Leeswijzer

Analyse B-2

E.P. van den Ban

Mathematisch Instituut
Universiteit Utrecht
Voorjaar 1994

1 Oneigenlijke integralen

1.1 Continuïteit en differentieerbaarheid

Bestudeer §8.1 t/m 8.5 uit het Analyse B diktaat. §8.6 wordt bij Analyse B-1 behandeld, en §8.7 slaan we over.

De belangrijke stellingen in de te bestuderen paragrafen zijn Stellingen B.8.3.1, B.8.4.1 en B.8.5.1. Voor de meeste toepassingen in de Analyse zijn uitbreidingen van deze stellingen naar oneigenlijke Riemann-integralen nodig. Zulke uitbreidingen zullen we in het onderstaande behandelen.

Zij J een interval van de vorm $[c, d[$ met $c \in \mathbf{R}$, $d \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ en $c < d$. (Intervallen van de vorm $]c, d]$ met $c \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, $d \in \mathbf{R}$ en $c < d$ worden op soortgelijke wijze behandeld.)

We brengen de definitie van oneigenlijk Riemann integreerbare funkties op J in herinnering alsmede hun (oneigenlijke) integralen. Het zal handig zijn daarbij de notatie $\mathcal{R}_{\mathrm{loc}}(J)$ te gebruiken voor de ruimte van funkties $f : J \to \mathbf{R}$ die Riemann-integreerbaar zijn op iedere gesloten en begrensd deelinterval $[c, p] \subset J$. We zeggen dat de integraal van $f \in \mathcal{R}_{\mathrm{loc}}(J)$ op J convergeert als de limiet van $\int_c^p f(t)\, dt$ bestaat voor $p \uparrow d$. In dat geval noteren we

$$\int_c^d f(t)\, dt = \lim_{p \uparrow d} \int_c^p f(t)\, dt.$$

We zeggen dat de integraal absoluut convergeert als

$$\int_c^d |f(t)|\, dt$$

convergeert. De ruimte van absoluut integreerbare funkties $f \in \mathcal{R}_{\mathrm{loc}}(J)$ noteren we met $\mathcal{R}^1(J)$.

Het volgende resultaat is reeds bij Analyse A behandeld, zie Stelling A.5.6.3.

Stelling 1.1 (Majorantie criterium). *Laat $f, g \in \mathcal{R}_{\mathrm{loc}}(J)$, en veronderstel dat $|f(t)| \leq g(t)$ voor alle $t \in J$. Als $\int_J g(t)\, dt$ convergent is, dan is ook $\int_J f(t)\, dt$ convergent, en bovendien geldt dan de schatting:*

$$|\int_c^d f(t)\, dt| \leq \int_c^d g(t)\, dt.$$

Opmerking 1.2 Strikt genomen is de bovenstaande stelling bij Analyse A alleen behandeld in het geval dat $d = \infty$. In het geval $d < \infty$ wordt de stelling op geheel analoge wijze bewezen.

Voorbeeld 1.3 Beschouw de integraal

$$\int_0^\infty (1+t)^n e^{-t}\, dt. \tag{1}$$

De funktie $f : t \mapsto (1+t)^n e^{-t}$ is continu op het interval $J = [0, \infty[$, dus behoort tot $\mathcal{R}_{\mathrm{loc}}(J)$. Er geldt dat $\lim_{t\to\infty}(1+t)^n e^{-\frac{1}{2}t} = 0$ (ga na!), dus er bestaat een $R > 0$ zo dat $t \geq R \Rightarrow (1+t)^n e^{-\frac{1}{2}t} \leq 1$. Voor $t \geq R$ geldt dus ook dat $|f(t)| \leq e^{-\frac{1}{2}t}$. Omdat $\int_R^\infty e^{-\frac{1}{2}t}\, dt$ convergent is volgt nu door toepassing van het majorantie criterium dat $\int_R^\infty f(t)\, dt$ convergent is. Derhalve is ook de integraal (1) convergent.

Voorbeeld 1.4 Beschouw de integraal

$$\int_0^1 \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\, dt. \tag{2}$$

De funktie $f : t \mapsto \cos t/\sqrt{t}$ is continu op $]0,1]$ dus behoort tot $\mathcal{R}_{\mathrm{loc}}(]0,1])$. Voor alle $t \in]0,1]$ geldt $|f(t)| \leq 1/\sqrt{t}$. De integraal $\int_0^1 1/\sqrt{t}\, dt$ is convergent, dus op grond van het majorantie criterium is ook (2) convergent.

Gevolg 1.5 *Zij $f \in \mathcal{R}_{\mathrm{loc}}(J)$. Dan volgt uit de absolute convergentie van de integraal $\int_c^d f(t)\, dt$ zijn convergentie. Bovendien geldt in geval van absolute convergentie de volgende schatting:*

$$|\int_c^d f(t)\, dt| \leq \int_c^d |f(t)|\, dt.$$

Bewijs. Pas de voorgaande stelling toe met $g(t) = |f(t)|$. □

Na het bovenstaande kunnen we natuurlijke uitbreidingen van Stellingen B.8.3.1 en B.8.4.1 naar oneigenlijke integralen behandelen.

In het vervolg is $J = [c, d[$ als voorheen, en we schrijven $I = [a, b]$, met $a, b \in \mathbf{R},\ a < b$. We noteren de variabele in I met x, en die in J met t. Is $f : I \times J \to \mathbf{R}$ een funktie, dan schrijven we gemakshalve wel f_x voor de funktie $J \to \mathbf{R}$ die gedefinieerd wordt door $f_x(t) = f(x, t)$. Het cruciale idee van de volgende stelling is de hypothese dat de f_x uniform gemajoreerd worden door een Riemann-integreerbare funktie.

Stelling 1.6 *Laat $f : I \times J \to \mathbf{R}$ een continue funktie zijn en veronderstel dat er een $g \in \mathcal{R}_{\mathrm{loc}}(J)$ bestaat zo dat*

$$|f(x,t)| \leq g(t), \qquad (x,t) \in I \times J.$$

Veronderstel bovendien dat $\int_J g(t)\, dt$ convergeert. Dan convergeert de integraal $\int_J f_x(t)\, dt$ voor iedere $x \in I$, en bovendien is de funktie

$$F :\ x \mapsto \int_c^d f(x,t)\, dt$$

continu op I.

Bewijs. Voor iedere $x \in I$ is de funktie f_x continu, dus element van $\mathcal{R}_{\mathrm{loc}}(J)$. Door toepassing van Stelling 1.1 volgt dat de integraal $\int_J f_x(t)\, dt$ convergent is voor iedere $x \in I$.

Is $r \in J$ dan schrijven we

$$F_r(x) = \int_c^r f(x,t)\, dt, \quad R_r(x) = \int_r^d f(x,t)\, dt.$$

Dan geldt dat $F = F_r + R_r$.

Fixeer een punt $x_0 \in I$ en zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Dan is er een $r \in J$ zo dat

$$\int_r^d g(t)\, dt < \tfrac{1}{3}\varepsilon. \tag{3}$$

Door toepassing van Stelling 1.1 volgt hieruit dat

$$|R_r(x)| = |\int_r^d f(x,t)\ dt| \le \tfrac{1}{3}\varepsilon, \qquad x \in I.$$

Uit Stelling B.8.3.1 volgt dat de funktie F_r continu is op I, dus in het bijzonder in x_0. Derhalve bestaat er een $\delta > 0$ zo dat voor alle $x \in B(x_0,\delta) \cap I$ geldt:

$$|F_r(x) - F_r(x_0)| < \tfrac{1}{3}\varepsilon.$$

Door combinatie van de zo verkregen schattingen verkrijgen we voor elke $x \in B(x_0,\delta) \cap I$ de schatting:

$$\begin{aligned} |F(x) - F(x_0)| &= |F_r(x) - F_r(x_0) + R_r(x) + (-R_r(x_0))| \\ &\le |F_r(x) - F_r(x_0)| + |R_r(x)| + |R_r(x_0)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Hieruit volgt de continuïteit van F in x_0. □

Voorbeeld 1.7 Beschouw voor $x \ge 0$ de integraal

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{\sqrt{x+t}}{1+t^4}\ dt. \tag{4}$$

De funktie $f : (x,t) \mapsto \sqrt{x+t}/(1+t^4)$ is continu op $[0,\infty[\times[0,\infty[$ dus op iedere verzameling van de vorm $I \times [0,\infty[$, met $I = [0,b]$ een gesloten en begrensd interval. Voor alle $(x,t) \in I \times [0,\infty[$ geldt dat $|f(x,t)| \le g(t) := \sqrt{b+t}/(1+t^4)$. Omdat de integraal $\int_0^\infty g(t)\ dt$ convergent is (laat dit zien door het majorantie criterium te gebruiken), concluderen we met behulp van Stelling 1.6 dat door de integraal (4) een continue funktie $F : I \to \mathbf{R}$ gedefinieerd wordt. Dit geldt voor ieder gesloten en begrensd interval I van de vorm $[0,b]$, dus F is continu op $[0,\infty[$.

Ook bij de volgende stelling speelt uniforme majorantie een voorname rol.

Stelling 1.8 *Laat $f : I \times J \to \mathbf{R}$ een funktie zijn, zo dat voor iedere $x \in I$ de funktie f_x tot $\mathcal{R}_{\mathrm{loc}}(J)$ behoort en een convergente integraal heeft over J. Veronderstel verder dat de partiële afgeleide $\frac{\partial}{\partial x}f$ bestaat en continu is op $I \times J$, en dat er een funktie $g \in \mathcal{R}_{\mathrm{loc}}(J)$ bestaat met*

(a) *voor alle $(x,t) \in I \times J$ geldt $|\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)| \le g(t)$;*
(b) *de integraal $\int_J g(t)\ dt$ is convergent.*

Dan is de funktie $F :\ x \mapsto \int_J f(x,t)\ dt$ differentieerbaar en er geldt:

$$\frac{d}{dx}\int_c^d f(x,t)\ dt = \int_c^r \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ dt.$$

Bewijs. We gebruiken de notaties F, F_r, R_r uit het bewijs van de voorgaande stelling. Wegens Stelling 1.1 geldt voor iedere $x \in I$ dat de funktie $t \mapsto \partial f/\partial x(x,t)$ oneigenlijk Riemann integreerbaar over J is. We definiëren de funktie $\varphi : I \to \mathbf{R}$ door:

$$\varphi(x) = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ dt.$$

Verder definiëren we voor $r \in J$ de funkties $\varphi_r, \rho_r : I \to \mathbf{R}$ door:

$$\varphi_r(x) = \int_c^r \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt, \quad \rho_r(x) = \int_r^d \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt.$$

Dan is

$$\varphi = \varphi_r + \rho_r.$$

Fixeer $x_0 \in I$. Dan geldt voor elke $r \in J$ en voor $x \in I$ dat:

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - \varphi(x_0) = \left[\frac{F_r(x) - F_r(x_0)}{x - x_0} - \varphi_r(x_0)\right] + \frac{R_r(x) - R_r(x_0)}{x - x_0} - \rho_r(x_0). \qquad (5)$$

Verderop zullen we het linkerlid van de bovenstaande ongelijkheid schatten door de driehoeksongelijkheid toe te passen op het rechterlid. Als voorbereiding schatten we de drie termen van het rechterlid van (5).

Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Kies $r \in J$ zo dat wederom aan de schatting (3) voldaan wordt. Dan geldt dat

$$|\rho_r(x_0)| = \left|\int_r^d \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\, dt\right| \leq \int_r^d g(t)\, dt < \tfrac{1}{3}\varepsilon. \qquad (6)$$

Bovendien geldt wegens de middelwaardestelling dat voor $t \in [r,d[$ en voor $x \in I$ een tussen x_0 en x gelegen $\xi_{x,t} \in I$ bestaat zo dat $f(x,t) - f(x_0,t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi_{x,t},t)\,(x - x_0)$. Hieruit volgt dat

$$\left|\frac{f(x,t) - f(x_0,t)}{x - x_0}\right| \leq g(t)$$

voor alle $(x,t) \in I \times J$, en daarom:

$$\left|\frac{R_r(x) - R_r(x_0)}{x - x_0}\right| = \left|\int_r^d \frac{f(x,t) - f(x_0,t)}{x - x_0}\, dt\right| < \tfrac{1}{3}\varepsilon. \qquad (7)$$

Tenslotte geldt op grond van Stelling B.8.4.1 dat de funktie F_r differentieerbaar is met afgeleide φ_r. Daarom bestaat er een $\delta > 0$ zo dat voor alle $x \in B(x_0,\delta) \cap I$ geldt:

$$\left|\frac{F_r(x) - F_r(x_0)}{x - x_0} - \varphi(x_0)\right| < \tfrac{1}{3}\varepsilon. \qquad (8)$$

Door de driehoeksongelijkheid en de schattingen (6) en (7) en (8) toe te passen op het rechterlid van (5) zien we tenslotte dat voor alle $x \in B(x_0,\delta) \cap I$ geldt:

$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - \varphi(x_0)\right| < \varepsilon.$$

Hieruit blijkt dat F differentieerbaar is in x_0, met afgeleide $\varphi(x_0)$. $\square$

Voorbeeld 1.9 We beschouwen nogmaals de funktie F gedefinieerd in Voorbeeld 1.7. Zij f als in dat voorbeeld. Dan is:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{x+t}}\frac{1}{(1+t^4)}.$$

Zij $0 < a < b$. Dan ziet men gemakkelijk dat voor alle $(x,t) \in [a,b] \times [0,\infty[$ geldt:

$$|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)| \leq \frac{1}{2\sqrt{a}} \frac{1}{1+t^4}. \tag{9}$$

Het rechterlid van de bovenstaande ongelijkheid is oneigenlijk Riemann integreerbaar op het interval $[0,\infty[$. Op grond van Stelling 1.8 concluderen we derhalve dat F differentieerbaar is op $[a,b]$ met afgeleide

$$F'(x) = \int_0^\infty \frac{1}{2\sqrt{x+t}} \frac{1}{(1+t^4)}\, dt. \tag{10}$$

Dit geldt voor alle $0 < a < b$, dus (10) geldt op $]0,\infty[$.

Tenslotte onderzoeken we de geldigheid van (10) in $x = 0$. Substitueren we $x = 0$ dan wordt het rechterlid van (10) ook oneigenlijk t.o.v. de grens 0. Daarom splitsen we de integraal voor F. We schrijven $F_1(x) = \int_0^1 f(x,t)\, dt$ en $F_2(x) = \int_1^\infty f(x,t)\, dt$, zodat $F = F_1 + F_2$. We onderzoeken eerst de differentieerbaarheid van F_1. Uit (9) blijkt dat voor alle $(x,t) \in [0,\infty[\times]0,1]$ de schatting

$$|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)| \leq \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

geldt. De funktie in het rechterlid behoort tot $\mathcal{R}^1(]0,1])$ en er volgt dat F_1 differentieerbaar op $[0,\infty[$ is met afgeleide $F_1'(x) = \int_0^1 \partial f/\partial x(x,t)\, dt$.

Tenslotte onderzoeken we de differentieerbaarheid van F_2. Uit (9) leiden we af dat voor alle $(x,t) \in [0,\infty[\times[1,\infty[$ de schatting

$$|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)| \leq \frac{1}{2(1+t^4)}$$

geldt. De funktie in het rechterlid is oneigenlijk integreerbaar over $[1,\infty[$ en we concluderen weer dat F_1 differentieerbaar is op $[0,\infty[$ met afgeleide $\int_1^\infty \partial f/\partial x(x,t)\, dt$.

Door deze conclusies voor F_1 en F_2 te combineren zien we dat F differentieerbaar is op $[0,\infty[$. De afgeleide in 0 wordt gegeven door:

$$F'(0) = \int_0^\infty \frac{1}{2\sqrt{t}(1+t^4)}\, dt,$$

waarbij de integraal oneigenlijk is met betrekking tot de grenzen 0 en ∞.

1.2 Verwisseling van de integratievolgorde

We veronderstellen dat $I = [a,b[$ en $J = [c,d[$, met $a,c \in \mathbf{R}$, $b,d \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ en $a < b$, $c < d$. Dan hebben we de volgende uitbreiding van Stelling B.8.5.1 naar oneigenlijke integralen.

Stelling 1.10 *Laat $f : I \times J \to \mathbf{R}$ een continue funktie zijn, en veronderstel dat er funkties $\varphi \in \mathcal{R}^1(I)$ en $\psi \in \mathcal{R}^1(J)$ bestaan, zo dat*

$$|f(x,y)| \leq |\varphi(x)\psi(y)| \qquad (x,y \in I \times J). \tag{11}$$

Dan behoort de funktie $x \mapsto f(x,y)$ tot $\mathcal{R}^1(I)$, voor iedere $y \in J$, terwijl de funktie

$$y \mapsto \int_a^b f(x,y)\, dx$$

tot $\mathcal{R}^1(J)$ behoort. Evenzo behoort de funktie $y \mapsto f(x,y)$ tot $\mathcal{R}^1(J)$, voor iedere $x \in I$, terwijl de funktie

$$x \mapsto \int_c^d f(x,y)\,dy$$

tot $\mathcal{R}^1(I)$ behoort. Tenslotte geldt:

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

Bewijs. Voor vaste $x \in I$ voldoet de funktie $f_x : y \mapsto f(x,y)$ aan de schatting $|f_x| \le |\varphi(x)|\psi$ op J. Wegens Stelling 1.1 volgt nu dat de integraal $F(x) = \int_J f(x,y)\,dy$ convergeert voor iedere $x \in I$.

Zij I_0 een gesloten en begrensd deelinterval van I. Uit de continuïteit van φ volgt dat er een $C > 0$ bestaat zo dat $|\varphi(x)| \le C$ voor alle $x \in I_0$. Door toepassing van Stelling 1.6 op f beperkt tot $I_0 \times J$ volgt nu dat F continu is op I_0. Dit geldt voor ieder gesloten en begrensd deelinterval I_0 : derhalve is F continu op I. In het bijzonder is $F \in \mathcal{R}_{\rm loc}(I)$.

Zij $C_\psi = \int_J |\psi(y)|\,dy$. Dan volgt uit (11) dat

$$|F(x)| \le C_\psi |\varphi(x)|$$

voor alle $x \in I$. Wegens Stelling 1.1 volgt hieruit dat $F \in \mathcal{R}^1(I)$. Zij $C_\varphi = \int_I |\varphi(x)|\,dx$. Dan wordt op geheel analoge wijze bewezen dat $G(y) = \int_I f(x,y)\,dx$ een funktie $G \in \mathcal{R}^1(J)$ definieert, terwijl $|G(y)| \le C_\varphi |\psi(y)|$ voor alle $y \in J$.

