Extra Opgaven

Analyse B-2

E.P. van den Ban

Mathematisch Instituut
Universiteit Utrecht
Voorjaar 1994

Extra opgaven Analyse B-2

Voorjaar 1994

Inleiding: Bij het college Analyse B-2 zullen opgaven uit het Analyse B diktaat opgegeven worden, alsmede extra opgaven uit de voor u liggende bundel. De opgaven uit het diktaat worden als volgt genoteerd: Opgave 7.29 betekent: opgave 29 bij hoofdstuk 7. Extra opgaven uit de huidige bundel worden genoteerd als E_2-1, E_2-2, enz.

Opgave E_2**-1** Definieer $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ door:

$$f(a) = \int_0^1 \frac{e^{-a^2(1+t^2)}}{1+t^2}\, dt.$$

(a) Bewijs m.b.v. een substitutie van variabelen dat geldt:

$$f'(a) = -2e^{-a^2} \int_0^a e^{-x^2}\, dx \quad (a \in \mathbf{R}).$$

Definieer $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ door:

$$g(a) = f(a) + \left(\int_0^a e^{-x^2}\, dx \right)^2.$$

(b) Bewijs dat $g' = 0$ op $\mathbf{R}$; en concludeer dat $g(a) = \frac{\pi}{4}$, voor alle $a \in \mathbf{R}$.

(c) Bewijs dat $0 \leq f(a) \leq e^{-a^2}$, voor alle $a \in \mathbf{R}$; toon vervolgens aan dat geldt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

Opgave E_2**-2**

(a) Toon aan dat door

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \cos(xt)\, dt$$

een differentieerbare funktie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ gedefinieerd wordt.

(b) Toon aan dat $xf(x) = -2f'(x)$, voor alle $x \in \mathbf{R}$.

(c) Toon aan dat

$$f(x) = \sqrt{\pi}\, e^{-x^2/4}$$

voor alle $x \in \mathbf{R}$. Hint: beschouw de funktie $g(x) = f(x)\, e^{x^2/4}$.

Opgave E$_2$**-3** Toon aan dat:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^{k+1}} = \frac{(2k)!\,\pi}{2^{2k+2}\,(k!)^2}.$$

Hint: differentieer de funktie $t \mapsto \int_0^\infty (t+x^2)^{-1}dx$. Zie ook opgave B.8.4.

Opgave E$_2$**-4**

(a) Laat zien dat de integraal
$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$$
convergeert voor alle $x > 0$.

(b) Laat zien dat de zo gedefinieerde *Gamma*-funktie Γ willekeurig vaak differentieerbaar is op $]0,\infty[$ en dat $\Gamma''(x) > 0$ voor alle $x > 0$.

(c) Laat zien dat voor alle $x > 0$ geldt:
$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

(d) Toon aan dat voor alle gehele $n \geq 0$ geldt: $\Gamma(n+1) = n!$.

(e) Laat zien dat voor alle $x > 0$ geldt:
$$\Gamma(x) = 2\int_0^\infty e^{-u^2}u^{2x-1}\,du.$$

(f) Laat zien dat voor alle $n \geq 0$ geldt:
$$\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n-1)!\sqrt{\pi}}{(n-1)!2^{2n-1}}.$$

Opgave E$_2$**-5**

(a) Toon aan dat voor alle $x, y > 0$:
$$\frac{y}{(x^2+y^2)} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{y}}.$$

(b) Toon aan dat:
$$\int_0^1\int_0^1 \frac{y}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 \frac{y}{x^2+y^2}\,dy\,dx,$$
zonder één van beide integralen expliciet te berekenen; vgl. Opgave B.8.1.

Opgave E$_2$**-6** Toon aan dat door

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-t}\sin xt\;dt \qquad \text{en} \qquad g(x) = \int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{t+x^2}\,dt$$

continue funkties $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ gedefinieerd worden.

Opgave E$_2$-**7** Laat zien dat door

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{t+x^2}}\,dt$$

een continue funktie $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ gedefinieerd wordt. Aanwijzing: verdeel de integraal eerst in twee stukken.

Opgave E$_2$-**8** We definiëren de continue funktie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ door

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & (-1 \leq x \leq 0); \\ 1-x & (0 \leq x \leq 1); \\ 0 & (|x| > 1). \end{cases}$$

Bepaal de Fourier-getransformeerde $\widehat{f}$ van f.

Opgave E$_2$-**9** Gegeven is een C^∞–funktie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$. Toon aan dat de volgende beweringen equivalent zijn:

(a) $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$;

(b) voor alle $p, q \in \mathbf{R}$ geldt: $\lim_{x\to\infty} x^p f^{(q)}(x) = \lim_{x\to-\infty} x^p f^{(q)}(x) = 0$.

Opgave E$_2$-**10** Toon aan dat de funktie $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ gedefinieerd door

$$h(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

tot $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ behoort.

Opgave E$_2$-**11** Gegeven is een continue funktie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ waarvoor de integraal over $\mathbf{R}$ absoluut convergent is. Voor $a \in \mathbf{R}$ definiëren we de funktie $f_a : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ door $f_a(x) = e^{iax} f(x)$. Toon aan dat

$$\widehat{f_a}(\xi) = \widehat{f}(\xi - a) \qquad (\xi \in \mathbf{R}).$$

Opgave E$_2$-**12** Voor een tweetal continue funkties $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ schrijven we

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^\infty f(x) g(x)\,dx,$$

mits de integraal absoluut convergent is.

(a) Toon aan dat $\langle f, g\rangle$ gedefinieerd is als f een begrensde continue funktie is en $g \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$.

(b) Toon aan dat voor iedere begrensde continue funktie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ geldt:

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^\infty f(\varepsilon x) e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = \sqrt{2\pi}\, f(0).$$

We beschouwen de funktie $h : x \mapsto e^{-\frac{1}{2}x^2}$ en definiëren voor $\varepsilon > 0$ de funktie $h_\varepsilon : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ door

$$h_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} h(\varepsilon^{-1}x).$$

(c) Toon aan dat $h_\varepsilon \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ voor alle $\varepsilon > 0$.

