelijking (240) overvoeren in een soortgelijke vergelijking met $a = 0$. In het vervolg beperken we ons daarom tot het geval $a = 0$.

De Euler vergelijiking. Om inzicht te krijgen in wat we kunnen verwachten, beschouwen we eerst het geval dat de funkties p en q constant zijn, dus $p(x) \equiv p_0$ en $q(x) \equiv q_0$. De zo verkregen vergelijking heet een tweede orde Euler vergelijking:

$$y'' + p_0 x^{-1} y' + q_0 x^{-2} y = 0 \tag{241}$$

op $J = \,]\, 0, \infty[$. We beschouwen nu de funktie $u : \mathrm{R} \to \mathrm{C}$, gedefinieerd door $u(t) = y(e^t)$. Merk op dat

$$u'(t) = e^t y'(e^t), \quad u''(t) = e^{2t} y''(e^t) + e^t y'(e^t).$$

Hieruit volgt dat

$$u''(t) + (p_0 - 1) u'(t) + q_0 u(t) = 0. \tag{242}$$

De zo verkregen vergelijking met constante coëfficiënten heeft als karakteristieke vergelijking:

$$\lambda^2 + (p_0 - 1)\lambda + q_0 = 0. \tag{243}$$

Heeft deze vergelijking twee verschillende wortels λ_1 en λ_2, dan heeft (242) de twee lineair onafhankelijke oplossingen: $u_{12} = e^{\lambda_{12} x}$. De Euler vergelijking (241) heeft dan de lineair onafhankelijke oplossingen

$$y_j(x) = u_j(\log x) = e^{\lambda_j \log x} = x^{\lambda_j} \qquad (j = 1, 2).$$

Heeft de vergelijking (243) een tweevoudige wortel λ, dan heeft (242) twee lineair onafhankelijke oplossingen

$$u_1(t) = e^{\lambda t} \quad \text{en} \quad u_2(t) = te^{\lambda t}.$$

Voor de oorspronkelijke vergelijking (241) krijgen we in dit geval de twee lineair onafhankelijke oplossingen

$$y_1(x) = x^{\lambda} \quad \text{en} \quad y_2(x) = x^{\lambda}\log x.$$

Merk op dat we in de oorspronkelijke vergelijking ook direkt een oplossing van de vorm $y(x) = x^{\lambda}$ hadden kunnen proberen. Dit leidt weer tot de vergelijking (243).

De algemene vergelijking. We keren nu weer terug tot de oorspronkelijke vergelijking (240). Geinspireerd door het speciale geval proberen we een oplossing te vinden van de vorm $y(x) = x^r f(x)$, met f een in de buurt van $x = 0$ gedefinieerde analytische funktie. We kunnen daarbij veronderstellen dat $f(0) \neq 0$: anders zouden we een macht van x naar buiten kunnen halen. Zo'n f heeft een machtreeksontwikkeling $f(x) = \sum a_n x^n$ met $a_0 \neq 0$. We proberen in feite dus een oplossing van de vorm

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} \tag{244}$$

($a_0 \neq 0$) te vinden.

Voorbeeld.

Als voorbeeld beschouwen we de volgende vergelijking

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{9})y = 0. \tag{245}$$

Dit is de Besselvergelijking met $\lambda = \frac{1}{3}$, zie Paragraaf 18.4. De vergelijking heeft $x = 0$ als reguliere singulariteit. Dit zien we in door de vergelijking te delen door x^2, waardoor de coëfficiënt van y'' gelijk wordt aan 1 :

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{x^2 - \frac{1}{9}}{x^2}y = 0.$$

Deze vergelijking is gelijkwaardig met (245) en heeft de gedaante (240) met $\alpha = 0$, $p(x) = 1$ en $q(x) = x^2 - \frac{1}{9}$.

We proberen nu een oplossing $y(x)$ van de vorm (244) met $a_0 \neq 0$. Een dergelijke funktie y voldoet aan

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n x^{r+n-1} \\ y''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_n x^{r+n-2} \end{aligned}$$

Invullen in (245) levert

$$\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_nx^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_nx^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{r+n+2} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{9}a_nx^{r+n} = 0.$$

Door herbenoemen van de sommatievariabele in de derde reeks ($m = n+2$) en apart nemen van de termen met machten x^r en x^{r+1} vinden we

$$a_0(r^2 - \frac{1}{9})x^r + a_1((r+1)^2 - \frac{1}{9})x^{r+1} + \sum_{m=2}^{\infty}[a_m((r+m)^2 - \frac{1}{9}) + a_{m-2}]x^{r+m} = 0.$$

Delen we deze gelijkheid door x^r dan vinden we een machtreeks die de nulfunktie voorstelt. Dit betekent dat alle coëfficiënten van de machtreeks nul moeten zijn. Voor de coëfficiënt van x^r levert dit $a_0(r^2 - \frac{1}{9}) = 0$. Aangezien we verondersteld hadden dat $a_0 \neq 0$, levert dit een vergelijking voor r, de zogenaamde indexvergelijking. In dit geval luidt de indexvergelijking

$$r^2 = \frac{1}{9}.$$

De wortels van de indexvergelijking zijn $r = \pm\frac{1}{3}$. We nemen eerst $r = \frac{1}{3}$ en proberen de corresponderende oplossing y te vinden. Het nul zijn van de coëfficiënt van $x^{r+1} = x^{4/3}$ levert: $15a_1/9 = 0$ dus $a_1 = 0$. Het nul zijn van de coëfficiënt van x^{r+m}, $m \geq 2$ levert de recurrente betrekkingen:

$$a_m m(m + \frac{2}{3}) + a_{m-2} = 0 \qquad (m \geq 2).$$

Hieruit blijkt dat alle coëfficiënten vastliggen zodra a_0 vastligt. Er geldt dat $a_m = 0$ voor oneven m. Voorts leidt men uit de recurrente betrekkingen gemakkelijk af dat

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{[(2k)(2k-2)\cdots 2][(2k+\frac{2}{3}))(2k-2-\frac{2}{3})\cdots(2-\frac{2}{3})]}.$$

In het bijzonder blijkt uit het bovenstaande dat er één reeks $y_+(x)$ van de vorm (244) te vinden is met $r = \frac{1}{3}$ en $a_0 = 1$, die voldoet aan de vergelijking (245).