Voor de voltooiing van het bewijs moeten we nog aantonen dat

$$\int_a^b F(x)\,dx = \int_c^d G(y)\,dy.$$

Dit doen we door herleiding tot Stelling B.8.5.1. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Wegens het nul zijn van de limieten $\lim_{p\uparrow b} \int_p^b |\varphi(x)|\,dx$ en $\lim_{q\uparrow d} \int_q^d |\psi(y)|\,dy$ bestaan er $p \in [a,b[$ en $q \in [c,d[$ zo dat:

$$\int_p^b |\varphi(x)|\,dx < \varepsilon, \quad \int_q^d |\psi(y)|\,dy < \varepsilon.$$

Hieruit volgt dat:

$$\left|\int_a^b F(x)\,dx - \int_a^p F(x)\,dx\right| = \left|\int_p^b F(x)\,dx\right| \le \int_p^b C_\psi|\varphi(x)|\,dx \le \varepsilon C_\psi. \tag{12}$$

Anderzijds geldt:

$$\left|F(x) - \int_c^q f(x,y)\,dy\right| = \left|\int_q^d f(x,y)\,dy\right| \le \int_q^d |\varphi(x)\psi(y)|\,dy \le \varepsilon\,|\varphi(x)|,$$

zodat:

$$\left|\int_a^p F(x)\,dx - \int_a^p \int_c^q f(x,y)\,dy\,dx\right| \le \varepsilon \int_a^p |\varphi(x)|\,dx \le \varepsilon C_\varphi. \tag{13}$$

Door combinatie van (12) en (13) volgt tenslotte dat:

$$\left|\int_a^b F(x)\,dx - \int_a^p \int_b^q f(x,y)\,dy\,dx\right| \le \varepsilon\,(C_\varphi + C_\psi). \tag{14}$$

Op geheel analoge wijze leiden we af dat

$$\left| \int_c^d G(y)\, dy - \int_b^q \int_a^p f(x,y)\, dx\, dy \right| \leq \varepsilon\, (C_\varphi + C_\psi). \tag{15}$$

Uit Stelling B.8.5.1 volgt dat

$$\int_a^p \int_b^q f(x,y)\, dy\, dx = \int_b^q \int_a^p f(x,y)\, dx\, dy.$$

Combineren we dit met (14) en (15) dan zien we dat:

$$\left| \int_a^b F(x)\, dx - \int_c^d G(y)\, dy \right| \leq 2\varepsilon\, (C_\varphi + C_\psi).$$

De bovenstaande ongelijkheid geldt voor willekeurige $\varepsilon > 0$. Derhalve is de uitdrukking in het linkerlid van de ongelijkheid gelijk aan nul. $\square$

Voorbeeld 1.11 Voor een voorbeeld van een toepassing van de bovenstaande stelling verwijzen we de lezer naar Opgave $E_2 - 5$ en naar de toepassingen in de paragraaf over Fourier transformatie.

1.3 Complexwaardige integralen

We brengen in herinnering dat $\mathbf{C}$ gelijk is aan $\mathbf{R}^2$ voorzien van de complexe vermenigvuldiging. We noteren de variabele in $\mathbf{C}$ met $z = x + iy = (x, y)$. Een funktie $f : \mathbf{R}$ æ $\mathbf{C}$ is dus in het bijzonder een funktie $\mathbf{R}$ æ $\mathbf{R}^2$. De in Hoofdstuk 6 gegeven definities van limieten en continuïteit hebben in het bijzonder betrekking op funkties $\mathbf{R}$ æ $\mathbf{C}$.

Ontbinden we de funktie $f : \mathbf{R}$ æ $\mathbf{C}$ in componenten: $f = (f_1, f_2)$, dan is $f_1 = \mathrm{Re}\, f$ en $f_2 = \mathrm{Im}\, f$. Zij $a \in \mathrm{Dom}(f)$. Wegens Gevolg B.6.4.3 is f continu in a dan en slechts dan als $\mathrm{Re}\, f$ en $\mathrm{Im}\, f$ continu in a zijn.

We bekijken nu hoe componentname zich verhoudt tot differentiëren en integreren. Laat $p \in \mathbf{N}$ zijn, $I \subset \mathbf{R}$ een interval, en $a \in I$. Een funktie $f : I \to \mathbf{R}^p$ heet differentieerbaar in a als

$$\lim_{t \to a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$

bestaat. In dat geval noteren we de limiet met $f'(a)$. Merk op dat $f'(a) \in \mathbf{R}^p$. Merk voorts op dat f differentieerbaar is in a dan en slechts dan als f richtingsdifferentieerbaar is in a in de richting $v = 1$. In geval van differentieerbaarheid geldt bovendien $f'(a) = \partial_1 f(a)$.

Door toepassing van Stelling B.6.12.1 met $n = 1$ en $v = 1$ volgt nu:

Gevolg 1.12 *Zij $I \subset \mathbf{R}$ een interval en $a \in I$. Een funktie $f : I \to \mathbf{R}^p$ is differentieerbaar in a dan en slechts dan als iedere component f_j $(1 \leq j \leq p)$ differentieerbaar is in a. In dat geval geldt:*

$$f'(a) = (f_1'(a), \ldots, f_p'(a)).$$

Door toepassing van het bovenstaande gevolg met $p = 2$ zien we dat een funktie $f : I \to \mathbf{C}$ differentieerbaar in a is dan en slechts dan als $\mathrm{Re}\, f$ en $\mathrm{Im}\, f$ differentieerbaar in a zijn.

Gemotiveerd door het bovenstaande behandelen we integreerbaarheid van vectorwaardige funkties als volgt.

Definitie 1.13 Zij $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. Een funktie $f : [a,b] \to \mathbf{R}^p$ heet Riemann-integreerbaar op $[a,b]$ als iedere component f_j $(1 \le j \le p)$ tot $\mathcal{R}([a,b])$ behoort. Is f Riemann-integreerbaar op $[a,b]$ dan definiëren we de integraal van f over het interval $[a,b]$ door

$$\int_a^b f(x)\, dx := (\int_a^b f_1(x)\, dx, \ldots, \int_a^b f_p(x)\, dx).$$

De ruimte van Riemann-integreerbare funkties $[a,b] \to \mathbf{R}^p$ noteren we met $\mathcal{R}([a,b], \mathbf{R}^p)$.

Door toepassing van het bovenstaande met $p = 2$ zien we dat een funktie $f : [a,b] \to \mathbf{C}$ Riemann-integreerbaar op $[a,b]$ is als $\operatorname{Re} f$ en $\operatorname{Im} f$ Riemann-integreerbaar op $[a,b]$ zijn. Bovendien geldt in geval van integreerbaarheid dat:

$$\operatorname{Re} \int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b \operatorname{Re} f(x)\, dt.$$

$$\operatorname{Im} \int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b \operatorname{Im} f(x)\, dt.$$

Na de bovenstaande definitie gaat de Hoofdstelling van de integraalrekening (Stelling A.4.4.4) door voor vectorwaardige funkties:

Stelling 1.14 *Laat $f : [a,b] \to \mathbf{R}^p$ een continue funktie zijn. Dan heeft f een primitieve op $[a,b]$ (d.w.z. een differentieerbare funktie $F : [a,b] \to \mathbf{R}^p$ met $F' = f$), n.l. de funktie $t \mapsto \int_a^t f(s)\, ds$. D.w.z.*

$$\frac{d}{dt} \int_a^t f(s)\, ds = f(t) \quad (t \in [a,b]).$$

Als $F : [a,b] \to \mathbf{R}^p$ een willekeurige primitieve van f op $[a,b]$ is dan geldt:

$$\int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a).$$

Bewijs. Het bewijs bestaat uit toepassing van Stelling A.4.4.4 op de componenten van f.
□

Voorbeeld 1.15 We definiëren de funktie $t \mapsto e^{it}$, $\mathbf{R} \to \mathbf{C}$ door

$$e^{it} = \cos t + i \sin t. \tag{16}$$

Zij $a \in \mathbf{R}$. Dan ziet men door ontbinding in componenten gemakkelijk in dat:

$$\frac{d}{dt} e^{iat} = iae^{iat}$$

Uiteraard is deze formule een belangrijke motivatie voor de in (16) gegeven definitie. Door gebruik te maken van de bovenstaande stelling leiden we af dat

$$\int_p^q e^{iat}\, dt = \frac{e^{iaq} - e^{iap}}{ia},$$

als $a \neq 0$. Uiteraard kan de bovenstaande formule ook bewezen worden door onbinding van de integralen in reëel en imaginair deel.

Iets lastiger te bewijzen is de generalisatie van de driehoeksongelijkheid. We beginnen met een tweetal lemmas.

Lemma 1.16 *Zij $f : [a,b] \to \mathbf{R}^p$ een Riemann-integreerbare funktie. Dan is ook de funktie $\|f\| : [a,b] \to \mathbf{R},\ t \mapsto \|f(t)\|$ Riemann-integreerbaar.*

Bewijs. Zij $\varepsilon > 0$ is willekeurig. Dan is het wegens Stelling A.4.3.1 voldoende aan te tonen dat er een verdeling V van het interval $[a,b]$ bestaat zo dat

$$\overline{S}(\|f\|, V) < \underline{S}(\|f\|, V) + \varepsilon.$$

Per definitie is iedere component f_j van f integreerbaar, dus er bestaat voor iedere $1 \le j \le p$ een verdeling V_j van $[a,b]$ zo dat $\overline{S}(f_j, V_j) < \underline{S}(f_j, V_j) + \varepsilon/p$. We zullen laten zien dat de vereiste schatting geldt voor de gemeenschappelijke verfijning V van de V_j, $1 \le j \le p$.

Zij $D \subset [a,b]$ een gesloten en begrensd interval. Dan geldt voor alle $s, t \in D$ dat

$$\|f(s)\| \le \|f(t)\| + \|f(s) - f(t)\| \le \|f(t)\| + \sum_{j=1}^{p} |f_j(s) - f_j(t)|. \tag{17}$$

Voor alle $s, t \in D$ geldt: $f_j(s) - f_j(t) \le \sup_D f_j - \inf_D f_j$ en ook $f_j(t) - f_j(s) \le \sup_D f_j - \inf_D f_j$. Derhalve geldt voor alle $s, t \in D$ dat $|f_j(s) - f_j(t)| \le \sup_D f_j - \inf_D f_j$. Combineren we dit met (17), dan zien we dat:

$$\|f(s)\| \le \|f(t)\| + \sum_{j=1}^{p} (\sup_D f_j - \inf_D f_j).$$

Hieruit volgt dat voor alle $s \in D$ geldt:

$$\|f(s)\| \le \inf_D \|f\| + \sum_{j=1}^{p} (\sup_D f_j - \inf_D f_j)$$

en tenslotte volgt dat:

$$\sup_D \|f\| \le \inf_D \|f\| + \sum_{j=1}^{p} (\sup_D f_j - \inf_D f_j).$$

Passen we het bovenstaande toe op de intervallen D van de verdeling V, dan vinden we dat voor de onder- en bovensom van $\|f\|$ t.a.v. V geldt:

$$\overline{S}(\|f\|, V) \le \underline{S}(\|f\|, V) + \sum_{j=1}^{p} (\overline{S}(f_j, V) - \underline{S}(f_j, V)) < \underline{S}(\|f\|, V) + \varepsilon.$$

□

Lemma 1.17 *Zij $f : [a,b] \to \mathbf{R}^p$ een Riemann-integreerbare funktie zijn en $A : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^p$ een lineaire afbeelding. Dan is $A \circ f : t \mapsto A(f(t)),\ [a,b] \to \mathbf{R}^p$ een Riemann-integreerbare funktie, en er geldt:*

$$A[\int_a^b f(t)\, dt] = \int_a^b A[f(t)]\, dt. \tag{18}$$

Bewijs. Zij (A_{ij}) de matrix van A t.o.v. de standaard basis van $\mathbf{R}^p$. Is $v \in \mathbf{R}^p$, dan wordt de j–de component van Av gegeven door: $(Av)_j = \sum_{i=1}^{p} A_{ij} v_i$. Passen we dit toe met

$v = \int_a^b f(t)\, dt$, dan zien we dat de j–de component van het linkerlid van (18) gegeven wordt door:

$$\left(A[\int_a^b f(t)\, dt]\right)_j = \sum_{i=1}^{p} A_{ij} \int_a^b f_i(t)\, dt = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{p} A_{ij} f_i(t)\right)\, dt = \int_a^b (A[f(t)])_j\, dt.$$

De laatste uitdrukking is precies de j–de component van het rechterlid van (18). $\square$

Stelling 1.18 *Laat $f : [a,b] \to \mathbf{R}^p$ een Riemann-integreerbare funktie zijn. Dan is de funktie $\|f\| : [a,b] \to \mathbf{R}$ Riemann-integreerbaar, en er geldt:*

$$\| \int_a^b f(t)\, dt\| \leq \int_a^b \|f(t)\|\, dt.$$

Bewijs. Er is een orthogonale lineaire afbeelding $A : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^p$ die de vector $v = \int_a^b f(t)\, dt$ afbeeldt op een veelvoud ce_1 van de eerste standaard basis vector van $\mathbf{R}^p$, met $c \geq 0$. Uit de orthogonaliteit van A volgt: $c = \|ce_1\| = \|Av\| = \|v\|$. Derhalve geldt:

$$\begin{aligned} \|v\| = c &= (Av)_1 = (A \int_a^b f(t)\, dt)_1 = (\int_a^b A[f(t)]\, dt)_1 \\ &= \int_a^b (A[f(t)])_1\, dt \leq \int_a^b \|A[f(t)]\|\, dt = \int_a^b \|f(t)\|\, dt. \end{aligned}$$

In het bovenstaande is bij de vierde gelijkheid Lemma 1.17 gebruikt. De vijfde gelijkheid geldt per definitie, en bij de ongelijkheid is gebruikt dat voor iedere vector $w \in \mathbf{R}^p$ geldt: $w_1 \leq \|w\|$. $\square$

Toepassing van Stelling 1.18 met $p = 2$ geeft, voor een Riemann-integreerbare funktie $f : [a,b] \to \mathbf{C}$ dat:

$$| \int_a^b f(t)\, dt| \leq \int_a^b |f(t)|\, dt.$$

Opmerking 1.19 Na het bovenstaande is het eenvoudig om alle definities en resultaten van §1.1 uit te breiden tot funkties met waarden in $\mathbf{C}$ in plaats van $\mathbf{R}$. In het vervolg zullen we vrijelijk van die uitbreidingen gebruik maken.

1.4 Toepassing: Fourier-transformatie

Zij $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ een continue funktie waarvoor de integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$$

convergeert. Voor alle $t \in \mathbf{R}$ geldt: $|e^{it}| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$. Dus voor alle $\xi \in \mathbf{R}$ geldt $|e^{-i\xi x} f(x)| = |f(x)|$, en we zien dat de integraal

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x}\, dx$$

absoluut convergent is en een funktie $\widehat{f} : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ definieert. Deze funktie heet de Fourier-getransformeerde van f. Door toepassing van Stelling 1.6 en Stelling 1.1 zien we direkt:

Lemma 1.20 *Zij $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ een continue funktie waarvoor de integraal over $\mathbf{R}$ absoluut convergeert. Dan is de funktie $\widehat{f}$ begrensd en continu.*

Doel van deze paragraaf is de volgende stelling te bewijzen.

Stelling 1.21 (Fourier-inversie). *Laat $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ een continue funktie zijn die een absoluut convergente integraal over $\mathbf{R}$ heeft. Veronderstel bovendien dat $\widehat{f}$ een absoluut convergente integraal over $\mathbf{R}$ heeft. Dan geldt voor alle $x \in \mathbf{R}$ dat:*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, e^{i\xi x}\, d\xi. \tag{19}$$

Opmerking 1.22 De formule in de bovenstaande stelling staat bekend als de Fourier-inversieformule. Hij drukt uit dat een geschikte funktie te schrijven is als superpositie van de elementaire *trillingen* $x \mapsto e^{i\xi x} = \cos(\xi x) + i \sin(\xi x)$ over de *frequentie variabele* ξ. Hierbij wordt de *amplitude* gegeven door $(2\pi)^{-1}\widehat{f}$.

Is de funktie f reëelwaardig, dan ziet men gemakkelijk in dat

$$\operatorname{Re} \widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\xi x)\, dx, \quad \operatorname{Im} \widehat{f}(\xi) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(\xi x)\, dx.$$

Hieruit blijkt dat $\operatorname{Re} \widehat{f}$ een even funktie is, d.w.z. $\operatorname{Re} \widehat{f}(-\xi) = \operatorname{Re} \widehat{f}(\xi)$ voor alle $\xi \in \mathbf{R}$. Voorts blijkt dat $\operatorname{Im} \widehat{f}$ een oneven funktie is, d.w.z. $\operatorname{Im} \widehat{f}(-\xi) = -\operatorname{Im} \widehat{f}(\xi)$ voor alle $\xi \in \mathbf{R}$. Daarom is

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} \widehat{f}(\xi)\, \sin(\xi x)\, d\xi = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im} \widehat{f}(\xi)\, \cos(\xi x)\, d\xi = 0.$$

(In beide gevallen is de integrand een oneven funktie, ga na dat hieruit het nul zijn van de integralen volgt.) De inversieformule is voor reëelwaardige f daarom equivalent met:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} \widehat{f}(\xi)\, \cos(\xi x)\, d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im} \widehat{f}(\xi)\, \sin(\xi x)\, d\xi.$$

De formule met de imaginaire e-macht heeft onder andere als voordeel dat zij eenvoudiger en compacter oogt.

We zullen Stelling 1.21 eerst bewijzen voor een aanzienlijk kleinere klasse van funkties.

Definitie 1.23 We definiëren de ruimte $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ van *Schwartz-funkties* op $\mathbf{R}$ als de lineaire ruimte van alle C^∞–funkties $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ zo dat voor alle $p, q \geq 0$ geldt:

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |x^p \frac{d^q f}{dx^q}(x)| < \infty. \tag{20}$$

Voorbeeld 1.24 De funktie $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ gedefinieerd door

$$h(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

behoort tot $\mathcal{S}(\mathbf{R})$. In Opgave $E_2 - 10$ wordt gevraagd dit aan te tonen.

Merk op dat de funkties $x^p f : x \mapsto x^p f(x)$ en $f^{(q)} = d^q f/dx^q$ weer tot $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ behoren als $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$. In het bijzonder wordt door differentiatie een lineaire afbeelding van $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ naar zichzelf gedefinieerd. In het vervolg zal het handig zijn een aparte notatie te gebruiken voor de volgende lineaire afbeelding van $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ naar zichzelf:

$$D = \frac{1}{i}\frac{d}{dx}: \quad \mathcal{S}(\mathbf{R}) \to \mathcal{S}(\mathbf{R}).$$

Uit de bovenstaande definitie volgt ook dat er voor elke $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ een $C > 0$ bestaat zo dat de schatting $(1 + x^2)|f(x)| < C$ geldt voor alle $x \in \mathbf{R}$. Dus $|f(x)| \leq C(1 + x^2)^{-1}$. De funktie $x \mapsto (1 + x^2)^{-1}$ is absoluut oneigenlijk Riemann-integreerbaar over $\mathbf{R}$ en wegens het majorantie criterium (Stelling 1.1) geldt hetzelfde voor f. Derhalve is voor $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ de Fourier-getransformeerde $\widehat{f}$ gedefinieerd. De volgende stelling verschaft de motivatie voor het werken met Schwartz-funkties.

Stelling 1.25 *De Fourier-transformatie $f \mapsto \widehat{f}$ is een lineaire operator van $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ in zichzelf. Voor elke $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ geldt:*

(a) $\widehat{Df} = \xi \widehat{f}$;

(b) $\widehat{xf} = -D\widehat{f}$.