(d) Toon aan dat voor elke begrensde continue funktie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ geldt:

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \langle f, h_\varepsilon \rangle = \sqrt{2\pi} f(0).$$

(e) Toon aan: als $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ een begrensde continue funktie is met $\langle f, \varphi \rangle = 0$ voor alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ dan is $f = 0$. Hint: Toon eerst aan dat $f(0) = 0$. Gebruik daarna een translatie argument.

Opgave E$_2$**-13** Doel van deze opgave is Stelling 1.21 uit de Leeswijzer Analyse B-2 te bewijzen. De vorige opgave is hierbij nodig. In het vervolg veronderstellen we dat $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ een continue funktie is die absoluut oneigenlijk Riemann-integreerbaar is over $\mathbf{R}$, terwijl ook $\widehat{f}$ dat is. Voor een funktie $g : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ definiëren we de gespiegelde funktie $Sg : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ door $Sg(x) = g(-x)$.

(a) Toon aan dat voor een continue funktie $g : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ die absoluut oneigenlijk integreerbaar is over $\mathbf{R}$ geldt:

$$\widehat{Sg} = S\widehat{g}.$$

(b) Zij $g : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ een begrensde continue funktie. Toon aan dat $\langle Sf, g \rangle = \langle f, Sg \rangle$.

(c) Toon aan dat voor alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ geldt:

$$\langle \widehat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \widehat{\varphi} \rangle$$

(d) Toon aan dat de Fourier-inversieformule voor f herschreven kan worden als:

$$S\widehat{\widehat{f}} = 2\pi f.$$

(e) Toon aan dat voor alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ geldt:

$$\langle S\widehat{\widehat{f}}, \varphi \rangle = 2\pi \langle f, \varphi \rangle.$$

(f) Toon aan dat de Fourier-inversieformule geldt voor f. Hint: gebruik Opgave $E_2 - 11$.

Opgave E$_2$**-14** Toon aan dat er voor iedere $g \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ precies één $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ bestaat zo dat

$$f'' - f = g.$$

Opgave E$_2$-**15** Gegeven is een veelterm $p(\xi) = a_n\xi^n + \cdots + a_0$ $(a_k \in \mathbf{C})$ met de eigenschap dat $p(\xi) \neq 0$ voor alle $\xi \in \mathbf{R}$. We schrijven $p(D)$ voor de differentiaal operator

$$p(D) = \sum_{j=0}^{n} a_j D^j = \sum_{j=0}^{n} a_j (\frac{1}{i}\frac{d}{dx})^j.$$

Toon aan dat er voor iedere $g \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ precies één $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ bestaat zo dat:

$$p(D)f = g.$$

Opgave E$_2$-**16** Van een C^2–funktie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ is gegeven dat f, f' en f'' absoluut integreerbaar zijn over $\mathbf{R}$. Toon aan:

(a) f'' heeft als Fourier getransformeerde: $-\xi^2 \widehat{f}$;

(b) er is een $M > 0$ zo dat $|\xi^2 \widehat{f}(\xi)| \leq M$ voor alle $\xi \in \mathbf{R}$;

(c) voor elke $x \in \mathbf{R}$ geldt:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \widehat{f}(\xi)\, d\xi.$$

Opgave E$_2$-**17** Gegeven is een tweetal Schwartz-funkties $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$.

(a) Toon aan dat voor iedere $x \in \mathbf{R}$ de integraal

$$f * g(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\, dy$$

absoluut convergent is.

(b) Toon aan dat het zo gedefinieerde *convolutieprodukt* $f * g$ van f en g een C^∞-funktie is, en dat

$$\frac{d}{dx}(f * g) = (\frac{d}{dx}f) * g.$$

(c) Toon aan dat voor alle $a, b \in \mathbf{R}$ geldt: $(1 + |a + b|) \leq (1 + |a|)(1 + |b|)$.

(d) Toon aan dat voor alle $x, y \in \mathbf{R}$ geldt:

$$\frac{1}{1 + |x - y|} \leq \frac{1 + |y|}{1 + |x|}.$$

(e) Toon aan dat de integraal van $f * g$ over $\mathbf{R}$ absoluut convergent is en dat: $\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}$.

(f) Toon aan dat $f * g \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$.

We definiëren de funktie $f^* : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ door $f^*(x) = \overline{f(-x)}$.

(g) Toon aan dat $f^* \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ en dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx = f^* * f(0).$$

(h) Toon aan dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2\, d\xi.$$

Opgave E$_2$**-18** Gegeven is een continue funktie $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbf{R}^p$. Toon aan: voor elke $\varepsilon > 0$ bestaat een $\delta > 0$ zo dat voor alle $x_1, x_2 \in [a,b]$ met $|x_1 - x_2| < \delta$ geldt:

$$\|f(x_1,y) - f(x_2,y)\| < \varepsilon \qquad \text{voor alle} \qquad y \in [c,d].$$

Opgave E$_2$**-19** Gegeven is een deelverzameling $S \subset \mathbf{R}^p$.

(a) Toon aan dat $a \in \mathbf{R}^p$ een verdichtingspunt van S is dan en slechts dan als er een rij (x_k) in S bestaat met $\lim_{k\to\infty} x_k = a$.

(b) Toon aan dat S gesloten is dan en slechts dan als voor iedere in S gelegen rij (x_k) geldt:

$$\lim_{k\to\infty} x_k \quad \text{bestaat} \quad \Rightarrow \lim_{k\to\infty} x_k \in S.$$

Opgave E$_2$**-20** Gegeven is een continue afbeelding $f : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^q$ met de eigenschap dat het volledig origineel $f^{-1}(A)$ van ieder gesloten en begrensd deel $A \subset \mathbf{R}^q$ gesloten en begrensd in $\mathbf{R}^p$ is.