Op soortgelijke wijze als in het bovenstaande ziet men in dat ook de tweede wortel $r = -\frac{1}{3}$ van de indexvergelijking leidt tot een unieke reeks $y_-(x)$ van de vorm (244) met $r = -\frac{1}{3}$ en $a_0 = 1$. De recurrente betrekkingen voor de coëfficiënten van deze reeksoplossing zijn $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ en

$$a_m m(m - \frac{2}{3}) + a_{m-2} = 0 \qquad (m \geq 2).$$

Geïnspireerd door het bovenstaande voorbeeld keren we terug naar de algemene situatie. Het zal handig zijn de volgende notatie voor een tweede orde differentiaaloperator te gebruiken

$$D = x^2\frac{d^2}{dx^2} + xp(x)\frac{d}{dx} + q(x). \tag{246}$$

Vergelijking (240) kan nu kort herschreven worden als

$$Dy = 0. \tag{247}$$

Zij y van de vorm (244). Door de bekende vermenigvuldiging van machtreeksen toe te passen zien we dat

$$Dy(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left((n+r)(n+r-1)\, a_n + \sum_{k=0}^{n} ((k+r)\, a_k p_{n-k} + a_k q_{n-k}) \right) x^{r+n} \tag{248}$$

We korten dit af als

$$Dy(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} D_{n,k}(r) a_k \right) x^{r+n} \tag{249}$$

met voor $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} D_{n,n}(r) &= (n+r)(n+r-1) + (n+r)p_0 + q_0; \\ D_{n,k}(r) &= (k+r)p_{n-k} + q_{n-k} \qquad \text{als} \quad 0 \leq k < n. \end{aligned}$$

De funktie (244) voldoet aan (247) als in (248) de coëfficiënt van iedere macht x^{n+r} nul is. Dit is gelijkwaardig met de betrekkingen:

$$D_{n,n}(r) a_n = -\sum_{k=0}^{n-1} D_{n,k}(r) a_k \qquad (n \geq 0). \tag{250}$$

Voor $n = 0$ geeft dit, daar $a_0 \neq 0$, de zogenaamde *indexvergelijking*:

$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0. \tag{251}$$

Merk op dat deze vergelijking herschreven kan worden als (243).

De indexvergelijking legt alle mogelijkheden voor r vast. Laten r_1, r_2 de wortels van de indexvergelijking zijn. Dan is

$$p_0 = 1 - r_1 - r_2, \tag{252}$$
$$q_0 = r_1 r_2. \tag{253}$$

We veronderstellen in het vervolg dat $r \in \{ r_1, r_2 \}$. Dan ziet men door (251) en (252) te gebruiken in dat

$$D_{n,n} = n(n + (2r - r_1 - r_2)) \qquad (n \geq 0).$$

Is het verschil $r_1 - r_2$ niet geheel, dan is $2r - r_1 - r_2 = \pm(r_1 - r_2)$ niet geheel, zodat $D_{n,n}(r) \neq 0$ voor alle $n > 0$. De coëfficiënten a_n $(n \geq 1)$ zijn in dit geval dus eenduidig te bepalen uit de recurrente betrekkingen (250), terwijl de coëfficiënt a_0 aan geen enkele conditie onderhevig is. We hebben bewezen

Stelling 17.1 *Veronderstel dat het verschil van de wortels r_1 en r_2 van de indexvergelijking (251) niet geheel is. Dan heeft (247) formele reeksoplossingen van de vorm*

$$y_1(x) = x^{r_1}(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n) \tag{254}$$

$$y_2(x) = x^{r_2}(1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n). \tag{255}$$

De coëfficiënten a_n en b_n zijn uniek bepaald door de recurrente betrekkingen die ontstaan door de reeksen voor y_{12} in te vullen in (247).

Opmerking. In de bovenstaande stelling hebben we gesproken over formele reeksoplossingen: daarmee bedoelen we dat we geen uitspraak doen over de convergentie van de gegeven reeksen. Zelfs sluiten we niet uit dat ze nergens convergeren. Verderop in dit hoofdstuk zullen we echter zien dat de voorkomende machtreeksen convergentiestraal $\geq \rho$ hebben.

In het vervolg veronderstellen we dat de wortels van de indexvergelijking een geheel getal verschillen. Na een eventuele verwisseling van namen kunnen we dus veronderstellen dat $r_1 - r_2 \in \mathrm{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, ofwel

$$r_1 = r_2 + l \qquad (l \in \mathrm{N}). \tag{256}$$

Uit de redenering boven Stelling 17.1 blijkt in ieder geval dat $D_{n,n}(r_1) \neq 0$ voor $n > 0$. Er is dus een formele reeksoplossing van de vorm

$$y_1(x) = x^{r_1}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right), \tag{257}$$

waarbij de coëfficiënten a_n eenduidig vastliggen door de keuze $a_0 = 1$ en de recurrente betrekkingen (250). Op grond van het voor de Euler vergelijking gevondene moeten we verwachten dat in een tweede oplossing logarithmen voor kunnen komen.

Stelling 17.2 *Veronderstel dat de wortels van de indexvergelijking voldoen aan (256). Dan is er een formele reeksoplossing van de vorm (257), met coëfficiënten die vastliggen door de recurrente betrekkingen die ontstaan door invullen van de reeks in (247). Verder is er een tweede formele reeksoplossing van de vorm*

$$y_2(x) = c\, y_1(x) \log x + x^{r_2} \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq l}}^{\infty} b_n x^n. \tag{258}$$

Indien $r_1 \neq r_2$ (ofwel $l \neq 0$) dan is $b_0 = 1$. De coëfficiënten b_n ($n \geq 1$) en c zijn uniek bepaald door recurrente betrekkingen die ontstaan door invullen van (258) in (247). Als $r_1 = r_2$, dan volgt uit de recurrente betrekkingen dat $c = 1$.

Opmerking. Indien $r_1 \neq r_2$, dan kan het voorkomen dat men $c = 0$ als oplossing van de recurrente betrekkingen voor. In dat geval komen er dus geen logarithmen in de reeksontwikkelingen van de oplossingen voor.

Opmerking. In de volgende paragraaf zullen we laten zien dat ook de machtreeks $\sum b_n x^n$ convergentiestraal $\geq \rho$ heeft.

Bewijs: Het bewijs bestaat uit een nauwgezette analyse van recurrente betrekkingen. We geven het voor de liefhebber.