Bewijs. Zij $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$. We bewijzen eerst dat (b) geldt. In het bovenstaande merkten we op dat xf tot $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ behoort, dus in het bijzonder absoluut integreerbaar is. Voorts geldt voor alle $\xi \in \mathbf{R}$ dat: $|\frac{\partial}{\partial \xi} e^{i\xi x} f(x)| = |xf(x)|$. Met Stelling 1.8 volgt daarom dat $\widehat{f}$ differentieerbaar is en dat:

$$\frac{d}{d\xi}\widehat{f}(\xi) = \frac{d}{d\xi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \xi}[e^{-i\xi x} f(x)]\, dx = -\int_{-\infty}^{\infty} ixe^{-i\xi x} f(x)\, dx.$$

Hieruit volgt (b).

Om (a) te bewijzen merken we op dat:

$$\begin{aligned} -i\xi \widehat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x}(e^{-i\xi x}) f(x)\, dx & (21) \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} \frac{df}{dx}(x)\, dx + \lim_{R \to \infty} [e^{-i\xi R} f(R) - e^{i\xi R} f(-R)]. & (22) \end{aligned}$$

De uitgevoerde partiële integratie is geoorloofd omdat f en f' tot $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ behoren, dus integreerbaar zijn. De limiet in het laatste lid is nul omdat $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$; derhalve volgt (a).

Tenslotte bewijzen we dat $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$. Door herhaald toepassen van (b) volgt dat $\widehat{f}$ een C^∞-funktie is. Zij $p, q \in \mathbf{N}$. Door herhaald toepassen van (a) en (b) volgt dat $\xi^p D^q \widehat{f}$ de Fourier-getransformeerde van de Schwartz-funktie $D^p[(-x)^q f]$ is, en dus begrensd (zie Lemma 1.20). Derhalve voldoet $\widehat{f}$ aan de schattingen (20). □

Voorbeeld 1.26 De in Voorbeeld 1.24 gedefinieerde Schwartz-funktie h voldoet aan de differentiaalvergelijking $h'(x) = -xh(x)$, ofwel $Dh = ixh$. Door toepassing van Stelling 1.25 volgt hieruit dat zijn Fourier-getransformeerde voldoet aan: $\xi\widehat{h} = -iD\widehat{h}$, ofwel:

$$\frac{d}{d\xi}\widehat{h}(\xi) = -\xi\widehat{h}(\xi).$$

Hieruit leidt men gemakkelijk af dat de de funktie $\xi \mapsto e^{\frac{1}{2}\xi^2}\widehat{h}(\xi)$ afgeleide nul heeft, dus constant is. Er bestaat dus een constante $c \in \mathbf{C}$ zo dat $\widehat{h} = c\,h$. Wegens $h(0) = 1$ volgt hieruit $c = \widehat{h}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,dx$. Uit Opgave $E_2 - 1$ volgt dat de laatste integraal gelijk is aan $\sqrt{2\pi}$. Dus:

$$\widehat{h} = \sqrt{2\pi} h. \tag{23}$$

Voor het bewijs van Stelling 1.21 voor Schwartz-funkties hebben we het volgende hulplemma nodig:

Lemma 1.27 *Zij $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$, $f(0) = 0$, en definieer $g : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ door $g(0) = f'(0)$ en $g(x) = f(x)/x$ voor $x \neq 0$. Dan is $g \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$.*

Bewijs. Eerst bewijzen we dat g een C^∞-funktie is. Voor alle $x \in \mathbf{R}$ geldt:

$$f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx)\,dt = x\int_0^1 f'(tx)\,dt.$$

Hieruit volgt dat

$$g(x) = \int_0^1 f'(tx)\,dt.$$

Uit het feit dat f' een C^∞–funktie is volgt dat $(x,t) \mapsto f'(tx)$ een C^∞–funktie is op $\mathbf{R} \times [0,1]$. Met Stelling B.8.4.1 volgt nu dat g een C^∞ funktie $\mathbf{R} \to \mathbf{C}$ is.

Uit de Schwartz-schattingen (20) voor f leidt men gemakkelijk af dat de funktie $x \mapsto x^p g^{(q)}(x)$ begrensd is op $\mathbf{R} \setminus [-1,1]$, voor alle $p, q \in \mathbf{N}$. Anderzijds is deze funktie continu dus begrensd op $[-1,1]$, en we zien dat $g \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$. □

Stelling 1.28 *De lineaire afbeelding $f \mapsto \widehat{f}$ is een bijectie van $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ op zichzelf. Voor elke $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ geldt de Fourier-inversieformule (19).*

Bewijs. Zij $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$. Allereerst zullen we de identiteit (19) bewijzen in het punt $x = 0$, d.w.z. we zullen bewijzen dat:

$$2\pi f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)d\xi \tag{24}$$

Veronderstel eerst dat $f(0) = 0$. Volgens Lemma 1.27 kunnen we schrijven $f = xg$, met $g \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$. Wegens Stelling 1.25 geldt $\widehat{f} = -D\widehat{g}$, dus:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\,d\xi = i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\xi}\widehat{g}(\xi)\,d\xi.$$

De integraal in het laatste lid is gelijk aan

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{d}{d\xi}\widehat{g}(\xi)\,d\xi = \lim_{R\to\infty} [\widehat{g}(R) - \widehat{g}(-R)] = 0.$$

(Het nul zijn van de limiet volgt uit $\widehat{g} \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$.) We zien dat (24) geldt als $f(0) = 0$.

Om (24) te bewijzen voor algemene $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ beschouwen we de funktie $f_0 = f - f(0)h$, met h als in Voorbeeld 1.24. Uit $f, h \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ volgt dat $f_0 \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ (de ruimte van Schwartz-funkties is lineair). Voorts geldt $f_0(0) = 0$, dus

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\widehat{f}(\xi) - f(0)\widehat{h}(\xi)]\,d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f_0}(\xi)\,d\xi = 0$$

wegens het eerste deel van het bewijs. Hieruit volgt door gebruik te maken van (23) dat:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(0)\widehat{h}(\xi) d\xi = f(0)\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\, d\xi = 2\pi f(0),$$

waarmee (19) bewezen is voor $x = 0$.

Tenslotte bewijzen we (19) voor een algemeen punt $x = a$. Wegens het onderstaande lemma behoort de verschoven funktie $T_a f : x \mapsto f(x+a)$ tot $\mathcal{S}(\mathbf{R})$. Passen we op deze funktie (24) toe, dan volgt:

$$f(a) = T_a f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{T_a f}(\xi)\, d\xi.$$

Door toepassing van het onderstaande lemma volgt hieruit de gewenste formule (19) in $x = a$.

Tenslotte zullen we aantonen dat Fourier-transformatie een bijectie van $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ op zichzelf is. De injectiviteit van $f \mapsto \widehat{f}$ volgt direct uit de inversieformule. Om de surjectiviteit aan te tonen merken we op dat de inversieformule door de substitutie $\xi \to -\xi$ herschreven kan worden als:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x}\widehat{f}(-\xi)\, d\xi.$$

Hier staat precies dat f de Fourier-getransformeerde is van de Schwartz-funktie $\xi \mapsto \frac{1}{2\pi}\widehat{f}(-\xi)$.
□

Lemma 1.29 *Zij $f \in \mathcal{S}(\mathcal{R})$, $a \in \mathbf{R}$. Dan behoort de verschoven funktie $T_a f : x \mapsto f(x+a)$ ook tot $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ en er geldt:*

$$\widehat{T_a f}(\xi) = e^{i\xi a}\widehat{f}(\xi), \qquad (\xi \in \mathbf{R}).$$

Bewijs. Door herhaald toepassen van de kettingregel volgt gemakkelijk dat $T_a f$ een C^∞ funktie is en dat

$$\frac{d^q}{dx^q} T_a f(x) = f^{(q)}(x+a).$$

Door $x^p = ((x+a)-a)^p$ met behulp van het binomium van Newton te herschrijven als lineaire combinatie van machten van $x + a$ zien we dat voor iedere $p, q \in \mathbf{N}$ de funktie

$$x \mapsto x^p \frac{d^q}{dx^q} T_a f(x) \tag{25}$$

te schrijven is als lineaire combinatie van funkties $x \mapsto (x+a)^k f^{(q)}(x+a)$. Derhalve is de funktie (25) begrensd op $\mathbf{R}$, en we zien dat $T_a f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$. Tenslotte merken we op dat

$$\widehat{T_a f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+a)e^{-i\xi x}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi(x-a)}\, dx = e^{i\xi a}\widehat{f}(\xi).$$

□

Opmerking 1.30 Stelling 1.21 kan nu bewezen worden uit Stelling 1.28. Voor details verwijzen we naar de Opgaven $E_2 - 12$ en $E_2 - 13$.

2 De stelling van Bolzano-Weierstrass en toepassingen

2.1 Gesloten en begrensde verzamelingen

In deze paragraaf bespreken we nog eens een toepassing van de stelling van Bolzano-Weierstrass die ook in de leeswijzer bij Analyse B–1 behandeld wordt, maar die in het college Analyse B–1 niet uitgebreid aan de orde is geweest. We gaan nader in op het gedrag van continue funkties op gesloten en begrensde verzamelingen.

Bestudeer § B.6.3 tot Gevolg B.6.3.7 Hieronder geven we een nadere toelichting op Stelling B.6.3.6. Als voorbereiding geven we de volgende belangrijke karakterisering van gesloten en begrensde deelverzamelingen van $\mathbf{R}^n$.

Stelling 2.1 *Zij $V \subset \mathbf{R}^n$. Dan zijn de volgende beweringen equivalent:*

(a) *de verzameling V is gesloten en begrensd;*

(b) *iedere in V gelegen rij heeft een convergente deelrij met een in V gelegen limiet.*

Bewijs. (a) $\Rightarrow$ (b): Stel dat (a) geldt, en laat $(x_k)_{k\geq 1}$ een rij in V zijn. Deze rij is begrensd, dus heeft een convergente deelrij $(x_{k(j)})_{j\geq n}$, wegens de stelling van Bolzano-Weierstrass. Zij a de limiet van deze deelrij. Dan is er voor iedere $\varepsilon > 0$ een $N \in \mathbf{N}$ zo dat $j \geq N \Rightarrow x_{k(j)} \in B(a;\varepsilon)$, dus $B(a;\varepsilon) \cap V \neq \emptyset$. Hieruit volgt dat $a \in \overline{V} = V$.

(b) $\Rightarrow$ (a): Laat (b) gelden. Veronderstel dat V niet begrensd is. Dan bestaat er een rij (x_k) met $x_k \in V$ en $\|x_k\| \geq k$. Iedere deelrij van (x_k) is onbegrensd, en kan dus niet convergent zijn, tegenspraak. Derhalve is V begrensd. Laat a een verdichtingspunt van V zijn. Dan kan men voor iedere $k \geq 1$ een $x_k \in \mathbf{R}^n$ kiezen met $x_k \in B(a;1/k) \cap V$. Uit $\|x_k - a\| \leq 1/k$ volgt dat $\lim_{k\to\infty} x_k = a$. Er is een deelrij van (x_k) die een in V gelegen limiet b heeft. Die deelrij moet a als limiet hebben, dus $a = b \in V$. Ieder verdichtingspunt van V behoort dus tot V, en we concluderen dat (a) geldt. □

Opmerking 2.2 In het bewijs van de bovenstaande stelling speelt de stelling van Bolzano-Weierstrass een belangrijke rol. Merk omgekeerd op dat voor iedere $R > 0$ de verzameling $\bar{B}(0;R) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| \leq R\}$ gesloten en begrensd is. Derhalve geldt de bewering (b) uit Stelling 2.1 met $V = \bar{B}(0;R)$: dit is precies de stelling van Bolzano-Weierstrass voor een in $\bar{B}(0;R)$ gelegen rij.

We komen nu bij een belangrijke toepassing.

Stelling 2.3 *Laat $V \subset \mathbf{R}^n$ een gesloten en begrensde verzameling zijn, en $f : V \to \mathbf{R}^p$ een continue funktie. Dan is $f(V)$ gesloten en begrensd.*

Bewijs. Laat (y_k) een rij in $f(V)$ zijn. Dan bestaat er voor iedere y_k een $x_k \in V$ zo dat $y_k = f(x_k)$. De rij (x_k) heeft een convergente deelrij $(x_{k(j)})$ met limiet $a \in V$. Uit de continuïteit van f in a volgt dat

$$f(a) = \lim_{j\to\infty} f(x_{k(j)}) = \lim_{j\to\infty} y_{k(j)}.$$

De rij (y_k) heeft dus een deelrij die convergent is met een in $f(V)$ gelegen limiet. Gebruik nu de karakterisering uit de bovenstaande stelling. □

Gevolg 2.4 *Laat $V \subset \mathbf{R}^n$ een gesloten en begrensde verzameling zijn, en $f : V \to \mathbf{R}$ een continue funktie. Dan neemt f op V een minimum en een maximum aan, dwz. er zijn $a, b \in V$ zo dat:*

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b) \qquad (x \in V).$$

Bewijs. Zie het bewijs van Gevolg 1.12.2 in Analyse A. □

2.2 Uniforme continuïteit

Een tweede belangrijke toepassing van Stelling 2.1 is de volgende generalisatie van Stelling A.1.13.1 (uniforme continuïteit van een continue funktie op een begrensde gesloten verzameling).

Stelling 2.5 *Laat V een begrensd en gesloten deel van $\mathbf{R}^n$ zijn. Dan is iedere continue funktie $f : V \to \mathbf{R}^p$ uniform continu op V.*

Bewijs. Veronderstel dat er een funktie $f : V \to \mathbf{R}^p$ bestaat die continu is maar niet uniform continu. Dan bestaat er een $\varepsilon > 0$ met de volgende eigenschap: bij iedere $\delta > 0$ is er een tweetal punten $x, y \in V$ te vinden met $\|x - y\| < \delta$, maar $\|f(x) - f(y)\| \geq \varepsilon$. In het bijzonder is er bij iedere $k \geq 1$ een tweetal punten $x_k, y_k \in V$ te vinden met $\|x_k - y_k\| < 1/k$, en $\|f(x_k) - f(y_k)\| > \varepsilon$. De rij $(x_k) \in V$ bezit een convergente deelrij $(x_{k(j)})$ met $a = \lim_{j\to\infty} x_{k(j)} \in V$. De rij $(y_{k(j)})$ bezit eveneens een convergente deelrij, dus door de rij van indices $k(1) < k(2) < \ldots$ eventueel te vervangen door een deelrij kunnen we bereiken dat $a = \lim_{j\to\infty} x_{k(j)}$ en $b = \lim_{j\to\infty} y_{k(j)}$ bestaan en tot V behoren. Uit $\|x_k - y_k\| < 1/k$ volgt door limietovergang dat $a = b$. Uit de continuïteit van f in a volgt dat er een $\delta > 0$ bestaat zo dat $f(B(a;\delta) \cap V) \subset B(f(a);\varepsilon/2)$. Voor j voldoende groot (zeg $j \geq N$) geldt $x_{k(j)}, y_{k(j)} \in B(a;\delta)$, dus:

$$\|f(x_{k(j)}) - f(y_{k(j)})\| \leq \|f(x_{k(j)}) - f(a)\| + \|f(a) - f(y_{k(j)})\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Dit is in tegenspraak met de keuzes van de x_k, y_k. □

2.3 De hoofdstelling van de algebra

Als laatste toepassing van de stelling van Bolzano-Weierstrass behandelen we de hoofdstelling van de algebra, vgl. § B.2.15. Het onderstaande stuk dient als vervanging van de genoemde paragraaf uit het Analyse B diktaat.

In het vervolg is $p : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ een complexe veeltermfunktie van de graad $n \geq 1$:

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n. \tag{26}$$

Hierbij zijn $a_k \in \mathbf{C}$, $a_n \neq 0$. We zullen de volgende stelling gaan bewijzen:

Stelling 2.6 (Hoofdstelling van de algebra). *De veelterm p heeft tenminste één nulpunt in $\mathbf{C}$, d.w.z er bestaat een $\alpha \in \mathbf{C}$ met $p(\alpha) = 0$.*

Eerst beschouwen we een bijzonder geval van de hoofdstelling (namelijk het geval van de veelterm $z \mapsto z^k - w$).

Lemma 2.7 *Laat $k \geq 1$ geheel zijn. Dan bestaat er voor iedere $w \in \mathbf{C}$ een $z \in \mathbf{C}$ zo dat $z^k = w$.*

Bewijs. Zie de leeswijzer Analyse B–1, waar dit bewezen wordt met behulp van poolcoordinaten. □

We keren terug naar de algemene situatie. Onze eerste doel is te bewijzen dat $|p(z)|$ een minimale waarde op $\mathbf{C}$ aanneemt. Zij

$$m = \inf\{|p(z)| \mid z \in \mathbf{C}\}.$$

(Deze definitie is correct, want de vermelde deelverzameling van $\mathbf{R}$ is niet-leeg en naar onderen begrensd door 0.) Dan willen we laten zien dat er een $\alpha \in \mathbf{C}$ bestaat met $|p(\alpha)| = m$. Als we Gevolg 2.4 willen gebruiken is ons voornaamste probleem dat $\mathbf{C}$ niet begrensd is. Dit kunnen we ondervangen met het volgende lemma, dat zegt dat $|p(z)|$ groot wordt als $|z| \to \infty$.

Lemma 2.8 *Voor iedere $M > 0$ bestaat er een $R > 0$ zo dat $|z| \geq R \Rightarrow |p(z)| \geq M$.*

Bewijs. De volgende schatting brengt tot uitdrukking dat de term $a_n z^n$ de overige domineert:

$$\begin{array}{rcl} |p(z)| & = & |a_n z^n|\,|1 + a_n^{-1} a_{n-1}\, z^{-1} + \cdots + a_n^{-1} a_0\, z^{-n}| \\ & \geq & |a_n z^n|\,(\,1 - |a_n^{-1} a_{n-1}\, z^{-1} + \cdots + a_n^{-1} a_0\, z^{-n}|\,) \\ & = & |a_n||z|^n\,(1 - |r(z^{-1})|), \end{array}$$

waarin we de notatie:

$$r(w) = a_n^{-1}(a_{n-1} w + \cdots a_0 w^n)$$

gebruikt hebben. Wegens de gebruikelijke rekenregels voor limieten is $\lim_{w\to 0} r(w) = 0$. In het bijzonder bestaat er dus een $\delta > 0$ zo dat $|w| < \delta \Rightarrow |r(w)| \leq \frac{1}{2}$. Voor $z \in \mathbf{C}$ met $|z| > 1/\delta$ geldt dus $|r(z^{-1})| \leq \frac{1}{2}$, zodat:

$$|p(z)| \geq |a_n||z|^n(1 - \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}|a_n||z|^n.$$

Nemen we $R = \max\{(2|a_n|^{-1}M)^{1/n}, \delta^{-1} + 1\}$ dan geldt voor $|z| \geq R$ dat $|p(z)| \geq M$. □

Lemma 2.9 *Er is een $\alpha \in \mathbf{C}$ zo dat $|p(\alpha)| = m$.*

Bewijs. Wegens het voorgaande lemma bestaat er een $M > 0$ zo dat $|z| \geq M \Rightarrow |p(z)| \geq m + 1$.