(a) Laat $(x_k)_{k\geq 1}$ een rij in $\mathbf{R}^p$ zijn zo dat de rij $(f(x_k))_{k\geq 1}$ convergent is met limiet $b \in \mathbf{R}^q$. Toon aan dat (x_k) een convergente deelrij heeft. Zij a de limiet van die convergente deelrij. Toon aan dat $f(a) = b$.

(b) Gegeven is een gesloten deel $V \subset \mathbf{R}^p$. Toon aan dat $f(V)$ een gesloten deel van $\mathbf{R}^q$ is. Hint: gebruik de vorige opgave.

Opgave E$_2$**-21** Gegeven is een begrensd deel $V \subset \mathbf{R}^p$. Voorts is $a \in \mathbf{R}^p$ een punt dat niet in V ligt.

(a) Toon aan dat

$$d(a,V) := \inf\{\|x - a\| : x \in V\}$$

bestaat. We noemen dit getal de afstand van a tot V.

(b) Toon aan dat a een verdichtingspunt van V is dan en slechts dan als $d(a,V) = 0$.

Veronderstel nu bovendien dat V gesloten is.

(c) Toon aan $d(a,V) > 0$ en dat er een $b \in V$ bestaat zo dat $d(a,V) = \|a - b\|$.

Opgave E$_2$**-22** Ga na of de volgende funkties begrensd zijn op hun domein. Zo ja, bepaal dan de supnorm.

(a) $\arctan : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

(b) $\sin : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

(c) $\sin : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$

(d) $\mathbf{C} \to \mathbf{C} : z \mapsto e^z$

(e) $\{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Re}\, z < 0\} \to \mathbf{C} : z \mapsto e^z$

(f) $[0,\infty[\to \mathbf{R} : x \mapsto \sqrt{x}$

(g) $\mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$

(h) $\{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Re}\, z < 0\} \to \mathbf{C} : z \mapsto \frac{1}{1+z^2}$.

Opgave E$_2$-**23** Onderzoek in elk van de volgende gevallen de puntsgewijze en de uniforme convergentie op V van de rij funkties $(f_n)_{n\geq 1}$.

(a) $V = \mathbf{R}$, $f_n(x) = 1/(1 + x^2 + n)$.
(b) $V = \mathbf{R}$, $f_n(x) = \sin nx/(1 + x^2 + n)$.
(c) $V = [0, 1]$, $f_n(x) = n/(n + x^2)$.
(d) $V = \mathbf{R}$, $f_n(x) = n/(n + x^2)$.
(e) $V = [0, 1]$, $f_n(x) = n/(n + x^n)$.
(f) $V = [0, 1]$, $f_n(x) = (nx + 1)/(x + n)$.

Opgave E$_2$-**24** Onderzoek de puntsgewijze en de uniforme convergentie van de volgende rijen funkties.

(a) $f_n(x) = (x + n)^{-n}$ op $[0, \infty[$.
(b) $g_n(x) = (x + n)^n$ op $[0, \infty[$.
(c) $h_n(x) = e^{nx}/(1 + e^{2nx})$ op $\mathbf{R}$.

Opgave E$_2$-**25** Zij $I = [-1, 1]$. We beschouwen de lineaire ruimte $C(I)$ van continue funkties $I \to \mathbf{R}$. Voor $n \in \mathbf{N}$ definiëren we de funktie $f_n \in C(I)$ door

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & -1 \leq x \leq 0; \\ 1 - nx & 0 \leq x \leq \frac{1}{n}; \\ 0 & \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

(a) Schets de grafieken van de funkties f_n.
(b) Toon aan dat de rij $(f_n)_{n\geq 1}$ begrensd is ten aanzien van de sup-norm $\|\cdot\|_{(I)}$
(c) Toon aan dat de rij $(f_n)_{n\geq 1}$ geen deelrij heeft die uniform convergent is op I. Het analogon van de stelling van Bolzano-Weierstrass geldt derhalve niet voor de genormeerde lineaire ruimte $(C(I), \|\cdot\|_{(I)})$.

Opgave E$_2$-**26** We definiëren de funktie $R :]-1, \infty[\to \mathbf{R}$ door

$$R(x) = \log(1 + x) - x.$$

(a) Toon aan dat $\lim_{x\to 0} x^{-1}R(x) = 0$.
(b) Voor $n \in \mathbf{N}$ definiëren we de funktie r_n : $\mathbf{R}$ æ $\mathbf{R}$ door

$$r_n(x) = nR(\frac{x}{n}).$$

Toon aan dat voor iedere $M > 0$ de rij $(r_n)_{n>M}$ op $[-M, M]$ uniform convergeert naar de constante funktie 0.
(c) Definieer $\rho_n = e^{r_n}$. Toon aan dat voor iedere $M > 0$ de rij $(\rho_n)_{n>M}$ op $[-M, M]$ uniform convergeert naar de constante funktie 1.
(d) Voor $n \in \mathbf{N}$ definiëren we de funktie $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ door

$$f_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n.$$

Toon aan dat voor alle $x > -n$ geldt: $f_n(x) = e^x \rho_n(x)$.
(e) Toon aan dat de rij $(f_n)_{n\geq 0}$ uniform convergeert op $[-M, M]$ voor iedere $M > 0$.

Opgave E$_2$-**27** Zij $C(I)$ als in Opgave E$_2$-25.

(a) Laat zien dat de afbeelding $C(I) \to \mathbf{R}$,

$$f \mapsto \|f\|_1 := \int_{-1}^{1} |f(x)|\, dx$$

een norm op $C(I)$ definieert.

(b) Toon aan dat de rij $(f_n)_{n\geq 1}$ uit Opgave E$_2$-25 een Cauchy-rij ten aanzien van de norm $\|\cdot\|_1$ is. Hint: schat de lengte van het interval waarop $f_p \neq f_q$.