Beschouw reeksen

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}, \quad v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^{n+r},$$

met $(c_0, d_0) \neq (0,0)$. We gaan onderzoeken waaraan een oplossing van de vorm

$$y(x) = v(x) + u(x) \log x = \sum_{n=0}^{\infty} (d_n + c_n \log x) x^{r+n}$$

moet voldoen. Er geldt:

$$Dy(x) = Dv(x) + Eu(x) + \log x \, Du(x),$$

waarin

$$E = 2x \frac{d}{dx} + (p(x) - 1).$$

Hieruit blijkt dat y een formele oplossing is van de vergelijking (247) dan en slechts dan als

$$\begin{aligned} Du &= 0, & (259) \\ Dv &= -Eu & (260) \end{aligned}$$

In het bijzonder moet u dus een oplossing van (247) zijn. Verder merken we op dat

$$Eu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} E_{n,k}(r) c_k \right) x^{r+n},$$

waarin

$$\begin{aligned} E_{n,n}(r) &= 2(n+r) + p_0 - 1, & (261) \\ E_{n,k}(r) &= p_{n-k} \qquad (0 \leq k < n). & (262) \end{aligned}$$

Uit (259,260) volgt nu door nul stellen van de coëfficiënten dat (voor $n \geq 0$):

$$D_{n,n}(r) c_n = - \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} D_{n,k}(r) c_k, \qquad (263)$$

$$D_{n,n}(r) d_n + E_{n,n}(r) c_n = - \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(D_{n,k}(r) d_k + E_{n,k}(r) c_n \right). \qquad (264)$$

We herschrijven deze betrekkingen in matrixvorm

$$M_{n,n}\begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix} = -\sum_{k=0}^{n-1} M_{n,k}(r)\begin{pmatrix} c_k \\ d_k \end{pmatrix} \quad (n \geq 0)$$

waarbij

$$M_{n,k}(r) = \begin{pmatrix} D_{n,k}(r) & 0 \\ E_{n,k}(r) & D_{n,k}(r) \end{pmatrix}.$$

Voor $n = 0$ staat er $M_{0,0}(r)\begin{pmatrix} c_0 \\ d_0 \end{pmatrix} = 0$. Omdat $(c_0, d_0) \neq (0,0)$ kan hieraan alleen voldaan zijn als $\det M_{0,0}(r) = D_{0,0}(r)^2 = 0$: dit betekent weer precies dat r een wortel is van de indexvergelijking. In het vervolg veronderstellen we dat $r = r_2$.

Het geval $l > 0$. In dit geval geldt: $E_{n,n}(r_2) = 2n + r_2 - r_1 = 2n - l$. Uit (264) voor $n = 0$ volgt nu dat $c_0 = 0$. Verder is $D_{n,n}(r_2) = n(n-l)$, dus uit (264) voor $n = 1, \ldots l-1$ volgt dat

$$c_0 = c_1 = \ldots = c_{l-1} = 0.$$

Op d_0 ligt geen conditie (buiten het niet nul zijn) en mbv. (264) voor $1 \leq n \leq l-1$ blijkt dat $d_1, \ldots, d_{l-1}$ uit te drukken zijn in d_0. Voor $n = l$ is de vergelijking (264) gelijkwaardig met

$$E_{l,l}(r)c_l = -\sum_{k=0}^{l-1} D_{l,k}(r)d_k.$$

Wegens $E_{l,l}(r_2) = 2l \neq 0$ is c_l hieruit uniek oplosbaar. Verder is d_l niet aan enige conditie onderhevig. Omdat $M_{n,n}$ inverteerbaar is voor $n > l$, zijn de overige coëfficiënten oplosbaar uit (264). We merken nog op dat de reeks voor v begint met de macht $r_2 + l = r_1$, terwijl $Dv = 0$. Hieruit volgt dat $v = c_l y_1$. Nemen we $d_0 = 1, d_l = 0$ dan vinden we y_2 met $c = c_l, b_n = d_n$.

Het geval $l = 0$. In dit geval is $M_{0,0}(r_2) = 0$, terwijl $M_{n,n}(r_2)$ inverteerbaar is voor $n > 0$. Hieruit blijkt dat c_0 en d_0 vrij te kiezen zijn, waarna de overige coëfficiënten vastliggen. Nemen we $c_0 = 1$ en $d_0 = 0$, dan liggen u en v volledig vast. De reeks voor u begint met de macht x^{r_1} terwijl $Du = 0$. Derhalve is $u = c_0 y_1$, dus $y_2 = u \log x + v$ heeft de verlangde vorm. □

Opmerking. Met de bovenstaande methoden kan men zelfs laten zien dat *iedere* formele reeksoplossing van de vorm

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(d_n + c_n \log x)x^{r+n} \tag{265}$$

geschreven kan worden als lineaire combinatie van y_1 en y_2. Dit gaat als volgt.

Is (265) een oplossing van (247), dan moet $r \in \{r_1, r_2\}$ zijn. Is $r = r_2$, dan volgt uit het bovenstaande bewijs dat

$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x),$$

met $B = c_0$ en $A = d_l$. Is $r = r_1 \neq r_2$, dan is $\det M_{n,n}(r) \neq 0$ voor alle $n \geq 1$ zodat alle coëfficiënten c_n, d_n vastliggen als c_0 en d_0 bekend zijn. Verder is $E_{0,0} = r_1 - r_2 \neq 0$, dus $d_n = 0$. Uit de recurrente betrekkingen voor d_n volgt nu dat $d_n = 0$ voor alle n. We concluderen uiteindelijk dat $y = c_0 y_1$.

17.2 Stelsels met een reguliere singulariteit

De vergelijking (240) kan herleid worden tot een stelsel. Het is een andere herleiding dan de gebruikelijke, vanwege de singulariteiten van de coëfficiënten. Schrijf $f_1(x) = y(x)$, en $f_2(x) = xy'(x)$. Dan is de vergelijking (240) equivalent met het stelsel

$$\begin{aligned} \frac{df_1}{dx} &= \frac{1}{x} f_2(x), \\ \frac{df_2}{dx} &= \frac{1}{x} \left(-q(x) f_1(x) + (1 - p(x)) f_2(x)\right). \end{aligned} \tag{266}$$

Dit is een speciaal geval van de eerste orde vectorvergelijking met een reguliere singulariteit in $x = 0$:

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{x} A(x) f(x),$$

met $A(x)$ een $n \times n$ matrix die rond $x = 0$ analytisch van x afhangt. Verder schrijven we $f = (f_1, \ldots, f_n)$. Zoals in het vorige hoofdstuk bekijken we het probleem weer complex. Veronderstel dat de machtreeks van iedere coëfficiënt van A rond 0 een convergentiestraal $\geq \rho$ heeft. Dan heeft A een complex differentieerbare uitbreiding tot $|z| < \rho$. We beschouwen nu het complexe probleem

$$\frac{df}{dz} = \frac{1}{z} A(z) f(z) \tag{267}$$

op de gepuncteerde cirkelschijf $\Omega = \{z \in \mathrm{C};\ \ 0 < |z| < \rho\}$.