De funktie $z \mapsto |p(z)|$ is continu, dus neemt op de gesloten en begrensde verzameling $\bar{B}(0; M) = \{z \in \mathbf{C} : |z| \leq M\}$ zijn minimum aan in een punt α. Merk op dat $|p(\alpha)| \geq m$.

Voor alle $z \in \mathbf{C}$ geldt: (a) $|z| \leq M \Rightarrow |p(z)| \geq |p(\alpha)|$ en (b) $|z| \geq M \Rightarrow |p(z)| \geq m + 1$. In ieder geval geldt dus dat $\min(|p(\alpha)|, m + 1)$ een ondergrens voor $\{|p(z)| : z \in \mathbf{C}\}$ is, dus $\min(|p(\alpha)|, m + 1) \leq m$. We concluderen dat $|p(\alpha)| \leq m$, en wegens het hierboven reeds opgemerkte concluderen we tenslotte dat $|p(\alpha)| = m$. □

Voltooiing van het bewijs van de hoofdstelling. We gaan het bewijs van de hoofdstelling voltooien door aan te tonen dat $m = 0$ moet zijn. Veronderstel dat $m \neq 0$, dus $m > 0$. Dan zullen we laten zien dat we voor kleine $\varepsilon > 0$ in de buurt van α een z_ε kunnen vinden zo dat $|p(z_\varepsilon)| \leq (1 - \varepsilon)|p(\alpha)|$. Dit is dan in tegenspraak met het feit dat $|p(z)| \geq m = |p(\alpha)|$ voor alle $z \in \mathbf{C}$.

We vinden z_ε door $p(z)$ te herschrijven als

$$p(z) = p(\alpha) + b_1(z-\alpha)^1 + \cdots b_n(z-\alpha)^n, \tag{27}$$

met coëfficienten $b_k \in \mathbf{C}$. Dat dit kan ziet men eenvoudig in door in het rechterlid van (26) de substitutie $z = \alpha + (z - \alpha)$ uit te voeren, en te ordenen naar machten van $z - \alpha$. In het bijzonder ziet men zo dat $b_n = a_n \neq 0$. Laat k het kleinste positieve gehele getal zijn met $b_k \neq 0$. Dan kunnen we (27) herschrijven als

$$\begin{aligned} p(z) &= p(\alpha) + b_k(z-\alpha)^k + b_{k+1}(z-\alpha)^{k+1} + \cdots b_n(z-\alpha)^n \\ &= p(\alpha) + b_k(z-\alpha)^k + R(z). \end{aligned} \tag{28}$$

Het idee is nu dat $R(z)$ een orde kleiner is dan de overige termen van de bovenstaande identiteit als $z \to \alpha$. We proberen daarom eerst z_ε zo te vinden dat

$$p(\alpha) + b_k(z_\varepsilon - \alpha)^k = (1-2\varepsilon)\, p(\alpha), \tag{29}$$

oftewel

$$(z_\varepsilon - \alpha)^k = -\frac{2\varepsilon}{b_k}\, p(\alpha). \tag{30}$$

Dit is mogelijk voor iedere $\varepsilon > 0$, op grond van Lemma 2.7. Combineren we (28) en (29) dan vinden we:

$$p(z_\varepsilon) = (1-2\varepsilon)\, p(\alpha) + R(z_\varepsilon). \tag{31}$$

Merk op dat uit (30) volgt dat

$$|z_\varepsilon - \alpha| = \sqrt[k]{\frac{2\varepsilon\,|p(\alpha)|}{|b_k|}} = C\varepsilon^{1/k} \qquad (\varepsilon \downarrow 0),$$

met $C > 0$. Dus

$$\frac{|R(z_\varepsilon)|}{\varepsilon} \leq b_{k+1}C^{k+1}\varepsilon^{1/k} + \cdots b_n C^n \varepsilon^{\frac{n-k}{k}}$$

en de laatste uitdrukking heeft limiet 0 voor $\varepsilon \downarrow 0$. In het bijzonder geldt dus dat $|R(z_\varepsilon)| < \varepsilon|p(\alpha)|$ voor $\varepsilon > 0$ voldoende dicht bij 0. Combineren we dit met (31) dan zien we dat voor $\varepsilon > 0$ voldoende dicht bij 0 de gewenste schatting

$$|p(z_\varepsilon)| \leq (1-\varepsilon)|p(\alpha)|$$

geldt. Hiermee is het bewijs voltooid. □

3 Genormeerde lineaire ruimten

3.1 Inleiding

Bestudeer §§ B.4.1, B.4.2, B.4.3, B.4.4.

Doel van dit hoofdstuk is de verschillende vormen van convergentie van rijen die we tot nu toe behandeld hebben (convergentie in $\mathbf{R}^n$, uniforme convergentie) te leren zien als verschillende voorbeelden van één convergentiebegrip.

In dit hoofdstuk is k steeds het lichaam $\mathbf{R}$ of $\mathbf{C}$, en $\mathcal{R}$ een lineaire ruimte over k.

Definitie 3.1 Onder een *norm* op $\mathcal{R}$ verstaan we een afbeelding $\|\cdot\| : \mathcal{R} \to \mathbf{R}$ met de volgende eigenschappen: voor alle $v, w \in \mathcal{R}$, $\lambda \in k$ geldt:

(a) $\|v\| \geq 0$, en $\|v\| = 0 \iff v = 0$;
(b) $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$;
(c) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (driehoeksongelijkheid).

Onder een *genormeerde lineaire ruimte* $(\mathcal{R}, \|\cdot\|)$ verstaan we een lineaire ruimte $\mathcal{R}$ voorzien van een norm $\|\cdot\|$.

In het onderstaande behandelen we een aantal belangrijke voorbeelden van genormeerde lineaire ruimten.

Voorbeeld 3.2

(a) $\mathbf{R}^n$ voorzien van de Euclidische norm is een (reële) genormeerde lineaire ruimte.
(b) Zij $\mathcal{R}$ een lineaire ruimte (over k) voorzien van een positief definiet inprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Dan wordt door
$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$$
een norm op $\mathcal{R}$ gedefinieerd. Immers: $\|v\| \geq 0$ en $\|v\| = 0 \iff \langle v, v\rangle = 0 \iff v = 0$ wegens het definiet zijn van het inprodukt. Is $v \in \mathcal{R}$ en $\lambda \in k$, dan geldt:
$$\|\lambda v\| = \langle \lambda v, \lambda v\rangle^{1/2} = (\lambda\bar{\lambda}\langle v, v\rangle)^{1/2} = |\lambda|\sqrt{\langle v, v\rangle} = |\lambda|\|v\|.$$
Tenslotte brengen we in herinnering dat voor het inprodukt de ongelijkheid van Cauchy-Schwartz geldt: $|\langle v, w\rangle|^2 \leq \langle v, v\rangle\langle w, w\rangle$, dus:
$$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\|w\| \quad (v, w \in \mathcal{R}).$$
Door toepassing hiervan volgt de driehoeksongelijkheid:
$$\begin{aligned}
\|v+w\|^2 &= \langle v+w, v+w\rangle \\
&= \langle v, v\rangle + \langle w, w\rangle + \langle v, w\rangle + \overline{\langle v, w\rangle} \\
&= \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle v, w\rangle \\
&\leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\,|\langle v, w\rangle| \\
&\leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\,\|v\|\|w\| = (\|v\| + \|w\|)^2.
\end{aligned}$$

(c) Zij $\langle \cdot, \cdot \rangle$ het standaard (Hermite's) inprodukt op $\mathbf{C}^n$, gegeven door

$$\langle z, w \rangle = \sum_{k=1}^{n} z_k \bar{w}_k.$$

De bijbehorende (standaard) norm wordt gegeven door

$$\|z\| = \sqrt{|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2}.$$

(d) Zij $\mathrm{M}_n(k)$ de lineaire ruimte van $n \times n$ matrices met coëfficiënten in k. Bij een gegeven element A noteren we het element in de i-de rij en de j-de kolom met A_{ij}. Door de afbeelding $A \mapsto (A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{1n}, A_{21}, \ldots, A_{nn})$ wordt een bijectieve lineaire afbeelding $\mathrm{M}_n(k) \to k^{n^2}$ gedefinieerd. Via deze afbeelding zien we dat door

$$\|A\| = \left(\sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} |A_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

een norm gedefinieerd wordt (dit is in wezen de standaard norm op k^{n^2}).

(e) Zij $V \subset \mathbf{R}^p$ een deelverzameling. Een funktie $f : V \to \mathbf{R}^q$ heet begrensd als er een $R > 0$ bestaat zo dat $\|f(x)\| \le M$ voor alle $x \in V$. De verzameling van begrensde funkties $f : V \to \mathbf{R}^q$ duiden we aan met $\mathcal{B}(V, R^q)$. Dit is een reële lineaire ruimte met als bewerkingen de puntsgewijze scalarvermenigvuldiging en de puntsgewijze optelling: als $f, g \in \mathcal{B}(V, \mathbf{R}^q)$, $\lambda \in \mathbf{R}$, dan behoren de funkties $f + g$ en λf gedefinieerd door

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

weer tot $\mathcal{B}(V, \mathbf{R}^q)$. De sup-norm $\|\cdot\|_{(V)}$ gedefinieerd door

$$\|f\|_{(V)} = \sup\{\|f(x)\| \;:\; x \in V\}$$

definieert een norm op deze ruimte.

(f) Zij $V \subset \mathbf{R}^p$. Dan is de verzameling $\mathcal{B}C(V, \mathbf{R}^q)$ van begrensde continue funkties $f : V \to \mathbf{R}^q$ een lineaire deelruimte van $\mathcal{B}(V, \mathbf{R}^q)$. De beperking van de sup-norm definieert een norm op $\mathcal{B}C(V, \mathbf{R}^q)$.

(g) Is $V \subset \mathbf{C}$ dan levert het bovenstaande voorbeeld met $p = q = 2$ ons de lineaire ruimten $\mathcal{B}(V, \mathbf{C})$ en $\mathcal{B}C(V, \mathbf{C})$. Dit zijn zelfs complex lineaire ruimten. De hierboven gedefinieerde sup-norm is ook een norm van complex lineaire ruimten.

(h) Zij $I = [a, b]$ een gesloten en begrensd interval, en $C(I, \mathbf{C})$ de complexe lineaire ruimte van continue funkties $I \to \mathbf{C}$. Dan definiëren we de zogenaamde L^1-norm $\|\cdot\|_1$ op $C(I, \mathbf{C})$ door

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\, dt.$$

Ga na dat dit inderdaad een norm is.

(i) Zij $C(I, \mathbf{C})$ als hierboven. Dan definiëren we het zogenaamde L^2-inprodukt op $C(I, \mathbf{C})$ door:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\, dt.$$

Ga na dat dit inderdaad een inprodukt definieert. De bijbehorende L^2-norm wordt gegeven door:

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2\, dt \right)^{1/2}.$$

Uit het bovenstaande blijkt dat er vele voorbeelden van genormeerde lineaire ruimten bestaan. In het onderstaande zullen we onderzoeken welke resultaten uit de definiërende eigenschappen van een genormeerde lineaire ruimte volgen. Die resultaten zijn dan geldig op elk van de genoemde voorbeelden: zo wordt voorkomen dat we allerlei definities en stellingen voor ieder van de genoemde ruimten afzonderlijk moeten behandelen.

We beginnen met de omgekeerde driehoeksongelijkheid. In het vervolg is $(\mathcal{R}, \|\cdot\|)$ steeds een genormeerde lineaire ruimte.

Lemma 3.3 *Voor alle $v, w \in \mathcal{R}$ geldt:*

$$\|v - w\| \geq |\ \|v\| - \|w\|\ |.$$

Bewijs: Wegens de driehoeksongelijkheid geldt: $\|v\| = \|(v - w) + w\| \leq \|v - w\| + \|w\|$. Hieruit volgt $\|v\| - \|w\| \leq \|v - w\|$. Verwisselen we in deze schatting v en w dan volgt ook dat $\|w\| - \|v\| \leq \|w - v\| = \|v - w\|$. Derhalve geldt: $\max(\|v\| - \|w\|, \|w\| - \|v\|) \leq \|v - w\|$, en dit is precies de gewenste schatting. □

Definitie 3.4 Als $v, w \in \mathcal{R}$, dan noemen we het getal $d(v, w) = \|v - w\|$ de afstand tussen v en w. Als $a \in \mathcal{R}$, $\varepsilon > 0$ dan definiëren we de bol met middelpunt a en straal ε door

$$B(a; \varepsilon) = \{v \in \mathcal{R} \mid \|v - a\| < \varepsilon\}.$$

Merk op dat deze definitie voor $\mathbf{R}^n$ met de Euclidische norm precies de oude definitie is. Met andere woorden: we hebben de begrippen afstand en bol gegeneraliseerd naar genormeerde lineaire ruimten. Hetzelfde kunnen we doen met de begrippen open en gesloten verzameling.

Definitie 3.5 Zij V een deelverzameling van $\mathcal{R}$.

(a) Een punt $a \in V$ heet *inwendig punt* van V als er een $\varepsilon > 0$ bestaat zo dat $B(a; \varepsilon) \subset V$. De verzameling inwendige punten van V heet het *inwendige* van V, notatie: V^{inw}. De verzameling V heet *open* als ieder punt van V inwendig punt van V is, dwz. als $V^{\text{inw}} = V$.

(b) Een punt $a \in \mathcal{R}$ heet *verdichtingspunt* van V als voor iedere $\varepsilon > 0$ geldt: $V \cap B(a; \varepsilon) \neq ?$. De verzameling van verdichtingspunten van V heet de *afsluiting* van V, notatie $\bar{V}$. De verzameling V heet *gesloten* als ieder verdichtingspunt van V tot V behoort, dwz als $\bar{V} = V$.

We zouden nu door kunnen gaan, en de Lemma's 2.3, 2.4 en 2.5 uit de leeswijzer Analyse B-1 alsmede hun bewijzen zouden we (bijna) letterlijk kunnen herhalen. We laten het aan de lezer over in te zien dat de genoemde lemma's en hun bewijzen doorgaan in de huidige context.

3.2 Rijen

Ook het begrip convergentie van een rij kan gegeneraliseerd worden naar de context van een genormeerde lineaire ruimte $(\mathcal{R}, \|\cdot\|)$.

Definitie 3.6 Een rij $(v_n)_{n\geq 1}$ in $\mathcal{R}$ heet *convergent* als er een $v \in \mathcal{R}$ bestaat met de volgende eigenschap. Voor iedere $\varepsilon > 0$ bestaat er een $N \in \mathbf{N}$ zo dat voor alle $n \geq N$ geldt: $\|v_n - v\| < \varepsilon$. Het element $v \in \mathcal{R}$ heet dan de *limiet* van de rij $(v_n)_{n\geq 1}$, notatie:

$$\lim_{n\to\infty} v_n = v.$$

Opmerking 3.7 Een rij (v_n) kan ten hoogste één limiet hebben. Want laten zowel v als v' limiet van de rij zijn, en zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Dan is er een N zo dat voor $n \geq N$ geldt: $\|v_n - v\| < \varepsilon$ en $\|v_n - v'\| < \varepsilon$. In het bijzonder geldt dus $\|v - v'\| \leq \|v - v_N\| + \|v_N - v'\| < 2\varepsilon$ (hierbij is de driehoeksongelijkheid gebruikt). De gevonden schatting geldt voor iedere $\varepsilon > 0$, dus $\|v - v'\| = 0$. Wegens eigenschap (a) uit de definitie van een norm volgt hieruit $v - v' = 0$, dus $v = v'$.

Opmerking 3.8 Zij $V \subset \mathbf{C}$, en $\mathcal{B}(V, \mathbf{C})$ de ruimte van begrensde funkties $V \to \mathbf{C}$, voorzien van de sup-norm $\|\cdot\|_{(V)}$. Passen we de bovenstaande definitie toe op deze genormeerde lineaire ruimte dan zien we dat $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ in $(\mathcal{B}(V, C), \|\cdot\|_{(V)})$ betekent dat de rij (f_n) op V uniform convergeert met limiet f.

Het begrip van uniforme convergentie zoals dat in het Analyse B diktaat gedefinieerd wordt is slechts langs een omweg te vangen onder de vlag van genormeerde lineaire ruimten. Immers in Definitie B.4.2.7 wordt niet geëist dat de funkties f_n begrensd zijn. M.a.w. de f_n hoeven niet tot $\mathcal{B}(V, \mathbf{C})$ te behoren. De definitie van uniforme convergentie van de rij (f_n) kan echter als volgt geherformuleerd worden: *er bestaat een* $f : V \to \mathbf{C}$ *zo dat* $f_n - f \in \mathcal{B}(V, \mathbf{C})$ *voor alle* n, *terwijl* $\lim_{n\to\infty}(f_n - f) = 0$ *in* $(\mathcal{B}(V, \mathbf{C}), \|\cdot\|_{(V)})$.

Het begrip Cauchy-rij is zinvol in de context van genormeerde lineaire ruimten.

Definitie 3.9 Een rij $(f_n)_{n\geq 1}$ in $\mathcal{R}$ heet een *Cauchy-rij* als voor iedere $\varepsilon > 0$ een $N \in \mathbf{N}$ bestaat zo dat voor alle $p, q \geq N$ geldt:

$$\|v_p - v_q\| < \varepsilon.$$

Lemma 3.10 *Iedere convergente rij in* $\mathcal{R}$ *is een Cauchy-rij.*

Bewijs: Zij $(v_n)_{n\geq 1}$ convergent met limiet $v \in \mathcal{R}$. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Dan bestaat er een $N \in \mathbf{N}$ zo dat voor alle $n \geq N$ geldt: $\|v_n - v\| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Voor alle $p, q \geq N$ geldt dus:

$$\|v_p - v_q\| \leq \|v_p - v\| + \|v - v_q\| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

□

Omgekeerd hoeft een Cauchy-rij niet altijd convergent te zijn (zie Opgave E_2-27).

Definitie 3.11 De genormeerde lineaire ruimte $(\mathcal{R}, \|\cdot\|)$ heet *volledig* als iedere Cauchy-rij in $\mathcal{R}$ convergent is (met in $\mathcal{R}$ gelegen limiet). Een volledige genormeerde lineaire ruimte heet ook wel een *Banach-ruimte*.

Voorbeeld 3.12 Wegens Stelling B.6.2.2.4 zijn de in Voorbeeld 3.2 (a),(c),(d) genoemde genormeerde lineaire ruimten volledig.

Uit het Cauchy-criterium voor uniforme convergentie (Stelling B.4.4.2) volgt dat de in Voorbeeld 3.2 (g) genoemde genormeerde lineaire ruimte $\mathcal{B}(V, \mathbf{C})$ volledig is. Met een soortgelijk bewijs volgt algemener dat de in Voorbeeld 3.2 (e) genoemde ruimte volledig is. De in (g) genoemde ruimte $BC(V, \mathbf{C})$ behandelen we hieronder. In Opgave E_2-27 zal blijken dat de in (h) genoemde genormeerde lineaire ruimte niet volledig is. Op soortgelijke wijze kan men inzien dat de in (i) genoemde genormeerde lineaire ruimte niet volledig is.