(c) Veronderstel dat de rij $(f_n)_{n\geq 1}$ ten aanzien van de norm $\|\cdot\|_1$ een limiet $f \in C(I)$ heeft. Toon aan dat voor deze limiet moet gelden:

$$\int_{-1}^{0} |1 - f(t)|\, dt = 0 \qquad \text{en} \qquad \int_{\rho}^{1} |f(t)|\, dt = 0$$

voor iedere $\rho > 0$.

(d) Laat zien dat de genormeerde lineaire ruimte $(C(I), \|\cdot\|_1)$ niet volledig is.

Opgave E$_2$-**28** In deze opgave is $(V, \|\cdot\|)$ een volledige genormeerde lineaire ruimte. Voorts is $T : V \to V$ een afbeelding. We veronderstellen dat er een positief reëel getal C bestaat zo dat voor alle $v, w \in V$ geldt:

$$\|Tv - Tw\| \leq C\|v - w\|.$$

(a) Toon aan: als $(v_n)_{n\geq 1}$ een convergente rij is in V dan is de rij $(Tv_n)_{n\geq 1}$ ook convergent in V, en er geldt:

$$\lim_{n\to\infty} Tv_n = T \lim_{n\to\infty} v_n.$$

We veronderstellen nu bovendien dat $C < 1$. (Een afbeelding T met deze eigenschap heet een *contractie*. Bedenk zelf eens een contractie $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$.)

(b) Toon aan dat voor alle $k \geq 1$ en alle $v \in V$ geldt:

$$\|T^k v - v\| \leq \frac{1}{1 - C}\, \|Tv - v\|.$$

Hint: schijf $T^k v - v = (T^k v - T^{k-1} v) + \cdots + (Tv - v)$.

(c) Zij v willekeurig. Toon aan dat de rij $(T^n v)_{n\geq 1}$ convergent is. Hint: gebruik het vorige onderdeel en de volledigheid van V.

(d) Zij $v \in V$, en zij $w = \lim_{n\to\infty} T^n v$. Toon aan dat $Tw = w$.

(e) Toon aan dat de afbeelding T precies één vast punt heeft, dwz. er bestaat precies één $w \in V$ met $Tw = w$.

Opgave E$_2$-**29** Gegeven zijn een $r > 0$ en continue funkties $a, b : [0, r] \to \mathbf{C}$. Voorts is gegeven een $\gamma \in \mathbf{C}$. We beschouwen het volgende probleem: vind alle differentieerbare funkties $f : [0, r] \to \mathbf{C}$ die voldoen aan de differentiaalvergelijking

$$f'(x) = a(x)f(x) + b(x) \quad (0 \leq x \leq r)$$

en bovendien aan de beginconditie:

$$f(0) = \gamma.$$

Om het bovenstaande *beginwaardeprobleem* op te lossen herschrijven we het eerst als een *integraalvergelijking.*

Zij $V := C([0,r])$ de ruimte van continue funkties $[0,r] \to \mathbf{C}$ voorzien van de sup-norm $\|\cdot\| := \|\cdot\|_{([0,r])}$. Voor $f \in V$ definiëren we de funktie $Tf : [0,r] \to \mathbf{C}$ door

$$Tf(x) = f_0 + \int_0^x [a(t)f(t) + b(t)]\, dt.$$

(a) Toon aan dat T een afbeelding $V \to V$ definieert.

(b) Toon aan dat een funktie $f \in C([0,r])$ voldoet aan het bovenstaande beginwaardeprobleem dan en slechts dan als $Tf = f$.

We veronderstellen nu dat $r\|a\| < 1$. (Merk op dat dit altijd te bereiken is door r voldoende klein te maken).

(c) Toon aan dat T een contractie is.

(d) Toon aan dat het bovenstaande beginwaardeprobleem precies één oplossing f heeft.

We beschouwen nu het speciale geval dat $b(x) = 0$, dat $a(x) = 1$ constant is, en dat $r < 1$. We beschouwen de rij van funkties f_n gedefinieerd door: f_0 is de constante funktie γ en $f_{n+1} = Tf_n$ $(n \geq 0)$.

(e) Wat kunt u zeggen over de limiet van de rij (f_n)?

(f) Bereken de funkties f_n expliciet. Wat valt u op?

(g) Beantwoord de vragen (e) en (f) nog eens, maar nu voor de rij (g_n) gedefinieerd door $g_0 = 1$ en $g_{n+1} = Tg_n$ $(n \geq 1)$. Controleer dat de rij $(f_n - g_n)_{n\geq 0}$ op $[0,r]$ uniform naar 0 convergeert.

Opgave E$_2$-**30** In deze opgave is $V \subset \mathbf{C}$. We beschouwen de ruimte $\mathcal{B}(V, \mathbf{C}^n)$ van begrensde funkties $f : V \to \mathbf{C}^n$, dwz. van funkties $f : V \to \mathbf{C}^n$ waarvoor een $M > 0$ bestaat zo dat voor alle $x \in V$ geldt: $\|f(x)\| \leq M$. Op de ruimte $\mathcal{B}(V, \mathbf{C}^n)$ definiëren we de sup-norm $\|\cdot\|_{(V)}$ door

$$\|f\|_{(V)} := \sup_{x \in V} \|f(x)\|.$$

(a) Toon aan dat de hierboven gedefinieerde sup-norm inderdaad een norm is. Convergentie ten aanzien van deze norm heet weer *uniforme* convergentie op V (maar de funkties zijn nu $\mathbf{C}^n$-waardig, i.p.v. $\mathbf{C}$-waardig).