Eerst behandelen we het geval dat A een constante matrix is. Voor een constante $n \times n$ matrix C definiëren we

$$z^C = e^{\log z\, C}.$$

Dit is een matrix waarvan de coëfficiënten op meerwaardige wijze van z afhangen.

Voorbeelden.

(1) Als $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, dan is $z^D = \begin{pmatrix} z^\lambda & 0 \\ 0 & z^\mu \end{pmatrix}$,

(2) Als $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, dan is $z^J = \begin{pmatrix} z^\lambda & z^\lambda \log z \\ z^\lambda & 0 \end{pmatrix} = z^\lambda \begin{pmatrix} 1 & \log z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Zij Ω_φ het deel van Ω dat ontstaat door de halflijn $\arg z = \varphi$ weg te snijden ($0 < \varphi < 2\pi$). Dan kunnen we een tak van z^C op Ω_φ beschouwen. Merk op dat iedere andere tak van de vorm $e^{2n\pi i C} z^C$ is, vanwege het meerwaardige gedrag van de logarithme. Voor iedere tak geldt (gebruik de kettingregel):

$$\frac{d}{dz} z^C = \frac{1}{z} C z^C.$$

Passen we dit toe met $C = A$, dan zien we dat de kolommen van z^A oplossingen van de vergelijking (267) op Ω_φ definiëren. Verder is z^A een inverteerbare matrix met inverse

$$\left(z^A\right)^{-1} = z^{-A}.$$

We concluderen:

Lemma 17.3 *Zij A een constante matrix. Dan definieert iedere tak $F(z)$ van z^A een fundamentele matrix van (267) op Ω_φ.*

Voorbeelden.

(1) Als $n = 1$, dan is $A \in \mathbb{C}$, dus z^A is de gebruikelijke machtsfunktie.

(2) De Euler vergelijking (241) leidt tot (267) met

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q_0 & 1 - p_0 \end{pmatrix}.$$

De eigenwaardevergelijking van deze matrix is precies (243).

Als de wortels λ_1 en λ_2 verschillend zijn dan is er een inverteerbare matrix S zo dat

$$S^{-1} A S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt dat

$$z^A = S \begin{pmatrix} z^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & z^{\lambda_2} \end{pmatrix} S^{-1}$$

een fundamentele matrix definieert. De algemene oplossing van de Euler vergelijking bestaat dus precies uit alle lineaire combinaties van de funkties op de eerste rij. Dit is in overeenstemming met het eerder gevondene.

Als $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, dan is er een inverteerbare matrix S met

$$S^{-1} A S = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

en we vinden de fundamentele matrix

$$z^A = z^\lambda\, S \begin{pmatrix} 1 & \log z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} S^{-1}.$$

Ook dit is weer in overeenstemming met het eerder gevondene.

Opmerkingen. Merk op dat het bestaan van een fundamentele matrix op Ω_φ voorspeld wordt door Stelling 16.5. Wezenlijk hierbij is dat Ω_φ enkelvoudig samenhangend is. Uit de oplossing van de Euler vergelijking blijkt dat de voorwaarde van enkelvoudige samenhang in Stelling 16.5 noodzakelijk is om verschijnselen van meerwaardigheid te vermijden.

We zijn nu gereed om het algemene geval van niet constante A te behandelen. We kiezen een punt $x_0 \in]0, \rho[$. Verder brengen we een een tweetal coupures aan in Ω corresponderend met de hoeken $\varphi_1 = \frac{3}{2}\pi$ en $\varphi_2 = \frac{1}{2}\pi$. Zij $\Omega_j = \Omega_{\varphi_j}$. De verzamelingen Ω_j zijn enkelvoudig samenhangend, dus wegens Stelling 16.5 bestaat er op iedere Ω_j een fundamentele oplossing. Kies de fundamentele oplossing F_1 op Ω_1 die voldoet aan $F_1(x_0) = I$. De beperking van F_1 tot $U = \{z \in \Omega;\ \ \mathrm{Re}\, z < 0\}$ is een fundamentele oplossing, dus voortzetbaar tot een fundamentele oplossing F_2 op Ω_2. De belangrijke observatie is nu dat het mogelijlk is dat $F_2(x_0) \neq I$, dus dat F_1 en F_2 van elkaar verschillen in een omgeving van het punt x_0. Het verschijnsel dat een fundamentele matrix door analytisch voortzetten rond 0 verandert heet monodromie. De matrix $M = F_2(x_0)$ heet de monodromie matrix van het stelsel (266). Omdat F_2 weer een fundamentele oplossing is, is M een inverteerbare matrix. Zonder bewijs vermelden we nu het volgende resultaat (geef zelf een bewijs voor het geval $n = 2$: maak daarbij gebruik van de Jordan normaalvorm).

Lemma 17.4 *Zij M een inverteerbare $n \times n$-matrix. Dan bestaat er een $n \times n$-matrix N_0 zo dat $M = e^{N_0}$.*

Schrijf $N = \frac{1}{2\pi i} N_0$. Dan is $M = e^{2\pi i N}$. Bekijk nu de matrix

$$G(z) = F_1(z) \circ z^N$$

op Ω_1.

Lemma 17.5 *De matrix $G(z)$ heeft een (eenwaardige) complex differentieerbare voortzetting tot de gehele verzameling Ω.*

Bewijs: We passen dezelfde voortzettingsprocedure toe als in het bovenstaande. Dit leidt tot G_2 op Ω_2 met

$$G_2(z) = F_2(z) \circ \left(M \circ z^{2\pi i N}\right) = F_2(z) \circ \left(M \circ z^N\right).$$

Omdat $F_1(z) = F_2(z) \circ M$ op $\{z \in \Omega;\ \mathrm{Re}\, z > 0\}$, volgt hieruit dat $G_1 = G_2$ op $\Omega_1 \cap \Omega_2$. Hieruit volgt hetgeen te bewijzen was. $\square$

Wegens Stelling 9.2 heeft G op het ringgebied Ω een Laurentreeksontwikkeling

$$G(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_k z^k$$

met G_k constante $n \times n$ matrices. Men kan bewijzen dat er een $n \in \mathrm{N}$ bestaat zo dat $G_k = 0$ voor alle $k \leq -n$. Met andere woorden: $G(z)$ heeft ten hoogste een pool in $z = 0$. Schrijven we $G = N - nI$, dan blijkt:

Stelling 17.6 *Er bestaat een matrix $\Phi(z)$ analytisch op $|z| < G$, en een constante matrix G zo dat*

$$F(z) = \Phi(z) z^R$$

een fundamentele matrix van (267) definieert.