Lemma 3.13 *Zij $V \subset \mathbf{C}$. Dan zijn de ruimten $\mathcal{B}(V, \mathbf{C})$ en $\mathcal{B}C(V, \mathbf{C})$ (voorzien van de sup-norm) volledig.*

Bewijs: De volledigheid van $\mathcal{B}(V, \mathbf{C})$ werd hierboven reeds vermeld als gevolg van het Cauchy-criterium (Stelling B.4.4.2). We geven de volledige redenering. Zij $(f_n)_{n\geq 1}$ een Cauchy-rij in $\mathcal{B}(V, \mathbf{C})$. Dan voldoet deze rij aan het criterium van Stelling B.4.4.2, dus heeft een uniforme limiet $f : V \to \mathbf{C}$. We moeten nog aantonen dat f begrensd is op V. Dit zien we als volgt: uit de uniforme convergentie volgt dat er een $n \in \mathbf{N}$ bestaat zo dat $\|f_n - f\|_{(V)} \leq 1$. Hieruit volgt dat voor alle $x \in V$ geldt:

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| \leq \|f_n - f\|_{(V)} + \|f_n\|_{(V)} \leq \|f_n\|_{(V)} + 1.$$

Dus f behoort tot $\mathcal{B}(V, \mathbf{C})$.

Veronderstel nu dat (f_n) een Cauchy-rij in $\mathcal{B}C(V, \mathbf{C})$ is. Dan is (f_n) een Cauchy-rij in $\mathcal{B}(V, \mathbf{C})$, dus uniform convergent met limiet $f \in \mathcal{B}(V, \mathbf{C})$. Uit Stelling B.4.3.1 volgt nu dat f continu is op V, dus tot $\mathcal{B}C(V, \mathbf{C})$ behoort. □

Stelling B.4.3.1 heeft nog het volgende tot gevolg.

Stelling 3.14 *Zij $V \subset \mathbf{C}$. De ruimte $\mathcal{B}C(V, \mathbf{C})$ is gesloten als deelverzameling van de genormeerde lineaire ruimte $\mathcal{B}(V, \mathbf{C})$ (met de sup-norm).*

Bewijs: Zij $f \in \mathcal{B}(V, \mathbf{C})$ een verdichtingspunt van $\mathcal{B}C(V, \mathbf{C})$. Dan geldt voor iedere $n \geq 1$ dat $B(f; \frac{1}{n}) \cap \mathcal{B}C(V, \mathbf{C}) \neq$?; er is dus een $f_n \in \mathcal{B}C(V, \mathbf{C})$ met $\|f_n - f\|_{(V)} < \frac{1}{n}$. De rij (f_n) convergeert derhalve op V uniform naar f. Uit de continuïteit van de f_n volgt nu wegens Stelling B.4.3.1 de continuïteit van f. Dus $f \in \mathcal{B}C(V, \mathbf{C})$. □

3.3 Uniforme convergentie en integratie

Bestudeer § B.4.8 t/m Stelling 4.8.2. In deze paragraaf zullen we de genoemde stelling nog eens vanuit een ander perspectief bezien.

Laat $[a,b] \subset \mathbf{R}$ een gesloten en begrensd interval zijn, en $C([a,b])$ de ruimte van continue funkties $f : [a,b] \to \mathbf{C}$. De funkties in $C([a,b])$ zijn begrensd, dus $C([a,b]) = \mathcal{B}C([a,b])$ voorzien van de sup-norm is een volledige genormeerde lineaire ruimte. We definiëren de afbeelding $I : C([a,b]) \to \mathbf{C}$ door

$$I(f) = \int_a^b f(t)\, dt \qquad (f \in C([a,b])). \tag{32}$$

Ga na dat de afbeelding I complex lineair is. In het analyse B diktaat is bewezen dat voor elke $f \in C([a,b])$ de volgende schatting geldt:

$$|I(f)| \leq (b-a)\, \|f\|_{([a,b])}.$$

Uit deze schatting, gecombineerd met de lineariteit volgt de bewering van Stelling B.4.8.2.(i), die we als volgt kunnen herfomuleren:

Is $(f_n)_{n\geq 1}$ een convergente rij in $(\,C([a,b]), \|\cdot\|_{([a,b])}\,)$ dan convergeert de rij $(I(f_n))_{n\geq 1}$ in $\mathbf{C}$, en er geldt

$$\lim_{n\to\infty} I(f_n) = I(\lim_{n\to\infty} f_n).$$

Dit suggereert het volgende:

Stelling 3.15 *De in (32) gedefinieerde afbeelding $I : C([a,b]) \to \mathbf{C}$ is continu.*

Bewijs: We hebben in het voorgaande niet gedefinieerd wat we met continuïteit van I bedoelen. Naar analogie met de definitie van continuïteit van afbeeldingen $\mathbf{R}^p$ æ $\mathbf{R}^q$ ligt het voor de hand continuïteit van I in een gegeven 'punt' $f_0 \in C([a,b])$ als volgt te definiëren: voor iedere $\varepsilon > 0$ bestaat er een $\delta > 0$ zo dat $I(B(f_0,\delta)) \subset B(I(f_0),\varepsilon)$. Dat I in deze zin continu is kunnen we als volgt inzien. Bij een gegeven $\varepsilon > 0$ kiezen we $\delta < \varepsilon/(b-a)$. Dan geldt voor $f \in B(f_0,\delta)$ dat $\|f - f_0\|_{([a,b])} < \varepsilon/(b-a)$, dus:

$$|I(f) - I(f_0)| = |I(f - f_0)| \leq (b-a)\, \|f - f_0\|_{([a,b])} < \varepsilon.$$

Hiermee is de continuïteit aangetoond. $\square$

3.4 Reeksen

Bestudeer §**4.5** van het Analyse B diktaat. In het vervolg is $(\mathcal{R}, \|\cdot\|)$ weer steeds een genormeerde lineaire ruimte.

Laat voor iedere $n \geq 1$ een $a_n \in \mathcal{R}$ gegeven zijn. Dan noemen we de uitdrukking $\sum_{k\geq 1} a_k$ een reeks in $\mathcal{R}$. Voor iedere $n \in \mathbf{N}$ definiëren we de n-de partiële som van de reeks door

$$\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Merk op dat iedere partiële som s_n tot $\mathcal{R}$ behoort.

Definitie 3.16 De reeks $\sum_{k\geq 1} a_k$ heet *convergent* als de rij (s_n) convergeert in de genormeerde lineaire ruimte $\mathcal{R}$. De limiet $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ heet dan de *som* van de reeks. We noteren deze met:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := s = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Opmerking 3.17 Zij $V \subset \mathbf{C}$ en $\sum_{k\geq 1} f_k$ een reeks van funkties $f_k \in \mathcal{B}(V, \mathbf{C})$. De reeks $\sum_{k\geq 1} f_k$ is convergent in $\mathcal{B}(V, \mathbf{C})$ (ten aanzien van de sup-norm) dan en slechts dan als hij uniform convergent op V is (volgens de definitie in het Analyse B diktaat).

De definitie in het Analyse B diktaat omvat echter een ruimere klasse van reeksen, omdat niet geëist wordt dat de termen van de reeks begrensde funkties zijn. Zie ook de eerder gemaakte Opmerking 3.8.

Is $\mathcal{R}$ volledig, dan geldt het volgende Cauchy-criterium voor convergentie van reeksen in $\mathcal{R}$.

Stelling 3.18 (Cauchy-criterium). *Veronderstel dat $(\mathcal{R}, \|\cdot\|)$ volledig is. Een reeks $\sum_{k\geq 1} a_k$ in $\mathcal{R}$ is convergent dan en slechts dan als voor iedere $\varepsilon > 0$ een $N \in \mathbf{N}$ bestaat zo dat voor alle gehele p, q met $q > p \geq N$ geldt:*

$$\| \sum_{k=p+1}^{q} a_k \| < \varepsilon.$$

Bewijs: Zij s_n de n-de partiële som van de reeks. Dan kan de bovenstaande schatting herschreven worden als $\|s_q - s_p\| < \varepsilon$. De bovenstaande conditie betekent dus precies dat de rij $(s_n)_{n\geq 1}$ een Cauchy-rij is. Wegens volledigheid is dit equivalent met de convergentie van de rij van partiële sommen, m.a.w. met de convergentie van de reeks. □

Het grote belang van het Cauchy-criterium is vooral gelegen in het volgende resultaat. Eerst een definitie.

Definitie 3.19 Een reeks $\sum_{k\geq 1} a_k$ in $\mathcal{R}$ heet *absoluut convergent* als de reeks $\sum_{k\geq 1} \|a_k\|$ (van reële getallen) convergent is.

Stelling 3.20 *Veronderstel dat de genormeerde lineaire ruimte $\mathcal{R}$ volledig is, en laat $\sum_{k\geq 1} a_k$ een reeks in $\mathcal{R}$ zijn. Is de reeks $\sum_{k\geq 1} a_k$ absoluut convergent, dan is hij ook convergent in $\mathcal{R}$.*

Bewijs: Veronderstel dat de reeks $\sum_{k\geq 1} \|a_k\|$ convergent is. Dan is de bijbehorende rij van partiële sommen een Cauchy-rij. Dus voor een gegeven $\varepsilon > 0$ bestaat er een $N \in \mathbf{N}$ zodat voor alle gehele p, q met $q > p \geq N$ geldt: $\sum_{k=p+1}^{q} \|a_k\| < \varepsilon$. Voor dergelijke p, q geldt dus ook:

$$\| \sum_{k=p+1}^{q} a_k \| \leq \sum_{k=p+1}^{q} \|a_k\| < \varepsilon.$$

Hieraan zien we dat de reeks $\sum_{k\geq 1} a_k$ voldoet aan het Cauchy-criterium (Stelling 3.18). Omdat $\mathcal{R}$ volledig is volgt nu de convergentie van de reeks. □

Bestudeer § B.4.6.

Opmerking 3.21 Is $V \subset \mathbf{C}$ en $\sum_{k\geq 1} f_k$ een reeks van begrensde funkties dan geldt wegens de bovenstaande stelling en de volledigheid van $\mathcal{B}(V, \mathbf{C})$ (met de sup-norm):

$$\sum_{k\geq 1} \|f_k\|_{(V)} \quad \text{convergent} \qquad \Rightarrow \quad \sum_{k\geq 1} f_k \quad \text{uniform convergent op} \quad V.$$

Dit is precies Stelling 4.6.1 van het Analyse B diktaat. Combineren we deze opmerking met het majorantie-criterium voor reeksen van reële getallen, dan volgt de stelling van Weierstrass (Stelling B.4.6.2). Merk op dat deze stelling van Weierstrass een voor de hand liggende generalisatie naar volledige genormeerde lineaire ruimten heeft.

Voorbeeld 3.22 ('e-macht van een matrix'). Laat $(\mathrm{M}_n(\mathbf{C}), \|\cdot\|)$ als in Voorbeeld 3.2 zijn. Dan merken we op dat voor alle $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ geldt: $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$. In het bijzonder volgt hieruit, als $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$, dat $\|A^n\| \leq \|A\|^n$. De reeks

$$\sum_{k\geq 0} \frac{\|A\|^k}{k!}$$

convergeert (met als som het reële getal $e^{\|A\|}$). Met het majorantie-criterium volgt nu dat de reeks $\sum_{k\geq 0} \|(k!)^{-1}A^k\|$ convergent is. De reeks

$$\sum_{k\geq 0} \frac{A^k}{k!}$$

is derhalve absoluut convergent, en dus convergent in $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$. De som noteren we met e^A. Dus:

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Bestudeer § B.4.8 vanaf Stelling B.4.8.2 (ii), en § B.4.9.

3.5 Partiële sommatie

Bestudeer § B.3.15.(1 t/m 4). In het Analyse B diktaat wordt partiële sommatie twee keer behandeld: één keer voor complexe reeksen, en één keer voor reeksen van funkties (in § B.4.7). Dit suggereert dat de behandeling beter in één keer in de context van genormeerde lineaire ruimten gegeven kan worden.

Stelling 3.23 (Kenmerk van Dirichlet). *Laat $(\mathcal{R}, \|\cdot\|)$ een volledige genormeerde lineiare ruimte zijn. Veronderstel dat $(a_k)_{k\geq 1}$ een monotoon dalende rij positieve reële getallen is met $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, en dat $\sum_{k\geq 1} b_k$ een reeks in $\mathcal{R}$ is waarvan de partiële sommen B_n $(n \geq 1)$ een begrensde rij vormen. Dan is $\sum_{k\geq 1} a_k b_k$ convergent in $\mathcal{R}$.*

Bewijs: Uit het gegeven volgt dat er een $M > 0$ bestaat zo dat $\|B_n\| \leq M$ voor alle $n \geq 1$. We gebruiken weer de techniek van partiële sommatie voor herschrijven van de 'Cauchy-moot'. Voor gehele p, q met $q > p$ geldt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p+1}^{q} a_k b_k &= \sum_{k=p+1}^{q} a_k (B_k - B_{k-1}) \\
&= \sum_{k=p+1}^{q} a_k B_k - \sum_{l=p}^{q-1} a_{l+1} B_l \\
&= \sum_{k=p+1}^{q-1} (a_k - a_{k+1})\, B_k + a_q B_q - a_{p+1} B_p.
\end{aligned}$$

Uit het positief en monotoon dalend zijn van de rij (a_k) volgt $|a_k - a_{k+1}| = a_k - a_{k+1}$. Derhalve volgt uit het bovenstaande door toepassing van de driehoeksongelijkheid dat

$$\begin{aligned}
\|\sum_{k=p+1}^{q} a_k b_k\| &\leq \sum_{k=p+1}^{q-1} (a_k - a_{k+1})\, \|B_k\| + a_q\, \|B_q\| + a_{p+1}\, \|B_p\| \\
&\leq \sum_{k=p+1}^{q-1} (a_k - a_{k+1})\, M + a_q\, M + a_{p+1}\, M \\
&= (a_{p+1} - a_q)\, M + a_q M + a_{p+1} M = 2M a_{p+1}.
\end{aligned}$$

Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Dan is er een $N \in \mathbf{N}$ zo dat voor $n \geq N$ geldt $0 \leq a_n < \varepsilon/(2M)$. Met de bovenstaande schattingen zien we dat voor gehele p, q met $q > p \geq N$ geldt:

$$\|\sum_{k=p+1}^{q} a_k b_k\| < \varepsilon.$$

De reeks $\sum_{k \geq 1} a_k b_k$ voldoet derhalve aan het Cauchy-criterium en is dus convergent. □

Bestudeer nu § 4.7 uit het Analyse B diktaat.

4 Het gedrag van machtreeksen op hun convergentiecirkel

4.1 Inleiding

In het algemeen kan een machtreeks op zijn convergentiecirkel zowel convergeren als divergeren.

Voorbeeld 4.1

(a) De meetkundige reeks $\sum_{n\geq 0} z^n$ heeft convergentiestraal 1. Voor z met $|z| = 1$ geldt dat $|z^n| = 1$, dus niet $\lim_{n\to\infty} z^n = 0$. Derhalve divergeert de meetkundige reeks op zijn convergentiecirkel.

(b) Met het quotiëntenkenmerk ziet men gemakkelijk in dat de reeks $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} z^n$ convergentiestraal 1 heeft. Voor z met $|z| = 1$ geldt $|\frac{1}{n^2} z^n| \leq \frac{1}{n^2}$, en $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ is convergent, dus wegens het majorantenkenmerk volgt dat de gegeven machtreeks convergeert voor op de convergentiecirkel gelegen waarden van z. Met de stelling van Weierstrass zien we dat de convergentie op de convergentiecirkel zelfs uniform is.

(c) Wederom met het quotiëntenkenmerk zien we in dat de reeks $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} z^n$ convergentiestraal 1 heeft. Vullen we $z = 1$ in, dan ontstaat de harmonische reeks, die divergent is. Vullen we $z = -1$ in, dan onstaat de alternerende harmonische reeks die convergeert. Het is dus mogelijk dat een machtreeks in sommige punten van zijn convergentiecirkel divergeert, terwijl hij in andere punten convergeert.

4.2 De machtreeks voor $\log(1 + z)$

In het Analyse B diktaat wordt in § 5.9.5 bewezen dat voor alle $z \in \mathbf{C}$ met $|z| < 1$ geldt:

$$\log(1 + z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n. \tag{33}$$

In deze paragraaf zullen we het gedrag van de reeks (33) op zijn convergentiecirkel behandelen. Partiële sommatie speelt daarbij een cruciale rol.

De stelling zal in een later stadium toegepast worden op de theorie der Fourierreeksen.

Lemma 4.2 *Zij $\varepsilon > 0$. Dan convergeert de reeks (33) uniform op de verzameling*

$$V_\varepsilon = \{\, z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq 1, \;\; |z + 1| \geq \varepsilon \,\}.$$

Bewijs: Schrijf $a_n = \frac{1}{n}$ en $f_n(z) = (-1)^{n+1} z^n$. Dan is $(a_n)_{n\geq 1}$ een monotoon dalende rij positieve reële getallen met limiet 0. De n-de partiële som van de reeks $\sum_{n\geq 1} f_n$ wordt gegeven door

$$F_n(z) = \sum_{k=1}^{n} -(-z)^n = -z \frac{1 - (-z)^{n+1}}{1 + z}.$$

Voor $z \in V_\varepsilon$ geldt: $|1 + z| \geq \varepsilon$ en $|1 - (-z)^{n+1}| \leq 2$, dus $|F_n(z)| \leq 2\varepsilon^{-1}$. Hieruit volgt, voor elke $n \geq 1$:

$$\|F_n\|_{(V_\varepsilon)} \leq 2\varepsilon^{-1}.$$

De rij van partiële sommen van $\sum_{n\geq 1} f_n$ is derhalve uniform begrensd op V_ε. Met Stelling B.4.7.1 concluderen we dat de reeks $\sum_{n\geq 1} a_n f_n$ uniform convergeert op V_ε. □

Het bovenstaande lemma heeft als belangrijke gevolg dat formule (33) geldig blijft in de punten van de convergentiecirkel waar de reeks convergeert.

Gevolg 4.3 *Voor alle $z \in \mathbf{C}$ met $|z| \leq 1,\ z \neq -1$ geldt (33).*

Bewijs: Zij V_0 de verzameling van $z \in \mathbf{C}$ met $|z| \leq 1,\ z \neq -1$. We definiëren de funktie $f : V_0 \to \mathbf{C}$ door

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n.$$

Is $\alpha \in V_0$, dan bestaat er een $\varepsilon > 0$ zo dat $|z+1| > \varepsilon$, dus $\alpha \in V_\varepsilon$. Uit de uniforme convergentie van de reeks volgt dat f continu is in α. Hieruit blijkt dat f continu is op V_0.