(b) Voor een $f \in \mathcal{B}(V, \mathbf{C}^n)$ duiden we met f_j de j-de coordinaatfunktie $V \to \mathbf{C}$ aan. Toon aan dat $f_j \in \mathcal{B}(V, \mathbf{C})$, en dat:

$$\|f_j\|_{(V)} \leq \|f\|_{(V)} \leq \sum_{k=1}^n \|f_k\|_{(V)}.$$

(c) Gegeven is nu een rij (f_n) in $\mathcal{B}(V, \mathbf{C}^n)$. Toon aan dat deze rij uniform op V convergeert dan en slechts dan als voor iedere $1 \leq j \leq n$ de rij van coordinaatfunkties $(f_{nj})_{n\geq 1}$ uniform op V convergeert.

(d) Toon aan dat de ruimte $\mathcal{B}(V, \mathbf{C}^n)$ volledig is.

(e) Toon aan dat Stelling B.4.8.2 doorgaat voor een rij van continue funkties $f_n : [a,b] \to \mathbf{C}^n$. (Merk op dat hieruit volgt dat de Stellingen B.4.9.1, B.4.9.4, B.4.9.6 en B.4.9.7 ook doorgaan voor $\mathbf{C}^n$-waardige funkties.)

In het vervolg identificeren we via de afbeelding $A \mapsto (A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1n}, \dots, A_{nn})$ de lineaire ruimte $\mathrm{M}_n(C)$ van complexe $n \times n$-matrices met $\mathbf{C}^{n^2}$. In het bijzonder hebben we dus een norm op $\mathrm{M}_n(C)$, gedefinieerd door

$$\|A\| = (\sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} |A_{ij}|^2)^{1/2}.$$

De in de bovenstaande opgave ontwikkelde theorie is in het bijzonder toepasbaar op $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$-waardige funkties.

Lemma. Voor iedere $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ geldt:

$$\|AB\| \le \|A\|\|B\|.$$

Bewijs: Schrijf $C = AB$. Dan is

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}.$$

De som in het rechterlid kan gelezen worden als het standaardinprodukt van een tweetal vectoren in $\mathbf{C}^n$. Passen we de Cauchy-Schwartz ongelijkheid voor dat inprodukt toe, dan vinden we:

$$|C_{ij}|^2 \le \sum_{k=1}^{n} |A_{ik}|^2 \sum_{l=1}^{n} |B_{kj}|^2.$$

Hieruit volgt gemakkelijk dat $\|C\|^2 \le \|A\|^2 \|B\|^2$. □

Opgave E$_2$**-31** Zij $n \ge 1$, en $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$.

(a) Toon aan dat $\|A^k\| \le \|A\|^k$ voor alle $k \ge 0$.

(b) Toon aan dat de reeks

$$\sum_{k \ge 0} \frac{1}{k!} A^k$$

absoluut convergeert in $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$.

We definiëren de e-macht van de matrix A door

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

(Merk op dat dit weer een complexe $n \times n$ matrix is!)

(c) Bereken de e-macht van de matrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}.$$

Opgave E_2-**32** Zij $n \geq 1$.

(a) Toon aan: als $B \in M_n(\mathbf{C})$, en als $(C_k)_{k\geq 1}$ een convergente rij is in $M_n(\mathbf{C})$, dan is ook $(BC_k)_{k\geq 1}$ een convergente rij in $M_n(\mathbf{C})$, en er geldt:

$$\lim_{k\to\infty} BC_k = B \lim_{k\to\infty} C_k.$$

(b) Toon aan: als $A, B \in M_n(\mathbf{C})$, en $AB = BA$, dan is

$$Be^A = e^A B.$$

We veronderstellen nu dat $A \in M_n(\mathbf{C})$, en beschouwen de funktie $F : \mathbf{R} \to M_n(\mathbf{C})$, gedefinieerd door

$$F(t) = e^{tA}.$$

(c) Toon aan dat de funktie F differentieerbaar is (als funktie $\mathbf{R} \to M_n(\mathbf{C}) \simeq \mathbf{C}^{n^2} = \mathbf{R}^{2n^2}$, dwz. componentsgewijs) en dat

$$F'(t) = AF(t) = F(t)A.$$

Opgave E_2-**33** Veronderstel dat $n \geq 1$, zij $A \in M_n(\mathbf{C})$, en laten $M, N : \mathbf{R} \to M_n(\mathbf{C})$ en $v : \mathbf{R} \to \mathbf{C}^n$ differentieerbaar zijn.

(a) Toon aan dat de funkties $t \mapsto M(t)N(t)$ en $t \mapsto M(t)v(t)$ differentieerbaar zijn, en toon aan dat

$$\frac{d}{dt}M(t)N(t) = M'(t)N(t) + M(t)N'(t), \quad \frac{d}{dt}M(t)v(t) = M'(t)v(t) + M(t)v'(t).$$

Hint: differentieer componentsgewijs.

(b) Toon aan dat de matrix e^A inverteerbaar is, en dat $e^{A^{-1}} = e^{-A}$. Hint: differentieer de funktie $t \mapsto e^{-tA}e^{tA}$.

(c) Veronderstel nu dat $M'(t) = AM(t)$. Toon aan dat

$$M(t) = e^{tA}M(0) \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Opgave E_2-**34** Zij $n \geq 1$, en $A \in M_n(\mathbf{C})$. We beschouwen het volgende stelsel differentiaalvergelijkingen:

$$f_i' = A_{i1}f_1 + \cdots + A_{in}f_n \quad (i = 1, \ldots, n).$$

We gaan alle oplossingen van dit stelsel bepalen.

Zij $f(t)$ de kolomvector met componenten $f_i(t)$, notatie: $f(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))^T$. Dan kunnen we het stelsel herschrijven als

$$f'(t) = Af(t). \tag{1}$$

Het probleem is nu alle funkties $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}^n$ te bepalen die hieraan voldoen.

(a) Laat zien dat voor iedere $v \in \mathbf{C}^n$ de funktie

$$f(t) = e^{tA} v$$

aan de differentiaalvergelijking (1) voldoet.