We kunnen nu laten zien dat de formele reeksoplossingen voor het oorspronkelijke probleem (240) convergeren, dus echte oplossingen zijn.

We veronderstellen weer dat de reeksen voor p en q een convergentiestraal minstens ρ hebben. Passen we het hier boven gevondene toe op het stelsel (266), dan vinden we een op $]0, \rho[$ gedefinieerde oplossing van de vorm

$$F(x) = \Phi(x) e^{R \log x}.$$

Hierbij is R een constante 2×2-matrix, en $\Phi(x)$ een 2×2-matrix met coëfficiënten die gegeven worden door machtreeksen met convergentiestraal minstens ρ. We vinden nu twee lineair onafhankelijke oplossingen van het oorspronkelijke probleem, namelijk

$$z_1(x) = F(x)_{11} \text{ en } z_2(x) = F(x)_{12}.$$

Zij S een matrix zo dat $S^{-1}RS$ een Jordannormaalvorm heeft. Dan zijn er twee mogelijkheden, die we apart zullen behandelen.

(1) Geval 1: $S^{-1}RS$ is van de vorm D in Voorbeeld (1) voor Lemma 17.3.

(2) Geval 2: $S^{-1}RS$ is van de vorm J in Voorbeeld (2) voor Lemma 17.3.

Geval 1. Uit $F(x) = \Phi(x) S z^D S^{-1}$ leiden we nu af dat

$$z_j(x) = x_j^{\lambda} u_j(x) + x_j^{\mu} v_j(x)$$

waarbij u_j, v_j gegeven worden door machtreeksen met convergentiestraal minstens ρ, en $u_j(0) \neq 0, \quad v_j(0) \neq 0$. Door invullen in (240) en door het beschouwen van recurrente betrekkingen zien we dat $z_j = A_{1j} y_1 + A_{2j} y_2$, voor zekere $A_{ij} \in \mathrm{C}$. Uit het feit dat z_1 en z_2 lineair onafhankelijk zijn volgt dat de matrix A inverteerbaar is. Derhalve zijn y_1 en y_2 te schrijven als lineaire combinaties van z_1 en z_2. De bijbehorende machtreeksen moeten dus convergentiestraal minstens ρ hebben.

Geval 2. In dit geval hebben we dat

$$z_j(x) = x^{\lambda_j} \left(u_j(x) + \log x \, v_j(x) \right)$$

waarbij u_j, v_j gegeven worden door machtreeksen met convergentiestraal $\geq \rho$. Uit de opmerking onder het bewijs van Stelling 17.2 volgt nu dat z_j te schrijven zijn als lineaire combinatie van y_1 en y_2. Omdat z_1 en z_2 lineair onafhankelijk zijn zijn y_1 en y_2 te schrijven als lineaire combinatie van z_1 en z_2. Alle optredende machtreeksen hebben derhalve convergentiestraal $\geq \rho$.

18 Speciale vergelijkingen en funkties

18.1 De vergelijking van Hermite

De volgende vergelijking van Hermite speelt o.a. een rol in de quantummechanica.

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0 \tag{268}$$

op R; λ is een complexe constante. De coëfficiënten zijn machtreeksen met convergentiestraal oneindig zodat oplossingen beschreven kunnen worden door machtreeksen met convergentiestraal oneindig. Substitutie van de machtreeks $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ in (268) geeft, na verschuiving van sommatievariabelen (zie Hoofdstuk 16):

$$2a_2 + \lambda a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left[(m+2)(m+1)a_{m+2} - 2ma_m + \lambda a_m\right] x^m = 0$$

en we vinden de recurrente betrekkingen

$$a_{m+2} = \frac{2m - \lambda}{(m+2)(m+1)}\, a_m \qquad (m \geq 0).$$

Twee lineair onafhankelijke oplossingen y_1 en y_2 van (268) vindt men door achtereenvolgens $a_0 = 1, a_1 = 0$ en $a_0 = 0, a_1 = 1$ te kiezen en de overige coëfficiënten te bepalen:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1 - \frac{\lambda}{2!}x^2 - \frac{(4-\lambda)\lambda}{4!} - \frac{(8-\lambda)(4-\lambda)\lambda}{6!}x^6 - \cdots \\ y_2(x) &= x + \frac{2-\lambda}{3!}x^3 + \frac{(6-\lambda)(2-\lambda)}{5!}x^5 + \cdots \end{aligned}$$

Als λ een even getal $2n$ is ($n \geq 0$), dan breekt precies een der beide machtreeksen af. Het polynoom dat zo ontstaat noteren we met $\tilde{H}_n$. Verderop zullen we een normalisatie toepassen: na deling door een geschikte constante $c_n \in \mathrm{R} \setminus \{0\}$ ontstaat het zogenaamde Hermite-polynoom $H_n = c_n^{-1} \tilde{H}_n$.

Schrijven we

$$D = \frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx}$$

dan is $DH_n = -2n\, H_n$. Het n-de Hermite-polynoom is derhalve een eigenfunktie voor D bij de eigenwaarde $-2n$. De differentiaaloperator D is symmetrisch tav. het inprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Hiermee bedoelen we dat $\langle Df, g \rangle = \langle f, Dg \rangle$ voor voldoend gladde en niet te hard groeiende funkties $f, g : \mathrm{R} \to \mathrm{C}$. Dit zien we het gemakkelijkst in door op te merken dat

$$Df = \frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\frac{df}{dx}\right)$$

en vervolgens tweemaal partieel te integreren. Het snel afnemende gedrag van de $e-$macht zorgt ervoor dat daarbij geen randtermen in $\pm\infty$ optreden. Uit de symmetrie van D volgt dat eigenfunkties f en g bij verschillende reële eigenwaarden λ resp. μ orthogonaal zijn tov. het inprodukt. Immers:

$$(\lambda-\mu)\langle f,g\rangle = \lambda\langle f,g\rangle - \mu\langle f,g\rangle = \langle Df,g\rangle - \langle f,Dg\rangle = 0.$$

In het bijzonder gelden op grond van deze algemene overwegingen de volgende orthogonaliteitsrelaties voor Hermite-polynomen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x)H_m(x)\,dx = 0 \text{ als } n \neq m.$$