Uit het bovenstaande lemma volgt dat $f(z) = \log(1+z)$ voor alle z met $|z| < 1$. Zij nu $\alpha \in V_0$, $|\alpha| = 1$. Dan is er een rij $(z_n)_{n\geq 1}$ van punten in $\mathbf{C}$ met $|z_n| < 1$ zo dat $\lim_{n\to\infty} z_n = \alpha$. Voor elke $n \geq 1$ geldt dus:

$$f(z_n) = \log(1+z_n).$$

Wegens de continuïteit van f heeft het linkerlid van de bovenstaande gelijkheid limiet $f(\alpha)$ als $n \to \infty$. Wegens de continuïteit van de logaritme heeft het rechterlid limiet $\log(1+\alpha)$. We concluderen dat $f(\alpha) = \log(1+\alpha)$. □

4.3 De stelling van Abel

In de vorige paragraaf zagen we voor het geval van de logaritmische funktie hoe de geldigheid van diens machtreeksontwikkeling nog doorging in punten van de convergentiecirkel. Een andere stelling waarmee dit resultaat afgeleid had kunnen worden is de onderstaande van Abel afkomstige stelling, die wederom berust op partiële sommatie.

Lemma 4.4 *Laat $\sum_{n\geq 0} c_n$ een convergente reeks zijn, met $c_n \in \mathbf{C}$ $(n \geq 0)$. Dan convergeert de reeks*

$$\sum_{n\geq 0} c_n t^n$$

uniform voor $0 \leq t \leq 1$.

Bewijs: Het bewijs van deze stelling berust weer op partiële sommatie, toegepast op een andere wijze dan we gewend zijn. Uit de convergentie van de reeks $\sum_{n\geq 0} c_n$ volgt die van de reeks $\sum_{n\geq p} c_n$, voor iedere $p \geq 0$. Voor $p \in \mathbf{N}$ definiëren we:

$$R_p = \sum_{n=p}^{\infty} c_n.$$

Dan is $\lim_{p\to\infty} R_p = 0$. Voorts is $c_k = R_k - R_{k+1}$ voor iedere $k \geq 0$; deze karakterisering van c_k is het startpunt van de partiële sommatie die we gaan toepassen.

Laten $p, q \in \mathbf{N}$ zijn met $q > p$. Met partiële sommatie herschrijven we de 'Cauchy-moot' van de reeks $\sum_{n\geq 0} c_n t^n$ als volgt:

$$\sum_{n=p+1}^{q} c_n t^n \quad = \quad \sum_{n=p+1}^{q} (R_n - R_{n+1}) t^n$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=p+1}^{q} R_n t^n - \sum_{n=p+2}^{q+1} R_n t^{n-1} \\
&= R_{p+1} t^{p+1} - R_{q+1} t^q + \sum_{n=p+2} q R_n (t^n - t^{n-1}).
\end{aligned}
$$

Zij nu $\varepsilon > 0$ gegeven. Uit $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ volgt het bestaan van een $N \in \mathbf{N}$ zo dat $|R_n| < \varepsilon$ voor alle $n \geq N$. Voor $q > p \geq N$ kunnen we de Cauchy-moot dus voor elke $t \in [0,1]$ schatten door:

$$
\begin{aligned}
|\sum_{n=p+1}^{q} c_n t^n| &\leq \varepsilon\, t^{p+1} + \varepsilon\, t^q + \varepsilon \sum_{n=p+2}^{q} |t^n - t^{n-1}| \\
&= \varepsilon\, t^{p+1} + \varepsilon\, t^q + \varepsilon \sum_{n=p+2}^{q} (t^{n-1} - t^n) \\
&= 2\varepsilon\, t^{p+1} \leq 2\varepsilon.
\end{aligned}
$$

In het bijzonder zien we dat de Cauchy-moot uniform naar nul gaat als $t \in [0,1]$, $N \to \infty$. Hieruit volgt de uniforme convergentie van de reeks op het interval $[0,1]$. □

Gevolg 4.5 (De stelling van Abel). *Gegeven is een complexe machtreeks* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *met convergentiestraal* R, *waarbij* $0 < R < \infty$. *Zij* β *een punt op de convergentiecirkel (dus* $|\beta| = R$*) waarvoor de machtreeks convergeert. Dan convergeert de machtreeks* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *uniform op het lijnstuk* $\{\, z \in \mathbf{C} \mid z = t\beta,\ t \in [0,1] \,\}$. *Bijgevolg geldt:*

$$
\sum_{n=0}^{\infty} a_n \beta^n = \lim_{t\uparrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \beta^n t^n.
$$

Bewijs: Pas het voorgaande lemma toe met $c_n = a_n \beta^n$, dan volgt de uitspraak over uniforme convergentie. Met Stelling B.4.5.2 volgt dat door $t \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n \beta^n t^n$ een continue funktie $[0,1] \to \mathbf{C}$ gedefinieerd wordt. Hieruit volgt de bewering over de limiet. □

Bestudeer Voorbeeld B.5.10.2.

5 Fourierreeksen

Het huidige hoofdstuk dient ter vervanging van § 5.11 uit het Analyse B diktaat.

5.1 Reële en complexe gedaante

Machtreeksen zijn reeksen met machten $z \mapsto (z-\alpha)^n$ $(n \geq 0)$ als 'bouwstenen'. We zullen nu een ander soort reeksen bestuderen, met de goniometrische funkties als bouwstenen en met de reële rechte $\mathbf{R}$ (dus niet $\mathbf{C}$) als definitiegebied. Deze reeksen zijn genoemd naar de Franse wiskundige J. Fourier (1768-1830).

Definitie 5.1 Een *Fourierreeks* of *trigonometrische reeks* is een reeks van funkties op $\mathbf{R}$ van de vorm

$$a_0 + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{34}$$

waarbij de coëfficiënten a_n $(n \geq 0)$ en b_n $(n \geq 1)$ reële of complexe getallen zijn.

Omdat $\cos nx = \frac{1}{2}(e^{inx} + e^{-inx})$ en $\sin nx = \frac{1}{2i}(e^{inx} - e^{-inx})$ is de reeks (34) dezelfde reeks als de reeks:

$$c_0 + \sum_{n\geq 1}(c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}), \tag{35}$$

waarbij

$$c_0 = a_0, \qquad \text{en} \qquad \begin{cases} c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \\ c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \quad (n \geq 1), \end{cases} \tag{36}$$

dus

$$a_0 = c_0, \qquad \text{en} \qquad \begin{cases} a_n = c_n + c_{-n} \\ b_n = i(c_n - c_{-n}) \quad (n \geq 1). \end{cases} \tag{37}$$

De reeks (35) schrijven we voortaan ook in de vorm:

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n e^{inx} \tag{38}$$

(bedenk dat $e^{i0x} = 1$ voor alle $x \in \mathbf{R}$). De reeks (34) heet de *reële gedaante* en de reeks (38) de *complexe gedaante* van de Fourierreeks.

Een reeks zoals (38), waarbij over alle $n \in \mathbf{Z}$ gesommeerd wordt, noemt men wel een *tweezijdige reeks.* Zie hiervoor § 5.2. De n-de partiële som van de Fourierreeks (34) is

$$s_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

of, in complexe gedaante,

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}.$$

De rij $(\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx})_{n\geq 0}$ heet de rij van de *symmetrische partiële sommen* van de reeks (38). De Fourierreeks is convergent dan en slechts dan als de rij van de symmetrische partiële sommen van (38) convergent is.

Opmerking 5.2 Voor veel doeleinden is de complexe gedaante handiger dan de reële gedaante. De reële gedaante wordt vooral gebruikt in het geval de coëfficiënten a_n en b_n reëel zijn, dus als $c_n = \overline{c_{-n}}$ voor alle $n \in \mathbf{Z}$.

5.2 Tweezijdige reeksen

In § 5.1 hebben we op natuurlijke wijze te maken gekregen met reeksen waarbij de index van de termen alle gehele getallen doorloopt. Omdat zulke reeksen geen beginterm hebben, moet het begrip convergentie apart gedefinieerd worden.

Definitie 5.3 De uitdrukking $\sum_{n\in\mathbf{Z}} t_n$ (met $t_n \in \mathbf{C}$ voor alle $n \in \mathbf{Z}$) heet een *tweezijdige reeks*. Zo'n reeks heet *convergent* als de reeksen $\sum_{t\geq 0} t_n$ en $\sum_{t\geq 1} t_{-n}$ beide convergent zijn. In dat geval heet het getal $\sum_{n=0}^{\infty} t_n + \sum_{n=1}^{\infty} t_{-n}$ de *som* van de reeks; notatie: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} t_n$.

Opmerking 5.4

(a) De voorkeur voor de index 0 in Definitie 5.3 is slechts schijn. Men krijgt hetzelfde begrip convergentie, en ook dezelfde waarde voor de som, als men uitgaat van de reeksen $\sum_{n\geq p} t_n$ en $\sum_{n\geq 1-p} t_{-n}$ voor een willekeurige $p \in \mathbf{Z}$ (zie Opmerking B.3.2.6).

(b) Als $\sum_{n\in\mathbf{Z}} t_n$ convergeert, dan is ook de rij $(\sum_{k=-n}^{n} t_k)_{n\geq 0}$ van de symmetrische partiële sommen convergent, en

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} t_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t_n$$

(immers $\sum_{k=-n}^{n} t_k = \sum_{k=0}^{n} t_k + \sum_{k=1}^{n} t_{-k}$; pas nu stelling 3.5.1 toe). Maar uit de convergentie van de rij der symmetrische partiële sommen van $\sum_{n\in\mathbf{Z}} t_n$ volgt in het algemeen niet dat $\sum_{n\in\mathbf{Z}} t_n$ convergeert. Voorbeeld: $t_n = 1$ als $n \geq 0$ en $t_n = -1$ als $n < 0$; dan is $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} t_k = 1$, terwijl $\sum_{n\geq 0} t_n$ en $\sum_{n\geq 1} t_{-n}$ beide divergeren, dus ook $\sum_{n\in\mathbf{Z}} t_n$ divergeert.

(c) Analoge opmerkingen gelden voor reeksen $\sum_{n\in\mathbf{Z}} f_n$, waarbij de f_n funkties zijn, gedefinieerd op een verzameling $V \subset \mathbf{C}$.

De complexe gedaante van een Fourierreeks, $\sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n e^{inx}$ (zie (38)) is een belangrijk voorbeeld van een tweezijdige reeks van funkties. De termen van de reeks zijn in dit geval gedefinieerd op $\mathbf{R}$. Het kan gebeuren dat een reeks $\sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n e^{inx}$ in een bepaald punt x_0 niet convergeert in de zin van Definitie 5.3, terwijl de rij van zijn symmetrische partiële sommen wèl convergeert. In dat geval is dus de bijbehorende Fourierreeks in x_0 wèl convergent. Dit subtiele onderscheid blijkt echter geen rol te spelen in het geval van absolute convergentie, zoals de volgende stelling laat zien.

Stelling 5.5 *Als $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$, dan is de reeks $\sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n e^{inx}$ op $\mathbf{R}$ uniform absoluut convergent.*

Bewijs: We merken allereerst op dat het gegeven impliceert dat de reeksen $\sum_{n\geq 0} |c_n|$ en $\sum_{n\geq 1} |c_{-n}|$ convergeren. Omdat $|c_n e^{inx}| = |c_n|$ voor alle $n \in \mathbf{Z}$ en alle $x \in \mathbf{R}$, is de absolute convergentie van de reeksen $\sum_{n\geq 0} c_n e^{inx}$ en $\sum_{n\geq 1} c_{-n} e^{-inx}$ voor iedere $x \in \mathbf{R}$ hiervan een triviaal gevolg. En dat beide reeksen op $\mathbf{R}$ uniform convergeren, volgt direct met behulp van het convergentiekenmerk van Weierstrass (Stelling B.4.6.2). □

Opmerking 5.6 Uit de relaties (36) en (37) van leidt men gemakkelijk af:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty \quad \text{en} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty.$$

5.3 Periodieke funkties

Het onderzoek naar de convergentie van een Fourierreeks is niet altijd eenvoudig. De convergentieverzameling (zie Definitie B.4.1.1) hoeft niet de hele $\mathbf{R}$ te zijn. Voor we hier nader op ingaan definiëren we eerst het begrip periodiciteit.

Definitie 5.7 Zij L een positief reëel getal.

Een verzameling $V \subset \mathbf{R}$ heet *periodiek met periode* L of L*-periodiek* als $V = V + L$, dat wil zeggen: als geldt $x \in V \Leftrightarrow x + L \in V$.

Een funktie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ (of, algemener, $f : V \to \mathbf{C}$ met V L-periodiek) heet *periodiek met periode* L of L*-periodiek* als $f(x + L) = f(x)$ voor alle $x \in \mathbf{R}$ (resp. alle $x \in V$).

De n-de term van een Fourierreeks (dus de funktie $x \mapsto a_n \cos nx + b_n \sin nx$) is periodiek met periode $\frac{2\pi}{n}$, dus ook met periode 2π. Alle termen van een Fourierreeks zijn dus 2π-periodiek. Hieruit volgt dat ook de convergentieverzameling V en de somfunktie $f : V \to \mathbf{C}$ van een Fourierreeks 2π-periodiek zijn.

Voor een nader onderzoek van 2π-periodieke funkties voeren we nu enkele nieuwe begrippen in.

Definitie 5.8 Zij $p \in \mathbf{N}$. Een funktie $f : [a, b] \to \mathbf{C}$ heet *stuksgewijs* C^p als er een rij punten $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_r = b$ is zo dat voor iedere $1 \le j \le r$ geldt: de beperking $f|]a_{j-1}, a_j[$ is voortzetbaar tot een C^p-funktie op $[a_{j-1}, a_j]$. Een funktie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ heet stuksgewijs C^p als de beperking van f tot ieder gesloten en begrensd interval C^p is. Een stuksgewijze C^0-funktie wordt ook wel *stuksgewijs continu* genoemd.

Opmerking 5.9 Merk op dat de bovenstaande eis van voortzetbaarheid van $f|]a_{j-1}, a_j[$ tot een C^p funktie op $[a_{j-1}, a_j]$ ook als volgt geformuleerd kan worden: de funktie f is C^p op $]a_{j-1}, a_j[$ en voor elke $0 \le k \le p$ bestaan de volgende limieten van de k-de afgeleide:

$$\lim_{x \downarrow a_{j-1}} f^{(k)}(x) \qquad \text{en} \qquad \lim_{x \uparrow a_j} f^{(k)}(x).$$

Definitie 5.10 Als $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ en $g : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ stuksgewijs continu en 2π-periodiek zijn, dan definieert men $\langle f, g \rangle$ als volgt:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Opmerking 5.11 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ is een positieve Hermite'se vorm op de complexe lineaire ruimte P van alle stukswgewijs continue 2π-periodieke funkties $\mathbf{R}\to\mathbf{C}$. Dat wil zeggen, voor alle $f,g,f_1,f_2\in P$ en $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbf{C}$ geldt:

(a) $\langle\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2,g\rangle=\lambda_1\langle f_1,g\rangle+\lambda_2\langle f_2,g\rangle$;
(b) $\langle f,g\rangle=\overline{\langle g,f\rangle}$;
(c) $\langle f,f\rangle\geq 0$;

Bovendien is de vorm $\langle\cdot,\cdot\rangle$ definiet (en dus een Hermite's inprodukt) op de deelruimte P^0 van continue funkties in P, dwz. voor $f\in P^0$ geldt:

(d) $\langle f,f\rangle=0\Leftrightarrow f$ is de nulfunktie.

Merk op dat $\langle f,f\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2dx$, waaruit (c) volgt (uit (b) volgt slechts dat $\langle f,f\rangle$ reëel is). Voor het bewijs van (d) is de continuïteit van f essentieel.

Voor de volledigheid merken we nog op dat (a) geformuleerd kan worden als: voor elke $g\in P$ is de afbeelding $f\mapsto\langle f,g\rangle$ lineair. Uit (a) en (b) volgt dat de afbeelding $g\mapsto\langle f,g\rangle$ 'geconjugeerd-lineair' is, d.w.z. voor alle $f,g_1,g_2\in P$, $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbf{C}$ geldt:

$$\langle f,\lambda_1 g_2+\lambda_2 g_2\rangle=\bar\lambda_1\langle f,g_1\rangle+\bar\lambda_2\langle f,g_2\rangle.$$

Opmerking 5.12 Men ziet gemakkelijk in dat voor een stuksgewijs continue 2π- periodieke funktie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{C}$ de waarde van de integraal

$$\int_a^{a+2\pi}f(x)dx$$

onafhankelijk is van de keuze van $a\in\mathbf{R}$.

We bekijken nu de funkties $e_n:\mathbf{R}\to\mathbf{C}$, gedefinieerd door

$$e_n(x)=e^{inx}\qquad(n\in\mathbf{Z},\ x\in\mathbf{R}).$$

Dit zijn de 'bouwstenen' voor de complexe gedaante van de Fourierreeks (38). Deze funkties zijn continu en 2π-periodiek.

Lemma 5.13 *De funkties e_n $(n\in\mathbf{Z})$ hebben de volgende eigenschappen.*

(a) $e_ne_m=e_{n+m}$;
(b) $e_{-n}=\bar e_n$;
(c) $\int_0^{2\pi}e_n(x)\,dx=0$ *als* $n\neq 0$, $\int_0^{2\pi}e_0(x)\,dx=2\pi$;
(d) $\langle e_n,e_m\rangle=0$ *als* $n\neq m$, $\langle e_n,e_n\rangle=1$.

Bewijs: Eigenschap (a) volgt uit Eigenschap B.5.9.2.6, en (b) volgt uit Eigenschap B.5.9.2.3. Voor $n\neq 0$ bewijst men (c) als volgt:

$$\int_0^{2\pi}e^{inx}dx=\frac{1}{in}e^{inx}\ |_0^{2\pi}=0.$$

Voor $n=0$ is $e_n(x)=1$, dus (c) volgt. Tenslotte volgt (d) uit (c) en de observatie: $e_n\bar e_m=e_{n-m}$. □

Eigenschap (d) van Lemma 5.13 zegt dat de funkties $e_n (n \in \mathbf{Z})$ een *orthonormaal stelsel* vormen in de in Opmerking 5.11 genoemde lineaire ruimte P^0 met inproduct. We zullen dit feit uitbuiten om te bewijzen dat voor absoluut convergente Fourierreeksen een eenvoudig verband bestaat tussen de coëfficiënten van de complexe vorm van de Fourierreeks en de som van de reeks. Van Stelling 5.5 weten we al dat een absoluut convergente Fourierreeks uniform convergeert. De somfunktie is dus continu (Stelling B.4.5.2), en bovendien 2π-periodiek. Er geldt nu:

Stelling 5.14 *Zij $\sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n e^{inx}$ een Fourierreeks met $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$. Zij voorts $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ de somfunktie. Dan geldt voor alle $n \in \mathbf{Z}$:*

$$c_n = \langle f, e_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

Bewijs: Zij $k \in \mathbf{Z}$. Dan geldt:

$$\langle f, e_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} e^{-ikx} dx.$$

Wegens de uniforme convergentie van de Fourierreeks mogen integratie en sommatie verwisseld worden (gebruik (ii) van Stelling B.4.8.2). Dit geeft:

$$\langle f, e_k \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \langle e_n, e_k \rangle.$$

Met (d) van Lemma 5.13 volgt hieruit dat $\langle f, e_k \rangle = c_k$. □

Uit Stelling 5.14 en de relaties (37) bewijst men gemakkelijk de volgende formules voor de coëfficiënten van de reële gedaante van een absoluut convergente Fourierreeks.