(b) Toon aan: als $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}^n$ aan de differentiaalvergelijking (1) voldoet, dan is

$$f(t) = e^{tA} f(0) \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

(c) Bepaal alle oplossingen van het stelsel:

$$\begin{cases} f_1' &= -f_2 \\ f_2' &= f_1. \end{cases}$$

Opgave E$_2$**-35** Het doel van deze opgave is het verschijnsel van Gibbs voor stuksgewijze C^1-funkties te belichten.

Zij $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de 2π-periodieke funktie gedefinieerd door $f(x) = 1$ als $0 < x < \pi$, $f(x) = -1$ als $-\pi < x < 0$, en door $f(0) = f(\pi) = 0$.

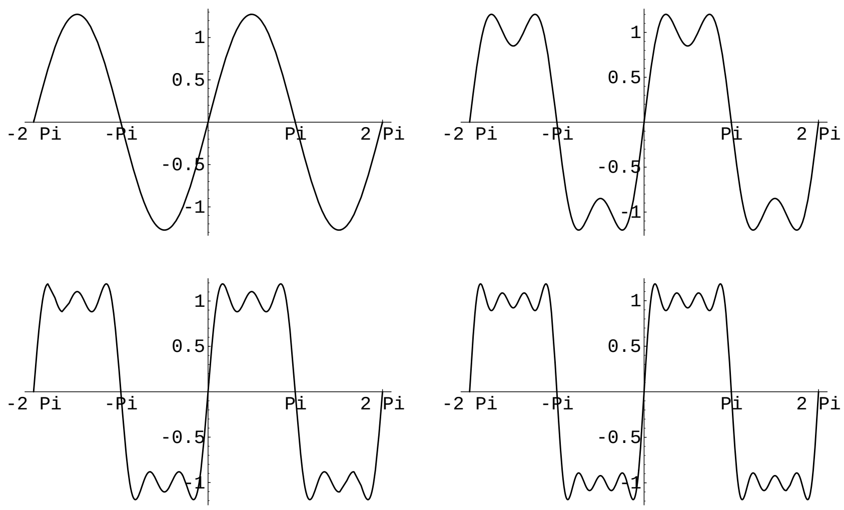
(a) Toon aan dat voor alle $x \in \mathbf{R}$ geldt:

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin[(2n-1)x]}{2n-1}.$$

We schrijven $s_n(x)$ voor de n-de partiële som van de bovenstaande reeks. Dus voor $n \geq 1$ is

$$s_n(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}.$$

In de onderstaande figuur zijn de grafieken van s_n geplot voor n gelijk aan respectievelijk $1, 2, 3, 4$. (Daarbij is het programma 'Mathematica' gebruikt).



(b) Toon aan dat voor alle $t \in]0,\pi[$ geldt:

$$s_n'(t) = \frac{2}{\pi}\frac{\sin 2nt}{\sin t}.$$

Hint: merk op dat

$$s_n'(t) = \frac{4}{\pi}\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{n} e^{(2k-1)it} = \frac{4}{\pi}\,\mathrm{Re}\,\frac{e^{2nit}-1}{e^{-it}(e^{2it}-1)}.$$

Toon voorts aan dat $s_n'(0) = 4n/\pi$ en $s_n'(\pi) = -4n/\pi$. Waarom is de funktie s_n' continu op $[0,\pi]$?

(c) Toon aan dat in het open interval $]0,\pi[$ de funktie s_n lokale maxima heeft in $c_1, c_3, \ldots, c_{2n-1}$ en lokale minima in $c_2, c_4, \ldots, c_{2n-2}$, waarbij $c_k = k\pi/2n$. Toon aan dat dit alle lokale extrema van s_n in het betreffende interval zijn. Controleer dat dit te zien is in de bovenstaande plaatjes; geef daarbij in het bijzonder de plaats van de extrema aan.

(d) Toon aan dat voor alle $x \in [0,\pi]$ geldt:

$$s_n(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{\sin 2nt}{\sin t}\,dt.$$

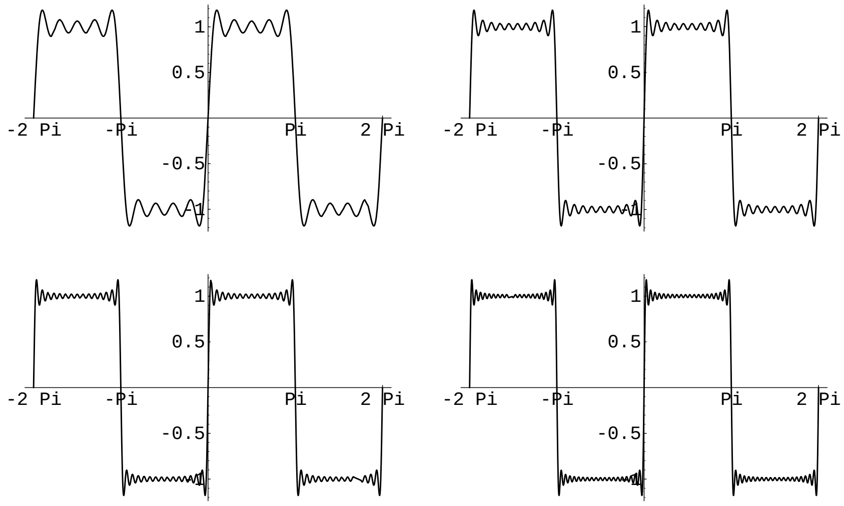
(e) Toon aan dat voor alle $1 \le k \le 2n-1$ geldt:

$$\int_{c_k}^{c_{2n-k}} \frac{\sin 2nt}{\sin t}\,dt = 0.$$

(Hint: voer een geschikte substitutie uit.) Toon voorts aan dat voor alle k met $k \le n$ geldt:

$$s_n(c_k) = s_n(c_{2n-k}).$$

Vergelijk het gevonden resultaat met de plaatjes.