Het is nu gebruikelijk de Hermite-polynomen zo te normaliseren dat de coëfficiënt van de hoogste macht positief is, terwijl

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x)^2 dx = 2^n n!\sqrt{\pi}.$$

Probeer zelf aan te tonen dat de volgende *formule van Rodrigues* geldt:

$$H_n(x) = (-1)e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}.$$

18.2 De vergelijking van Legendre

De volgende vergelijking van Legendre:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0 \tag{269}$$

(met $\lambda \in \mathbb{C}$ een constante) heeft reguliere singulariteiten in de punten $x = \pm 1$. Wordt de vergelijking op expliciete gedaante gebracht, dan blijkt dat de coëfficiënten een machtreeksontwikkeling rond $x = 0$ hebben met convergentiestraal minstens 1. Rond nul zijn oplossingen dus voor te stellen als een machtreeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{270}$$

met convergentiestraal minstens 1. Invullen van (270) in (269) geeft de recurrente betrekkingen:

$$a_{m+2} = \frac{m(m+1)-\lambda}{(m+1)(m+2)}\,a_m \qquad (m \geq 0).$$

Door resp. $a_0 = 1, a_1 = 0$ en $a_0 = 0, a_1 = 1$ te kiezen vinden we twee lineair onafhankelijke reeksoplossingen y_1 resp. y_2. Merk op dat y_1 een even en dat y_2 een oneven funktie is. Zolang λ niet gelijk is aan $n(n+1)$ voor enige $n \in \mathbb{N}$, breken de machtreeksen niet af. Met behulp van het quotiëntcriterium valt dan in te zien dat de machtreeksen convergentiestraal precies 1 hebben (doe zelf, en vergelijk dit met de singuliere punten van de differentiaalvergelijking). Is $\lambda = n(n+1)$ voor $n \in \mathrm{N}$, dan breekt precies één van beide machtreeksen af. Na normalisatie met een (later te benoemen) multiplicatieve constante ontstaat zo het Legendre polynoom $P_n(x)$. Schrijven we

$$D = (1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx},$$

dan zien we dat

$$DP_n = -n(n+1)P_n.$$

De operator D kunnen we ditmaal herschrijven als

$$D = \frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx}.$$

Hieruit leiden door partiële integratie af dat D symmetrisch is tov. het inprodukt

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

De factor $(1-x^2)$ zorgt ervoor dat de bij de partiële integratie optredende randtermen geannihileerd worden. We concluderen tenslotte op grond van dezelfde algemene overwegingen als in de vorige paragraaf dat de volgende orthogonaliteitsrelaties voor Legendrepolynomen gelden:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = 0 \text{ als } n \neq m.$$

De normeringsconstanten worden meestal zo gekozen dat

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)^2 dx = \frac{2}{2n+1}$$

en zo dat de coëfficiënt voor de hoogste macht van x in $P_n(x)$ positief is.

Opmerking. De polynomen van Legendre kunnen ook gevonden worden door de oplossingen te ontwikkelen in een omgeving van het regulier singuliere punt $x = 1$. De indexvergelijking is $r^2 = 0$, dus er is een oplossing die op $]-1, 1[$ gegeven wordt door een convergente machtreeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-1)^n.$$

Leidt zelf recurrente betrekkingen voor b_n af en ga na dat de machtreeks afbreekt voor $\lambda = n(n+1), \quad n \in \mathrm{N}$.

18.3 De vergelijking van Laguerre

We beschouwen de naar Laguerre vernoemde vergelijking

$$xy'' + (1-x)y' + \lambda y = 0. \tag{271}$$

Hierin is $\lambda \in \mathrm{C}$ weer een constante. De vergelijking heeft $x = 0$ als reguliere singulariteit. Er is dus een oplossing van de vorm $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}$. Vullen we deze in in (271) dan zien we na vermenigvuldiging met x dat

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)^2 a_n x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda - n - r + 1)a_{n-1}x^{n+r} = 0.$$

Nul stellen van de coëfficiënt van x^r geeft de indexvergelijking $r^2 = 0$, zodat r gelijk moet zijn aan nul. De oplossing is dus voor te stellen door een machtreeks. Nul stellen van de overige coëfficiënten levert de recurrente betrekkingen

$$m^2 a_m = (m - 1 - \lambda)a_{m-1} \qquad (m \geq 1).$$

De machtreeks breekt dus precies dan af als $\lambda = n \in \mathrm{N}$. Het polynoom dat zo ontstaat heet na geschikte normalisatie het Laguerre-polynoom $L_n(x)$. Schrijven we

$$D = x\frac{d^2}{dx^2} + (1-x)\frac{d}{dx}$$

dan is

$$D = e^x \frac{d}{dx} x e^{-x} \frac{d}{dx}.$$

Hieruit volgt dat D symmetrisch is tov. het inprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{\infty} e^{-x} f(x)\overline{g(x)}\, dx.$$

Op grond van de in Paragraaf 18.1 behandelde algemeenheden gelden weer de volgende orthogonaliteitsrealties:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x) L_m(x)\, dx = 0 \qquad (n \neq m).$$

Het is gebruikelijk de Laguerre-polynomen zo te normeren dat de leidende coëfficënt positief is terwijl

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x)^2\, dx = 1.$$

Merk op dat men de Laguerre-polynomen kan verkrijgen door toepassing van het Gramm-Schmid orthogonalisatieproces op de rij $1, x, x^2, \ldots$ tav. het bovenstaande inprodukt.

18.4 De vergelijking van Bessel

De volgende vergelijking van Bessel speelt een belangrijke rol in de potentiaaltheorie en vele andere delen van de theoretische fysica:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + (1 - \frac{\lambda^2}{x^2})y = 0. \tag{272}$$

Hierin is $\lambda \geq 0$ een reële constante. Door de coëfficiënt van y te herschrijven als $x^{-2}(x^2-\lambda^2)$ zien we dat $x = 0$ een regulier singulier punt is. Formele reeksoplossingen van de vorm besproken in Paragraaf 17.1 convergeren op het interval $I =]\,0, \infty[$. De indexvergelijking is $r^2 - \lambda^2 = 0$. Er is derhalve een oplossing van de vorm

$$y(x) = x^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{273}$$

op I met $a_0 \neq 0$. Na geschikte normalisatie (die we verderop zullen specificeren) wordt deze oplossing de Bessel-funktie van de eerste soort en orde λ genoemd, notatie J_λ. Merk op dat $J_\lambda(x)$ een limiet heeft voor $x \downarrow 0$. Voor $\lambda > 0$ is deze nul, voor $\lambda = 0$ is hij gelijk aan a_0.