Stelling 5.15 *Zij f de somfunktie van een absoluut convergente Fourierreeks (als in Stelling 5.14). Dan worden de reële Fouriercoëfficiënten van f gegeven door:*

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx, && (39) \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx\, dx \quad (n \geq 1), && (40) \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx\, dx \quad (n \geq 1). && (41) \end{aligned}$$

Opmerking 5.16 De formule voor a_n $(n \geq 1)$ in Stelling 5.15 zou ook voor $n = 0$ gelden als in Definitie 5.1 a_0 vervangen zou worden door $\frac{1}{2}a_0$. In dat geval zou $a_0 = 2c_0$, en (met $b_0 = 0$) zou in (36) en (37) het geval $n = 0$ ook niet meer apart hoeven te worden genoemd. In sommige boeken wordt voor deze notatie gekozen.

5.4 De Fourierreeks van een funktie

Stelling 5.14 roept de vraag op, welke 2π-periodieke funkties te schrijven zijn als de som van een Fourierreeks. De stelling geeft een kandidaat voor die Fourierreeks. Dit geeft aanleiding tot de volgende definitie.

Definitie 5.17 Zij $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ een stuksgewijs continue 2π-periodieke funktie. Dan noemt men de getallen

$$\hat{f}(n) = \langle f, e_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx \qquad (n \in \mathbf{Z})$$

de *Fouriercoëfficiënten* van f, en de reeks $\sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}$ de *Fourierreeks* van f.

Lemma 5.18 *Zij $n \in \mathbf{Z}$. Dan geldt voor alle stuksgewijs continue funkties $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ en elke $\lambda \in \mathbf{C}$ dat:*

(a) $(\lambda f + g)^\wedge(n) = \lambda \hat{f}(n) + \hat{g}(n)$ (lineariteit van $f \mapsto \hat{f}(n)$);

(b) $|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)| dx$ *voor alle* $n \in \mathbf{Z}$.

(c) $\widehat{\bar{f}}(n) = \hat{f}(-n)$.

(d) $(\mathrm{Re}\, f)^\wedge\, (n) = \frac{1}{2}(\hat{f}(n) + \hat{f}(-n))$,

(e) $(\mathrm{Im}\, f)^\wedge\, (n) = \frac{1}{2i}(\hat{f}(n) - \overline{\hat{f}(-n)})$.

Bewijs: (a) volgt uit de in Opmerking 5.11 genoemde eigenschap (a).

(b) volgt door op de integraalformule voor $\hat{f}(n)$ de driehoeksongelijkheid voor integralen toe te passen en op te merken dat $|e^{-inx}| = 1$.

(c) volgt uit:

$$\hat{\bar{f}}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}(n) e^{-inx}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(x) e^{inx}}\, dx = \overline{\hat{f}(-n)}$$

Tenslotte volgen (d) en (e) uit (c) en (a), omdat $\mathrm{Re}\, f = \frac{1}{2}(f + \bar{f})$, $\mathrm{Im}\, f = \frac{1}{2i}(f - \bar{f})$. □

We vragen ons nu af welke stuksgewijs continue funkties $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ gegeven worden door hun Fourierreeks, d.w.z.

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e_n. \tag{42}$$

De stelling hieronder specificeert een tamelijk grote lineaire ruimte $\mathcal{R}$ van zulke funkties. Het bewijs van de stelling stellen we nog even uit. We noemen hier vast dat twee kwesties een belangrijke rol zullen spelen. In de eerste plaats moet aangetoond worden dat het orthonormale stelsel $\{e_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$ groot genoeg ('volledig') is: een $f \in \mathcal{R}$ moet volledig vast liggen door de inprodukten $\langle f, e_n \rangle = \hat{f}(n)$ $(n \in Z)$. Anders gezegd: uit $f_n \perp e_n$ $(n \in \mathbf{Z})$ moet volgen dat $f = 0$. De hierop betrekking hebbende eenduidigheidsstelling zal behandeld worden in § 5.6.

Op de tweede plaats is er de vraag welke in welke zin de reeks (42) convergeert. Op deze kwestie zal uitgebreid worden ingegaan in § 5.7.

Na deze inleiding komt dan de belangrijkste stelling uit dit hoofdstuk:

Stelling 5.19 *Zij $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ een 2π-periodieke stuksgewijze C^1 funktie. Zij E de verzameling van alle $x \in \mathbf{R}$ waar f niet continu is, en veronderstel dat voor elke $c \in E$ geldt:*

$$f(c) = \frac{1}{2}(\lim_{x\uparrow c} f(x) + \lim_{x\downarrow c} f(x)). \tag{43}$$

Dan convergeert de Fourierreeks van f op $\mathbf{R}$ puntsgewijs naar $f(x)$. Dus voor alle $x \in \mathbf{R}$ geldt:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e^{ikx}$$

en

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{44}$$

Hierbij zijn a_n en b_n gedefinieerd door de integraalformules (39)-(41)*. Bovendien is de convergentie uniform op elk interval $[a, b]$ met $[a, b] \cap E = ?$.*

Opmerking 5.20

(a) We merken op dat een 2π-periodieke funktie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ stuksgewijs C^1 is d.e.s.d.a. f een C^1-funktie is op $[0, 2\pi]$ behalve in een eindig aantal uitzonderingspunten. In elk van die uitzonderingspunten c moet gelden dat de limieten

$$\lim_{x\uparrow c} f(x), \quad \lim_{x\downarrow c} f(x), \quad \lim_{x\uparrow c} f'(x), \quad \lim_{x\downarrow c} f'(x)$$

bestaan.

(b) De verzameling E van discontinuïteitspunten is 2π-periodiek. Uit het in (a) opgemerkte volgt dat ieder begrensd interval steeds slechts eindig veel punten van E bevat.

(c) De conditie (43) is ook vervuld als $c \notin E$. Immers dan is f continu in c, dus $\lim_{x\uparrow c} f(x) = \lim_{x\downarrow c} f(x) = f(c)$.

(d) Als f continu is dan is $E = ?$.

In het vervolg zal het handig zijn te beschikken over de volgende notaties (die men ook elders in de literatuur tegenkomt) voor linker- en rechterlimiet in $a \in \mathbf{R}$ van een stuksgewijs continue funktie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$:

$$f(a-0) := \lim_{x\uparrow a} f(x) \qquad f(a+0) := \lim_{x\downarrow a} f(x).$$

Met deze notaties kan conditie (43) herschreven worden als

$$f(c) = \frac{1}{2}(f(c-0) + f(c+0)) \qquad (c \in E).$$

De bovenstaande stelling kan ook toegepast worden op een 2π-periodieke stuksgewijze C^1-funktie f die niet aan conditie (43) voldoet. Men kan f immers aanpassen in zijn discontinuïteitspunten, zonder dat daarbij de Fourierreeks van f verandert. Preciezer: definieer de funktie f_1 door $f_1 = f$ op $\mathbf{R} \setminus E$ en door

$$f_1(c) = \frac{1}{2}(f(c-0) + f(c+0)) \qquad (c \in E).$$

Dan verschilt f_1 op $[0, 2\pi]$ in slechts eindig vele punten van f, zodat $\widehat{f_1}(n) = \hat{f}(n)$ $(n \in \mathbf{Z})$. De funkties f en f_1 hebben dus dezelfde Fourierreeks. Omdat f_1 voldoet aan de voorwaarden van Stelling 5.19 concluderen we nu dat voor alle $x \in \mathbf{R}$ geldt:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)\, e^{ikx} = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}.$$

5.5 Even en oneven funkties, voorbeelden

Laat $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ aan de voorwaarden van Stelling 5.19 voldoen. Als f een *even* of een *oneven* funktie (dus $f(x) = f(-x)$ resp. $f(x) = -f(-x)$ voor alle $x \in \mathbf{R}$) dan krijgt de Fourierreeks (44) van f een eenvoudiger gedaante. Laten a_n, b_n de Fouriercoëfficiënten van f zijn, zoals gedefinieerd in (39)–(41). Dan geldt:

Lemma 5.21

(a) *Als f een even funktie is dan is $b_n = 0$ voor alle $n \geq 1$, dus $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx$. Hierbij worden de a_n gegeven door*

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(y)dy, \\ a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(y)\cos ny\, dy \qquad (n \geq 1). \end{aligned}$$

(b) *Als f een oneven funktie is, dan is $a_n = 0$ voor alle $n \geq 0$, dus $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$. Hierbij worden de b_n gegeven door:*

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(y)\sin ny\, dy \qquad (n \geq 1).$$

Bewijs: De formules in Stelling 5.15 kunnen ook in de volgende gedaante geschreven worden:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} (f(x) + f(-x))\, dx, \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (f(x) + f(-x))\cos nx\, dx \quad (n \geq 1), \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (f(x) - f(-x))\sin nx\, dx \quad (n \geq 1). \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat de b_n nul zijn als f even is en dat de a_n nul zijn als f oneven is. □

Voorbeeld 5.22 'zaagtand-funktie' Zij $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ 2π-periodiek en zij $f(x) = |x|$ als $-\pi \leq x \leq \pi$. Dan voldoet f aan de voorwaarden van Stelling 5.19 en f is een even funktie.

We berekenen:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \frac{\pi}{2}.$$

Voor $n \geq 1$ vinden we met behulp van partiële integratie:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx = \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2}.$$

Dus $a_n = 0$ als n even is en $a_n = -\frac{4}{\pi n^2}$ als n oneven is. Volgens Stelling 5.19 is

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.$$

Door $x = 0$ in te vullen vinden we:

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}.$$

Voorbeeld 5.23 'blok-funktie' Zij $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ 2π-periodiek met $f(x) = 1$ als $0 < x < \pi$, $f(x) = -1$ als $-\pi < x < 0$ en $f(0) = f(\pi) = 0$. De funktie f is oneven en voldoet aan de voorwaarden van Stelling 5.19 (ga na!). We berekenen:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx dx = \frac{2}{\pi n}(1 - (-1)^n),$$

dus $b_n = 0$ als n even is, $b_n = \frac{4}{\pi n}$ als n oneven is. Uit Stelling 5.19 volgt nu dat

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} \quad \text{voor alle } x \in \mathbf{R}.$$

Dus

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} = \frac{\pi}{4} \quad \text{voor alle } x \text{ met } 0 < x < \pi.$$

Voor $x = \frac{\pi}{2}$ is dit een bekend resultaat (zie bijvoorbeeld 1.9.4). Voor $x = \frac{\pi}{4}$ krijgen we:

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \cdots = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Wat vindt U voor $x = \frac{\pi}{3}$ en voor $x = \frac{\pi}{6}$? Zie ook Opgave B.5.16, waar dergelijke reeksen op een iets andere manier gevonden worden.

5.6 De eenduidigheidsstelling

In deze paragraaf zullen we bewijzen dat twee verschillende continue 2π-periodieke funkties verschillende Fourierreeksen hebben. Het is daartoe voldoende te bewijzen dat een continue 2π-periodieke funktie waarvan alle Fouriercoëfficiënten nul zijn, de nulfunktie is (bekijk bij twee funkties f_1 en f_2 de verschilfunktie $f_1 - f_2$). Het bewijs van de volgende stelling is een fraai voorbeeld van een bewijs met behulp van 'harde' analyse. Er bestaan ook bewijzen met minder rekenwerk, maar daarbij worden stellingen gebruikt die nu nog niet behandeld zijn. We beginnen met een definitie en een hulplemma.

Definitie 5.24 Onder een *trigonometrisch polynoom* verstaan we een funktie $\mathbf{R} \to \mathbf{C}$ van de vorm

$$p(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx},$$

met $N \in \mathbf{N}$ en $c_n \in \mathbf{C}$ $(-N \leq n \leq N)$.

Lemma 5.25 *Zij $a \in \mathbf{R}$, $0 < \delta < \frac{\pi}{4}$. Dan is er voor iedere $M > 0$ een trigonometrisch polynoom p zo dat voor alle $x \in [a - \pi, a + \pi]$ geldt:*

(a) $|x - a| \geq \delta \Rightarrow |p(x)| \leq 1$;

(b) $|x - a| \leq \delta \Rightarrow p(x) \geq 1$;

(c) $|x - a| \leq \frac{1}{2}\delta \Rightarrow p(x) \geq M$.

De trigonometrische polynomen q en p.

Bewijs: Omdat een trigonometrisch polynoom door verschuiving overgaat in een trigonometrisch polynoom, kunnen we zonder verlies van algemeenheid aannemen dat $a = 0$. Definieer $q(x) = \cos x + 1 - \cos\delta$. Voor alle $x \in [-\delta, \delta]$ geldt: $\cos x \geq \cos\delta$, dus $q(x) \geq 1$. Voor $x \in [-\pi, \pi]$ met $|x| \geq \delta$ geldt $-1 \leq x \leq \cos\delta$, dus $-1 \leq q(x) \leq 1$. Zij $p = q^N$ $(N \in \mathbf{N})$. Dan is p een trigonometrisch polynoom, en uit de bovenstaande schattingen volgt dat p voldoet aan (a) en (b).

Voor x met $|x| \leq \frac{1}{2}\delta$ geldt dat $\cos x \geq \cos(\frac{1}{2}\delta)$, dus $q(x) \geq 1 + \varepsilon$, waarbij $\varepsilon = \cos\delta - \cos(\frac{1}{2}\delta) > 0$. Door N voldoende groot te kiezen bereiken we dat $(1+\varepsilon)^N > M$. Voor dergelijke N voldoet p dus aan de laatste schatting (c). $\square$

Stelling 5.26 (Eenduidigheidsstelling). *Laat $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ een continue en 2π-periodieke funktie zijn. Als $\hat{f}(n) = 0$ voor alle $n \in \mathbf{Z}$, dan is $f = 0$.*

Bewijs: We veronderstellen eerst dat de funktie f reëelwaardig is, en dat $\hat{f} = 0$. Als $f \neq 0$, dan is er een $a \in]-\pi, \pi]$ met $f(a) \neq 0$. Door eventueel over te gaan op de funktie $-f$ zien we dat we kunnen veronderstellen dat $f(a) > 0$. Kies δ met $0 < \delta < \frac{\pi}{4}$ zo dat voor alle x met $|x - a| < \delta$ geldt: $|f(x) - f(a)| < \frac{1}{2}f(a)$, dus $f(x) > \frac{1}{2}f(a)$. Kies $M > 0$ zo dat $\delta f(a)M > 4\pi\|f\|_{([-\pi,\pi])}$. Dan is er een trigonometrisch polynoom p als in het bovenstaande lemma. Uit $\hat{f} = 0$ volgt dat $\langle p, f\rangle = 0$.

Anderzijds volgt door toepassing van de driehoeksongelijkheid dat:

$$\langle p, f\rangle = \int_{a-\delta}^{a-\delta+2\pi} p(x)\,dx \geq |I_1| - |I_2|,$$

waarbij I_1 het stuk van de integraal over $[a-\delta, a+\delta]$ is, en I_2 de integraal over het resterende stuk. Op het interval $[a-\delta, a+\delta]$ is pf positief, dus:

$$I_1 = \int_{a-\delta}^{a+\delta} p(x)\,f(x)\,dx \geq \int_{a-\frac{1}{2}\delta}^{a+\frac{1}{2}\delta} p(x)\,f(x)\,dx \geq \int_{a-\frac{1}{2}\delta}^{a+\frac{1}{2}\delta} M\,\frac{f(a)}{2}\,dx \geq \frac{\delta M f(a)}{2}.$$

Voorts geldt:

$$|I_2| = \left|\int_{a+\delta}^{a-\delta+2\pi} p(x)\,f(x)\,dx\right| \leq \int_{a+\delta}^{a-\delta+2\pi} |f(x)|\,dx \leq 2\pi\|f\|_{(\mathbf{R})}.$$

Combineren we de twee bovenstaande schattingen dan zien we dat:

$$\langle p, f\rangle \geq |I_1| - |I_2| \geq \frac{\delta M f(a)}{2} - 2\pi\|f\|_{(\mathbf{R})} > 0,$$

tegenspraak. Hiermee is de stelling bewezen voor reëelwaardige f.

Veronderstel tenslotte dat f complexwaardig is, en dat $\hat{f} = 0$. Zij $f = f_1 + if_2$ de splitsing van f in reëel en imaginair deel. Dan zijn f_1 en f_2 continue 2π-periodieke funkties $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Met Lemma 5.18 (d,e) volgt dat $\widehat{f_1} = \widehat{f_2} = 0$. Met behulp van het eerste deel van het bewijs concluderen we dat $f_1 = f_2 = 0$, dus $f = 0$. □

5.7 Convergentie van de Fourierreeksen

Het doel van deze paragraaf is Stelling 5.19 te bewijzen. We zullen dit eerst doen voor continue stuksgewijze C^1 funkties, en tenslotte voort algemene stuksgewijze C^1-funkties.

We beginnen met een nuttig lemma voor continue funkties. Als $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ een stuksgewijs continue 2π-periodieke funktie is, dan schrijven we

$$\|f\|_2 := \langle f, f\rangle^{1/2} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Lemma 5.27 *Zij $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ een 2π-periodieke stuksgewijs continue funktie. Dan convergeert de reeks $\sum_{n\in\mathbf{Z}} |\hat{f}(n)|^2$ convergeert, en er geldt:*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 \leq \|f\|_2^2.$$

Opmerking 5.28 Men kan aantonen dat het $\leq$ teken vervangen kan worden door $=$. Wij zullen dit later aantonen onder de zwaardere eis dat f stuksgewijs C^1 is.

Bewijs: Zij $N \in \mathbf{N}$, en beschouw het trigonometrische polynoom

$$p_N = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e_n.$$

Dan is

$$\langle f, p_N \rangle = \sum_{n=-N}^{N} \overline{\hat{f}(n)} \langle f, e_n \rangle = \sum_{n=-N}^{N} |\hat{f}(n)|^2 = \langle p_N, p_N \rangle.$$

Hieruit volgt dat $p_N \perp p_N - f$ ten aanzien van het inprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dus:

$$\begin{aligned} \langle f, f \rangle &= \langle (f - p_N) + p_N, (f - p_N) + p_N \rangle \\ &= \langle f - p_N, f - p_N \rangle + \langle p_N, p_N \rangle \\ &\geq \langle p_N, p_N \rangle = \textstyle\sum_{n=-N}^{N} |\hat{f}(n)|^2. \end{aligned}$$

Deze schatting geldt voor elke N : derhalve is de rij van symmetrische partiële sommen van de tweezijdige reeks $\sum_{n \in \mathbf{Z}} |\hat{f}(n)|^2$ begrensd door $\langle f, f \rangle = \|f\|_2^2$. Omdat de termen van deze tweezijdige reeks positief zijn volgt hieruit de convergentie van de tweezijdige reeks, alsmede de verlangde schatting. □

Lemma 5.29 *Zij $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ een 2π-periodieke continue stuksgewijze C^1-funktie. Dan geldt voor elke $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$ dat:*

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{in} \widehat{f'}(n).$$

Bewijs: Laten $-\pi \leq p_1 < p_2 < \ldots < p_r \leq \pi$ de in $[-\pi, \pi]$ gelegen discontinuïteitspunten van f' zijn. Dan is voor iedere $1 \leq j < r$ de beperking van f tot $[p_j, p_{j+1}]$ een C^1-funktie. Met partiële integratie volgt derhalve dat:

$$\int_{p_j}^{p_{j+1}} f(t)\, e^{-int}\, dt = \left[f(t) \frac{-e^{-int}}{in} \right]_{p_j}^{p_{j+1}} + \int_{p_j}^{p_{j+1}} f'(t) \frac{e^{-int}}{in}\, dt.$$

Tellen we deze gelijkheden voor $j = 1, \ldots, r-1$ bij elkaar op, dan volgt:

$$\begin{aligned} 2\pi \hat{f}(n) &= \left[f(t) \frac{-e^{-int}}{in} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{in} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) e^{-int}\, dt \\ &= \frac{i}{n} [\, f(\pi)\, e^{-in\pi} - f(-\pi)\, e^{in\pi}\,] + 2\pi \frac{1}{in} \widehat{f'}(n) \\ &= 2\pi \frac{1}{in} \widehat{f'}(n). \end{aligned}$$

□

We zijn nu gereed om Stelling 5.19 te bewijzen voor een *continue* stuksgewijze C^1 funktie.