De grafiek van s_n voor $n = 5,\ 10,\ 20,\ 30$.

(g) Toon aan dat voor alle oneven k met $k+2 \le n$ geldt:

$$\int_{c_k}^{c_{k+2}} \frac{\sin 2nt}{\sin t}\,dt = \int_{c_k}^{c_{k+1}} \left(\frac{\sin 2nt}{\sin t} - \frac{\sin 2nt}{\sin(t+\pi/2n)} \right) dt \le 0.$$

Toon voorts aan dat voor dergelijke k geldt: $s_n(c_1) \ge s_n(c_k)$.

(h) Toon aan dat $s_n(c_1) \ge s_n(c_k)$ voor *alle* oneven k, en dat

$$s_n(\frac{\pi}{2n}) = \max_{0 \le x \le \pi} s_n(x).$$

Vergelijk het gevonden resultaat met de bovenstaande plaatjes.

(i) Toon aan dat

$$\lim_{n\to\infty} s_n(\frac{\pi}{2n}) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt.$$

Hint: gebruik onderstaande variatie op Stelling 4.4.1 uit het Analyse A diktaat.

Zij I de waarde van de integraal in (i). Met bijvoorbeeld de formule van Taylor met rest kan men de volgende numerieke benadering voor I vinden: $I \sim 1.179$.

Uit het bovenstaande blijkt dat de grafiek van s_n in $\frac{\pi}{2n}$ een piek heeft ter hoogte $h_n = s_n(\pi/2n)$. Als $n \to \infty$ dan geldt $\pi/2n \downarrow 0$ terwijl $h_n \to I$. Dit heet het verschijnsel van Gibbs.

(j) Geef in een schets aan hoe de hoogte en de plaats van de hierboven genoemde piek veranderen als $n \to \infty$.

(k) Toon aan dat voor elke $0 < \varepsilon < \pi$ de rij $(s_n)_{n\geq 1}$ uniform naar f convergeert op $[\varepsilon, \pi - \varepsilon]$. Waarom is dit niet in tegenspraak met het verschijnsel van Gibbs?

(l) Bespreek tenslotte waarom het verschijnsel van Gibbs' zich voordoet in de buurt van iedere sprongdiscontinuïteit van een 2π-periodieke stuksgewijze C^1-funktie.

Stelling (Variatie op Stelling A.4.4.1). *Als $\varphi : [a,b] \to \mathbf{R}$ continu is, dan is φ Riemann-integreerbaar. Voorts geldt:*

$$\int_a^b \varphi(t)\, dt = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi(a + (k - \tfrac{1}{2})\, \tfrac{b-a}{n}).$$

Illustreer deze stelling met een plaatje.

Verwijzing: Voor meer informatie over het verschijnsel van Gibbs, waarin ook de historie uit de doeken wordt gedaan, verwijzen we naar: [J.D. Stegeman, 'Het verschijnsel van Gibbs', blz. 131 - 160 in: Kaleidoskoop van de Wiskunde 1, F. van der Blij e.a., Epsilon Uitgaven, No.17, Utrecht 1990].

Opgave E$_2$-**36** Doel van deze opgave is een verband aan te geven tussen Fourierreeksen en de Fourierintegraal. We veronderstellen dat $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ een C^∞-funktie is met $f = 0$ *buiten het interval* $]-\pi, \pi[$. (Men kan aantonen dat er zeer veel van zulke funkties bestaan). We brengen in herinnering dat de Fouriergetransformeerde $\mathcal{F}f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ van f gedefinieerd is door

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\xi x}\, dx.$$

Opm: we gebruiken de notatie $\mathcal{F}f$ i.p.v. $\hat{f}$ om in het onderstaande verwarring met Fourier coëfficiënten $c_n = \hat{f}(n)$ te voorkomen.

(a) Toon aan dat f een Schwartz-funktie is.

(b) Toon aan dat er een $C > 0$ bestaat zo dat:

$$|\mathcal{F}f(\xi)| \leq \frac{C}{1+\xi^2}.$$

(c) Toon aan dat de funktie f op het interval $[-\pi, \pi]$ gegeven wordt door

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k e^{ikx},$$

waarbij de reeks absoluut convergeert, en waarbij $c_k = (2\pi)^{-1}\mathcal{F}f(k)$. Hint: zet f buiten het interval $[-\pi, \pi]$ voort als 2π-periodieke funktie. Opm: de absolute convergentie van de reeks is af te leiden uit de schatting in (b), maar ook m.b.v. een stelling over Fourierreeksen uit de leeswijzer (welke ?).

(d) Zij $n \geq 1$. Toon aan dat de funktie f op het interval $[-n\pi, n\pi]$ gegeven wordt door de volgende reeks:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi n} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \mathcal{F}f(\frac{k}{n})\, e^{\frac{ikx}{n}}. \tag{2}$$

Toon daarbij aan dat de reeks aboluut convergent is.

(e) Toon aan dat voor elke $x \in \mathbf{R}$ en elke $n > |x|/\pi$ geldt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(\xi) e^{i\xi x}\, d\xi = \frac{1}{n} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \mathcal{F}f(\frac{k}{n})\, e^{\frac{ikx}{n}}.$$

(f) Schrijven we $g(\xi) = \mathcal{F}f(\xi)e^{i\xi x}$ dan wordt de bovenstaande formule:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\, d\xi = \frac{1}{n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(\frac{k}{n}).$$

Veronderstel dat g reeelwaardig is, en maak een schets waaruit de meetkundige betekenis van de bovenstaande formule blijkt.