Door de reeks (273) in te vullen in de Bessel-vergelijking en met x^2 te vermenigvuldigen krijgen we

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[n(n+2\lambda)a_n + a_{n-2}\right] x^{n+r} = 0,$$

waarbij we de notaties $a_{-2} = a_{-1} = 0$ gehanteerd hebben. Dit levert de recurrente betrekkingen

$$a_n = -\frac{1}{n(n+2\lambda)} a_{n-2} \qquad (n \geq 1).$$

Hieruit blijkt dat $a_n = 0$ voor oneven n, terwijl

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{1}{2^{2m} m!} \frac{a_0}{(m+\lambda)(m-1+\lambda)\cdots(1+\lambda)} \qquad (m \geq 1).$$

We merken nu op dat uit $\Gamma(k+\lambda+1) = (k+\lambda)\Gamma(k+\lambda)$ volgt dat

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{a_0 \Gamma(\lambda+1)}{2^{2m} m!\, \Gamma(m+\lambda+1)}.$$

Het is nu gebruikelijk $a_0 = \frac{1}{2^{\lambda}\Gamma(\lambda+1)}$ te kiezen, zodat

$$J_\lambda(x) = x^{\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{\lambda+2m} m!\, \Gamma(m+\lambda+1)}. \tag{274}$$

Bessel-funkties van de tweede soort. Gebruik makend van de in Hoofdstuk 17 behandelde theorie zoeken we nu naar oplossingen van de Bessel-vergelijking die lineair onafhankelijk zijn van J_λ.

Als $2\lambda \notin \mathrm{N}$ dan bestaat er een oplossing van de vorm $y_2(x) = x^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Door invullen in de Bessel-vergelijking ontstaan dezelfde recurente betrekkingen voor de coëfficiënten als de hierboven gevondene, indien men daarin overal λ door

$-\lambda$ vervangt. Als tweede oplossing vinden we zo de Bessel-funktie van de tweede soort, orde $-\lambda$:

$$J_{-\lambda}(x) = x^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{-\lambda+2m} m!\, \Gamma(m-\lambda+1)}. \tag{275}$$

Als 2λ een oneven natuurlijk getal is, dan is $m - \lambda + 1$ nooit een singulier punt voor de Gamma-funktie, zodat de reeks (275) welgedefinieerd is. Invullen in de Bessel-vergelijking leert ons dat de reeks (275) nog steeds een oplossing is. Blijkbaar bevinden we ons in de situatie van Stelling 17.2 met $c = 0$.

Het geval $\lambda = n \in \mathbb{N}$. In dit geval is

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{n+2m}}{2^{n+2m} m!(n+m)!}.$$

De reeks is een machtreeks met convergentiestraal ∞, waaruit we concluderen dat de Bessel-funktie J_n een analytische voortzetting tot het complexe vlak toelaat.

Op grond van Stelling 17.2 is er een van J_n lineair onafhankelijke oplossing van de vorm

$$y_2(x) = cJ_n(x) \log x + x^{-n} \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq 2n}}^{\infty} b_m x^m.$$

Deze ligt vast als we eisen dat $b_0 = 1$. Als Bessel-funktie van de tweede soort, orde n neemt men meestal een lineaire combinatie $Y_n(x)$ van $J_n(x)$ en $y_2(x)$ die een fraai asymptotisch gedrag in oneindig bezit (zie verderop).

Het geval $n = 0$. We beschouwen in het bijzonder het geval $n = 0$. Er geldt dat

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{1}{(2m)^2 \cdot (2m-2)^2 \cdots 1} = \frac{(-1)^m}{2^{2m}(m!)^2},$$

dus

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2 \cdot (1!)^2} + \frac{x^4}{2^4 \cdot (2!)^2} - \cdots.$$

Er is een hiervan lineair onafhankelijke oplossing

$$y_2(x) = J_0(x) \log x + v(x) \quad \text{met} \quad v(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m x^m.$$

Door invullen hiervan in de Bessel vergelijking vinden we

$$x^2 v'' + x v' + x^2 v = -2x J_0'(x)$$

(vgl. met (260)), waaruit weer de recurrente betrekkingen

$$n^2 b_n + b_{n-2} = -a_n \qquad (n \geq 1)$$

volgen (hierbij interpreteren we b_{-1} en b_0 als 0). We concluderen dat $b_n = 0$ voor oneven n. Schrijven we $H_m = (-1)^{m+1}2^{2m}(m!)^2 b_{2m}$, dan volgt uit de recurrente betrekkingen en de gevonden formule voor a_{2m} dat $H_1 = 1$ en $mH_m - mH_{m-1} = 1$. Derhalve is

$$H_m = 1 + \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{n},$$

en

$$y_2(x) = J_0(x)\log x + \sum_{m=1} \frac{(-1)^m H_m}{2^{2m}(m!)^2} x^{2m}.$$

Het is gebruikelijk om voor de tweede onafhankelijke oplossing een lineaire combinatie $Y_0(x)$ van J_0 en y_2 te nemen, namelijk

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[(\gamma - \log 2)J_0(x) + y_0(x)\right],$$

met γ de in Hoofdstuk 3 gedefinieerde constante van Euler. De zo gedefinieerde Y_0 heet de Bessel-funktie van de tweede soort en orde 0.

Asymptotisch gedrag. We onderzoeken het gedrag van oplossingen van de Bessel-vergelijking voor $x \to \infty$. Schrijven we

$$z(x) = \sqrt{x}\, y(x),$$

dan gaat de Bessel-vergelijking over in

$$z'' + \left(1 - \frac{4\lambda^2 - 1}{4x^2}\right) z = 0.$$

Door termen van de orde $\frac{1}{x^2}$ te verwaarlozen als $x \to \infty$ ontstaat de harmonische vergelijking. Men kan aantonen dat iedere oplossing z van de bovenstaande vergelijking benaderd kan worden met een oplossing $A\cos(x+\eta)$ van de harmonische vergelijking:

$$z(x) = A\cos(x+\eta) + \mathcal{O}(\frac{1}{x}) \qquad (x \to \infty).$$

Hieruit volgt voor de oorspronkelijke oplossing y dat

$$y(x) = \frac{A}{\sqrt{x}}\cos(x+\eta) + \mathcal{O}(x^{-\frac{3}{2}}) \qquad (x \to \infty).$$

We concluderen dat Bessel-funkties oscillerende funkties zijn met afnemende amplitude. In het bijzonder hebben ze aftelbaar oneindig veel nulpunten op $]\,0, \infty[$.