Lemma 5.30 *Zij $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ een 2π-periodieke continue stuksgewijze C^1 funktie. Dan geldt:*

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) e^{inx} \qquad (x \in \mathbf{R})$$

waarbij de reeks uniform absoluut convergent is.

Bewijs: Laat $N_1, N_2 \in \mathbf{N}$ zijn, en beschouw de som

$$s(N_1, N_2) = \sum_{n=-N_1}^{N_2} |\hat{f}(n)|.$$

Uit Lemma 5.29 volgt dat $|\hat{f}(n)| = |n|^{-1}\,|\widehat{f'}(n)|$ voor alle $n \neq 0$. Omdat f' stuksgewijs continu is volgt uit Lemma 5.27 dat

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} |\widehat{f'}(n)|^2 \leq \langle f', f'\rangle.$$

Door toepassing van de Cauchy-Schwartz ongelijkheid voor het standaardinprodukt op $\mathbf{C}^{N_1+N_2}$ zien we nu dat

$$\begin{aligned} s(N_1, N_2) &= |\hat{f}(0)| + \sum_{\substack{n=-N_1\\ n\neq 0}}^{N_2} |n|^{-1}|\widehat{f'}(n)| \\ &\leq |\hat{f}(0)| + \left(\sum_{\substack{n=-N_1\\ n\neq 0}}^{N_2} |\widehat{f'}(n)|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{\substack{n=-N_1\\ n\neq 0}}^{N_2} |n|^{-2}\right)^{1/2} \\ &\leq |\hat{f}(0)| + 2\,\langle f', f'\rangle^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Deze schatting geldt voor alle $N_1, N_2 \in \mathbf{N}$. De rijen van partiële sommen van $\sum_{n\geq 0} |\hat{f}(n)|$ en $\sum_{n\geq 1} |\hat{f}(-n)|$ zijn derhalve begrensd. Hieruit concluderen we dat $\sum_{n\in\mathbf{Z}} |\hat{f}(n)|$ absoluut convergent is. Met de stelling van Weierstrass concluderen we nu dat de reeks $\sum_{n\in\mathbf{Z}} \hat{f}(n)e^{inx}$ uniform absoluut convergeert op $\mathbf{R}$. Het bewijs wordt tenslotte voltooid door toepassing van Stelling 5.26. $\square$

Voordat we het bewijs van Stelling 5.19 in algemeenheid geven concentreren we ons op een prototype van een stuksgewijze C^1 funktie met een sprongdiscontinuïteit. We definiëren de funktie $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ door

$$\varphi(x) = \frac{x}{2} \qquad (-\pi < x < \pi),$$

door $\varphi(\pi) = 0$, en door 2π-periodieke voortzetting. Merk op dat φ de voorwaarden van Stelling 5.19 vervult. De Fouriercoëfficiënten a_n en b_n van φ worden gevonden door de integraalformules (39)–(41) toe te passen. Omdat φ oneven is, is $a_n = 0$ $(n \geq 0)$ (zie de redenering in het bewijs van Lemma 5.21). Verder geldt voor $n \geq 1$ dat:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\sin nt\; dt \\ &= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{t}{2}\frac{\cos nt}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\frac{\cos nt}{n}\; dt\right] \\ &= -\frac{\cos n\pi + \cos(-n\pi)}{2n} + 0 = \frac{(-1)^{n+1}}{n}. \end{aligned}$$

De funktie φ wordt gegeven door zijn Fourierreeks:

Lemma 5.31 *Voor alle $t \in \mathbf{R}$ geldt:*

$$\varphi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nt. \tag{45}$$

De reeks convergeert uniform op ieder gesloten en begrensd interval dat disjunct is met de verzameling $\pi + 2\pi\mathbf{Z}$.

Bewijs: We brengen in herinnering dat voor alle $z \in \mathbf{C}$ met $|z| \leq 1$, $z \neq -1$ geldt:

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n. \tag{46}$$

Is $t \in \mathbf{R}, |t| < \pi$, dan ligt $z = e^{it}$ op de afsluiting va de eenheidscirkel, terwijl $z \neq -1$. Derhalve geldt voor zulke t dat:

$$\log(1+e^{it}) = \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{int}. \tag{47}$$

Door hiervan het inaginaire deel te nemen vinden we:

$$\arg(1+e^{it}) = \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nt.$$

Het linkerlid kan eenvoudiger uitgedrukt worden. Immers, er geldt:

$$1 + e^{it} = e^{\frac{it}{2}}\,(e^{\frac{it}{2}} + e^{-\frac{it}{2}}) = 2\cos t\; e^{\frac{it}{2}},$$

waaruit volgt dat $\arg(1+e^{it}) = \frac{t}{2}$ $(|t| < \pi)$. We concluderen dat formule (45) geldt voor alle $t \in\,]-\pi, \pi[$. Nu is $\varphi(\pi) = 0$, terwijl invullen van $t = \pi$ in de reeks (45) ook nul geeft. Formule (45) geldt dus voor alle $t \in\,]-\pi, \pi]$. Omdat linker en rechterlid van de formule 2π-periodiek zijn, volgt dat (45) geldt voor alle $t \in \mathbf{R}$.

Tenslotte bewijzen we nog de bewering betreffende de uniforme convergentie. De reeks (46) convergeert uniform op iedere verzameling van het type $V_\varepsilon = \overline{B(0,1)} \setminus B(-1,\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$ (zie Lemma 4.2). Zij nu $0 < r < \pi$. Dan is er een $\varepsilon > 0$ zo dat $e^{it} \in V_\varepsilon$ voor alle $t \in [-\pi+r, \pi-r]$. Hieruit volgt dat de reeks (47) uniform convergeert op $[-\pi+r, \pi-r]$. Hetzelfde geldt dus voor de reeks (45) die verkregen wordt door van (47) het imaginaire deel te nemen. Het bewijs wordt voltooid door gebruik te maken van de 2π-periodiciteit van φ en zijn Fourierreeks. □

Gevolg 5.32 *Voor iedere $a \in \mathbf{R}$ geldt dat de verschoven funktie $T_a\varphi : x \mapsto \varphi(x-a)$ voldoet aan de conclusies van Stelling 5.19.*

Bewijs: Uit het voorgaande lemma volgt dat

$$\begin{aligned} \varphi(x-a) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n(x-a) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}\cos na}{n} \cos nx - \frac{(-1)^{n+1}\sin na}{n} \sin nx \right) \end{aligned}$$

waarbij de laatste reeks uniform convergeert op ieder gesloten en begrensd interval dat disjunkt is met $a + \pi + 2\mathbf{Z}\pi$; de laatste verzameling is precies de verzameling discontinuïteitspunten van de verschoven funktie $T_a\varphi$. Men gaat tenslotte gemakkelijk na dat de gevonden reeks inderdaad de Fourierreeks voor $T_a\varphi$ is. □

Bewijs van Stelling 5.19: Laten $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$ de in $]-\pi, \pi]$ gelegen discontinuïteitspunten van f zijn. Voor iedere $1 \leq j \leq r$ definiëren we de discontinuïteitssprong s_j door:

$$s_j = f(p_j + 0) - f(p_j - 0).$$

Definieer de funkties $g_j : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ $(1 \leq j \leq r)$ door:

$$g_j(x) = \frac{s_j}{\pi} T_{\pi - p_j} \varphi.$$

Dan is g_j continu op $]-\pi, \pi] \setminus \{p_j\}$, terwijl

$$\begin{aligned} g_j(p_j + 0) - g_j(p_j - 0) &= \frac{s_j}{\pi} \left(\varphi(p_j - p_j + \pi + 0) - \varphi(p_j - p_j + \pi - 0)\right) \\ &= \frac{s_j}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = s_j. \end{aligned}$$

De 'sprong' in p_j is dus voor g_j precies zo groot als die voor f. Verder is $f(p_j+0) = f(p_j) + \frac{1}{2}s_j$ en $g(p_j + 0) = \frac{1}{2}s_j$. Derhalve geldt dat

$$\lim_{x \downarrow p_j} f(x) - g_j(x) = \lim_{x \uparrow p_j} f(x) - g_j(x) = f(p_j) = f(p_j) - g_j(p_j),$$

en we concluderen dat $f - g_j$ continu is in p_j. Voor $i \neq j$ is de funktie g_i continu in p_j. Hieruit volgt dat de funktie

$$v = f - \sum_{j=1}^{r} g_j.$$

continu in elk punt van $]-\pi, \pi]$ is, en wegens de 2π-periodiciteit dus op $\mathbf{R}$.

Merk op dat $\{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$ precies gelijk is aan de verzameling van punten in $]-\pi, \pi]$ waar de funktie $g = \sum_{1 \leq j \leq r} g_j$ discontinu is. Uit Gevolg 5.32 leiden we af dat de funktie g voldoet aan de conclusies van Stelling 5.19.

Er geldt $f = g + v$. In het bovenstaande zagen we dat de funktie v continu is. Wegens Lemma 5.30 voldoet ook v dus aan de conclusies van Stelling 5.19. Uit het feit dat g en v voldoen aan de conclusies van Stelling 5.19 volgt dat ook f voldoet aan de conclusies van Stelling 5.19. □

5.8 De gelijkheid van Parseval

Tenslotte zullen we de volgende stelling bewijzen.

Stelling 5.33 *Laat $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ een 2π-periodieke stuksgewijze C^1–funktie zijn. Dan geldt:*

$$\langle f, f \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2$$

Bewijs: Definieer de ruimtes $P^0 \subset P$ als in Opmerking 5.11. We veronderstellen eerst dat $f \in P^0$. Dan convergeert de Fourierreeks $\sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}$ uniform absoluut met som $f(x)$ (Lemma 5.30). Derhalve geldt:

$$\langle f, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}(n)} e^{-inx} \, dx$$

Wegens Stelling B.4.8.2.(ii) mag term voor term geïntegreerd worden en we vinden:

$$\langle f, f\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}(n)}\,\langle f, e_n\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2$$

Hiermee is de stelling bewezen voor continue f.

Om het bewijs te leveren voor algemene f is het handig over de volgende notatie te beschikken. Als $\varphi \in P$, $N \in \mathbf{N}$ dan definiëren we de volgende vector in $\mathbf{C}^{2N+1}$:

$$\hat{\varphi}_N := (\hat{\varphi}(-N), \hat{\varphi}(-N+1), \ldots, \hat{\varphi}(N-1), \hat{\varphi}(N)).$$

Noteren we de Euclidische norm op $\mathbf{C}^{2N+1}$ met $\|\cdot\|_e$, dan zien we dat voor alle $\varphi \in P$, $N \in \mathbf{N}$ geldt:

$$\|\hat{\varphi}_N\|_e^2 = \sum_{n=-N}^{N} |\hat{\varphi}(n)|^2.$$

Met Lemma 5.27 volgt derhalve dat voor alle $\varphi \in P$ geldt:

$$\|\hat{\varphi}_N\|_e \leq \|\varphi\|_2 \qquad (N \in \mathbf{N}). \tag{48}$$

Deze ongelijkheid zal in de rest van het bewijs steeds een cruciale rol spelen.

Fixeer $f \in P$, en zij $\varepsilon > 0$. Wegens het onderstaande lemma is er een $g \in P^0$ zo dat $\|f - g\|_2 < \varepsilon$. Op grond van schatting (48) volgt hieruit dat

$$\|\hat{f}_N - \hat{g}_N\|_e < \varepsilon \qquad \text{voor alle} \qquad N \in \mathbf{N}.$$

De gewenste stelling geldt voor g (wegens het eerste deel van het bewijs). Derhalve bestaat er een $N \in \mathbf{N}$ zo dat

$$\|\hat{g}_N\|_e \geq \Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{g}(n)|^2\Big)^{1/2} - \varepsilon = \|g\|_2 - \varepsilon$$

Met de driehoeksongelijkheid voor $\|\cdot\|_e$ concluderen we nu dat:

$$\begin{aligned}
\left(\textstyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2\right)^{1/2} &\geq \|\hat{f}_N\|_e \geq \|\hat{g}_N\|_e - \|\hat{g}_N - \hat{f}_N\|_e \\
&\geq \|\hat{g}_N\|_e - \varepsilon \geq \|g\|_2 - 2\varepsilon \\
&\geq \|f\|_2 - \|f - g\|_2 - 2\varepsilon \\
&\geq \|f\|_2 - 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

Deze schatting geldt voor alle $\varepsilon > 0$. Hieruit leiden we af dat

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \|\hat{f}(n)\|^2 \geq \|f\|_2.$$

De omgekeerde ongelijkheid was reeds bewezen in Lemma 5.27.

$\square$

Lemma 5.34 *Zij $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ een 2π–periodieke stuksgewijze C^1-funktie. Dan bestaat er voor elke $\varepsilon > 0$ een continue 2π-periodieke stuksgewijze C^1 funktie $g : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ zo dat*

$$\|f - g\|_2 < \varepsilon.$$

Bewijs: We gebruiken weer de notaties P en P^0 uit Opmerking 5.11.

Kies een punt $a \in \mathbf{R}$ waarin f continu is. Dan is f continu in de eindpunten van het interval $I = [a, a + 2\pi]$. Zij $c_1 < c_2 < \cdots < c_r$ de verzameling van punten in I waarin f discontinu is. Kies een $m > 0$ zo dat $m < c_{j+1} - c_j$ voor alle $1 \leq j \leq r - 1$ en zo dat $m < c_1 - a$ en $m < a + 2\pi - c_r$. Fixeer $\eta > 0$ zo dat $\eta < \frac{1}{2}m$. Aan het eind van het bewijs zullen we nog een andere conditie aan η opleggen. Met de huidige conditie hebben we bereikt dat de intervallen $I_j = [c_j - \eta, c_j + \eta]$ onderling disjunkt zijn en in het interval $]a, a + 2\pi[$ liggen.

We gaan de funktie op ieder van de intervallen $I_j + 2k\pi$ veranderen zo dat een *continue* funktie $g \in P^0$ ontstaat met $\|f - g\|_2 < \varepsilon$. Dit doen we door vermenigvuldiging met een geschikte funktie $\varphi \in P^0$. Daarbij zullen we ervoor zorgen dat de funktie φ 1 is op $I \backslash I_1 \cap \ldots \cup I_r$, zodat $g = \varphi f$ niet al te zeer van f zal verschillen. Verder zullen we ervoor zorgen dat φ nul is in een omgeving van ieder discontinuïteitspunt van f, zodat $g = \varphi f$ continu is.

De constructie van φ is als volgt. Laat $1 \leq j \leq r$ zijn. Definieer de funktie $\varphi_j : I \to \mathbf{C}$ door

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} 0 & \text{als} \quad |x - c_j| \leq \frac{1}{2}\eta, \\ \left|\frac{2(x-c_j)}{\eta}\right| & \text{als} \quad \frac{1}{2}\eta \leq |x - c_j| \leq \eta, \\ 1 & \text{als} \quad |x - c_j| \geq \eta. \end{cases}$$

Dan is $\varphi_j(a) = \varphi_j(a + 2\pi)$, dus we kunnen φ_j op unieke voortzetten tot een 2π-periodieke funktie. De funktie φ_j is continu en stuksgewijs C^1 op $[a, a + 2\pi]$, dus $\varphi_J \in P^0$. Definieer $\varphi = \varphi_1 \cdots \varphi_r$ (zie figuur). Dan $\varphi \in P^0$. De funktie $g := \varphi f$ behoort derhalve tot P. Voor iedere $1 \leq j \leq r$ geldt $\varphi = \varphi_j = 0$ op $[c_j - \frac{1}{2}\eta, c_j + \frac{1}{2}\eta]$, dus φ is nul op een omgeving van ieder discontinuïteitspunt van f. Hieruit volgt dat g continu is, dus $g \in P^0$.

De funktie φ.

Tenslotte tonen we aan dat $\|f - g\|_2$ aan de vereiste schatting voldoet. Er geldt $\varphi_j = 1$ op $I \setminus I_j$ $(1 \leq j \leq r)$, dus $\varphi = 1$ op $I \setminus I_1 \cup \ldots \cup I_r$. We concluderen dat $g = f$ op $I \setminus I_1 \cup \ldots \cup I_r$.

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned}
\|g-f\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} |g(x)-f(x)|^2\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{r}\int_{I_j} |g(x)-f(x)|^2\,dx \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{r}\int_{I_j} (|g(x)|+|f(x)|)^2\,dx
\end{aligned}$$

Er geldt $0 \leq \varphi_j \leq 1$ $(1 \leq j \leq r)$, dus $|\varphi| \leq 1$, en $|g(x)| \leq |f(x)|$ voor alle $x \in \mathbf{R}$. Derhalve is

$$\begin{aligned}
\|g-f\|_2^2 &\leq \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{r}\int_{I_j} 4\,|f(x)|^2\,dx \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{r} 8\eta\,\|f\|^2_{(\mathbf{R})} = \frac{4r\eta}{\pi}\,\|f\|^2_{(\mathbf{R})}.
\end{aligned}$$

Door $\eta < \varepsilon^2\pi\,(4r\|f\|^2_{(\mathbf{R})}+1)^{-1}$ te kiezen bereiken we dat $\|f-g\|_2 < \varepsilon$. □

Voorbeeld 5.35 Beschouw de 2π-periodieke funktie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{C}$ gedefinieerd door $f(x)=x$ voor $-\pi < x \leq \pi$. Dan is f stuksgewijs C^1, dus Stelling 5.33 is toepasbaar. Enerzijds vinden we

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{\pi^2}{3}. \tag{49}$$

Anderzijds vinden we met partiële integratie dat, voor $n \neq 0$:

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-inx}\,dx = \frac{(-1)^{n+1}}{in}.$$

Voorts is $\hat{f}(0)=0$. Derhalve is

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Deze som is gelijk aan (49). Er volgt:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Einde van de cursus Analyse B-2