Men kan in het bijzonder aantonen dat

$$J_n(x) = (\frac{2}{\pi x})^{\frac{1}{2}} \cos\left(x - \frac{(2n+1)\pi}{4}\right) + \mathcal{O}(x^{-\frac{3}{2}}) \qquad (x \to \infty).$$

Er bestaat precies één tweede oplossing Y_n van de Bessel-vergelijking ($\lambda = n$) met asymptotisch gedrag:

$$Y_n(x) = (\frac{2}{\pi x})^{\frac{1}{2}} \sin\left(x - \frac{(2n+1)\pi}{4}\right) + \mathcal{O}(x^{-\frac{3}{2}}) \qquad (x \to \infty).$$

Het is gebruikelijk om dit de Bessel-funktie van de tweede soort en orde n te noemen.

Opmerking. Als $\lambda^2 = \frac{1}{4}$, dan levert de hierboven besproken transformatie exact de harmonische vergelijking. Men kan laten zien dat

$$\begin{aligned} J_{\frac{1}{2}}(x) &= (\frac{2}{\pi x})^{\frac{1}{2}} \sin x \\ J_{-\frac{1}{2}}(x) &= (\frac{2}{\pi x})^{\frac{1}{2}} \cos x \end{aligned}$$

In het algemeen kunnen Bessel-funkties met $\lambda = n + \frac{1}{2}$, $n \in \mathrm{N}$ uitgedrukt worden in dergelijke elementaire funkties.

Orthogonaliteitsrelaties. Ditmaal houden we $\lambda \geq 0$ vast. Voor $\alpha > 0$ beschouwen we de funktie

$$\Phi_\alpha(x) = J_\lambda(\alpha x).$$

Schrijf

$$D = -\frac{\lambda^2}{x} + \frac{d}{dx} x \frac{d}{dx}.$$

Uit de Bessel-vergelijking voor J_λ volgt dat

$$D\Phi_\alpha = \alpha^2 x \; \Phi_\alpha.$$

Verder volgt, door partiële integratie te gebruiken, dat (voor $0 < \delta < 1$):

$$\int_\delta^1 Df(x)\, g(x)\; dx - \int_\delta^1 f(x)\, Dg(x)\; dx = \left[xf'(x)g(x) - xf(x)g'(x)\right]_\delta^1,$$

voor twee keer continu differentieerbare funkties f en g. Passen we dit toe op $f(x) = \Phi_\alpha$ en $g(x) = \Phi_\beta$, dan vinden we dat

$$(\alpha^2 - \beta^2) \int_\delta^1 xJ_\lambda(\alpha x) J_\lambda(\beta x)\; dx = \left[x(\alpha J_\lambda'(\alpha x) J_\lambda(\beta x) - \beta J_\lambda(\alpha x) J_\lambda'(\beta x))\right]_\delta^1$$

Door de limiet voor $\delta \downarrow 0$ te nemen blijkt tenslotte

Stelling 18.1 *Als $\alpha, \beta > 0$ verschillende nulpunten zijn van J_λ (of van J_λ') dan geldt:*

$$\int_0^1 x\, J_\lambda(\alpha x)\, J_\lambda(\beta x)\; dx = 0.$$

19 Appendix: injectief, surjectief, bijectief

In het dictaat worden regelmatig de termen injectief, surjectief en bijectief gebruikt. Het gaat hier om begrippen die in een zeer algemene situatie gedefinieerd zijn, namelijk de situatie van een afbeelding $f : A \to B$, met A en B verzamelingen (spreek uit: een afbeelding f van A naar B). Door de afbeelding f wordt aan ieder element $a \in A$ precies één element van B toegevoegd, dat genoteerd wordt met $f(a)$.

De afbeelding $f : A \to B$ heet **injectief** indien voor elk tweetal verschillende elementen $a_1, a_2 \in A$ geldt: $f(a_1) \neq f(a_2)$. In woorden: verschillende elementen hebben verschillende beelden. In deze situatie wordt de verzameling A als het ware 'in' B gelegd zonder dat daarbij elementen samen vallen; dit verklaart de naamgeving.

De afbeelding $f : A \to B$ heet **surjectief** (of 'op') indien voor elk element $b \in B$ een element $a \in A$ bestaat met $f(a) = b$. In woorden: ieder element van B treedt op als beeld onder f van een element van A. In deze situatie wordt A door f als het ware 'op' B gelegd (denk aan het Franse 'sur').

Tenslotte heet de afbeelding $f : A \to B$ **bijectief** als f zowel injectief als surjectief is. Dit betekent dat ieder element $b \in B$ optreedt als beeld van een element a dat bovendien uniek door b bepaald is. Dit unieke element wordt dan wel genoteerd met $f^{-1}(b)$; de afbeelding $f^{-1} : B \to A$ heet de **inverse** van de bijectieve afbeelding f. In deze situatie brengt f een zogenaamde 1-1 correspondentie tussen de elementen van A en B tot stand. Met $a \in A$ correspondeert het element $f(a) \in B$; met $b \in B$ correspondeert het element $f^{-1}(b)$ van A.

Voorbeelden.

(1) De funktie $f : x \mapsto x^2, \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ is niet injectief. Immers er geldt $f(-1) = 1 = f(1)$. Anderzijds is de beperking $g = f|_{[0,\infty[}$ van f wel injectief. Immers uit $x_1, x_2 \geq 0$ en $f(x_1) = f(x_2)$ volgt $x_1 = x_2$.

(2) De funktie $f : x \mapsto x^2, \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ is niet surjectief. Immers er is geen $x \in \mathrm{R}$ met $x^2 = -1$. Merk op dat de funktie $g : \mathrm{C} \to \mathrm{C},\ z \mapsto z^2$ wel surjectief is. Immers voor iedere $z \in \mathrm{C}$ bestaat een $w \in \mathrm{C}$ met $w^2 = z$.

(3) De funktie $f : x \mapsto e^x, \mathrm{R} \to]0, \infty[$ is bijectief. Immers, uit $e^{x_1} = e^{x_2}$ volgt dat $x_1 = x_2$, dus f is injectief. Verder bestaat er voor iedere $y \geq 0$ een $x \in \mathrm{R}$ zo dat $e^x = y$, dus f is surjectief.

Merk op dat de inverse f^{-1} van de funktie f gelijk is aan de logarithmische funktie $\log :]0, \infty[\to \mathrm{R}$.

20 Opgaven

21 Literatuur