Opmerking: Merk op dat de hierboven geïntroduceerde $g : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ een continue (zelfs C^∞) funktie is, die voldoet aan een schatting van het type: $|g(\xi)| \leq C(1 + |\xi|^2)^{-1}$. Het doel van de twee onderstaande opgaven is aan te tonen dat voor een funktie met zulke eigenschappen *altijd* geldt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\, d\xi = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(\frac{k}{n}). \tag{3}$$

Uit formule (2) blijkt dat voor de speciale funktie $g(\xi) = \mathcal{F}f(\xi)e^{i\xi x}$ de som $\frac{1}{n}\sum_{k=-\infty}^{\infty} g(\frac{k}{n})$ onafhankelijk van n is (voor $n > |x|/\pi$) en $2\pi f(x)$ als waarde heeft. De limiet voor $n \to \infty$ moet dus ook de waarde $2\pi f(x)$ hebben. Anderzijds wordt die limiet gegeven door (3), dus:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(\xi) e^{i\xi x}\, d\xi.$$

Hiermee hebben we de inversieformule voor de Fouriertransformatie opnieuw bewezen, uitgaande van de stelling over Fourierreeksontwikkeling (voor C^∞-funkties die nul zijn buiten het interval $]-\pi, \pi[$).

Opgave E$_2$-**37** Gegeven zijn een rij funkties $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ en een funktie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ met de volgende eigenschappen:
(1) f_n en f zijn Riemann-integreerbaar op ieder interval $[-R, R]$, $R > 0$.
(2) Op ieder interval $[-R, R]$ $(R > 0)$ convergeert de rij f_n uniform naar f.

(a) Toon aan dat voor iedere $R > 0$ geldt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-R}^{R} f_n(x)\, dx = \int_{-R}^{R} f(x)\, dx.$$

Voorts is gegeven dat er een continue funktie $g : \mathbf{R} \to [0, \infty[$ bestaat met $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dx < \infty$, en zo dat voor iedere $n \geq 1$ geldt:

$$|f_n(x)| \leq g(x) \qquad (X \in \mathbf{R}).$$

(b) Toon aan dat voor alle $x \in \mathbf{R}$ geldt: $|f(x)| \leq g(x)$.

(c) Toon aan dat voor iedere $\varepsilon > 0$ een $R > 0$ bestaat zo dat

$$\int_{\mathbf{R}\setminus[-R,R]} |f_n(x) - f(x)|\, dx < \varepsilon.$$

(d) Toon aan dat

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx.$$

Opgave E$_2$-**38** Gegeven is een continue funktie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ die voldoet aan

$$|f(x)| \leq \frac{C}{1+x^2} \qquad (x \neq 0).$$

Hierbij is $C > 0$ een constante.

Voor iedere gehele $n \geq 1$ definiëren we de funktie f_n als volgt: we delen de verzameling $\mathbf{R}$ op in disjuncte intervallen $[\frac{k}{n}, \frac{k}{n} + \frac{1}{n}[$ $(k \in \mathbf{Z})$ en definiëren f_n als constante funktie op ieder van die intervallen:

$$f_n(x) = f(\frac{k}{n}) \qquad \text{als} \qquad x \in [\frac{k}{n}, \frac{k}{n} + \frac{1}{n}[.$$

(a) Maak een schets met de grafieken van f, f_1, f_2 als $f(x) = 1/(1+x^2)$.

Zij $R > 0$ en $\varepsilon > 0$.

(b) Toon aan dat er een $N > 0$ bestaat zo dat voor alle $x, y \in [-R, R]$ met $|x - y| \leq \frac{1}{N}$ geldt:

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

(c) Toon aan dat er voor elke $n \geq 1$ en elke $x \in [-R, R]$ een $k \in \mathbf{Z}$ bestaat met $|x - \frac{k}{n}| < \frac{1}{n}$ en $|f(x) - f_n(x)| = |f(x) - f(\frac{k}{n})|$.

(d) Toon aan dat de rij (f_n) op $[-R, R]$ uniform convergeert met limiet f.

In een appendix bij deze opgave zal aangetoond worden dat

$$|f_n(x)| \leq \frac{3C}{1+x^2} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Deze schatting mag u zonder verdere motivatie in het onderstaande gebruiken.

(e) Toon aan dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\, dx = \frac{1}{n} \sum_{k\in\mathbf{Z}} f(\frac{k}{n}),$$

waarbij integraal en som absoluut convergeren.

(f) Toon aan dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k\in\mathbf{Z}} f(\frac{k}{n}).$$

Appendix. We zullen eerst aantonen dat voor alle $a \in \mathbf{R}$, $y \in [0,1]$ geldt:

$$\frac{1}{1+a^2} \leq \frac{3}{1+(a+y)^2}.$$

Fixeer daartoe $a \in \mathbf{R}$ en $y \in [0,1]$. Dan geldt: $0 \leq (a-y)^2$, dus $2ay \leq y^2 + a^2 \leq a^2 + 1$. Hieruit volgt dat $a^2 + 2ay \leq 1 + 3a^2$. Hieruit volgt weer dat $1 + (a+y)^2 \leq 3(1+a^2)$. Beide leden van deze laatste ongelijkheid zijn strikt groter dan nul, dus door inverteren krijgen we de gewenste schatting.

De boven verkregen schatting passen we nu toe op f_n. Zij $k \in \mathbf{Z}$, $x \in [\frac{k}{n}, \frac{k}{n} + \frac{1}{n}[$. Dan volgt uit de bovenstaande schatting met $a = \frac{k}{n}$, $y = x - a$ dat:

$$f_n(x) = f(\frac{k}{n}) \leq \frac{C}{1+(k/n)^2} \leq \frac{3C}{1+x^2}.$$

Het tentamen

Het tentamen zal plaatsvinden op Donderdag 16 juni, van 14:00 tot 17:00 in zaal 5 van Transitorium 1.

'Open boek tentamen': Bij het tentamen mag gebruik gemaakt worden van zowel het diktaat als de leeswijzer Analyse B-2.

Tentamenstof: de stof die beschreven wordt in de leeswijzer alsmede de voor het praktikum Analyse B-2 opgegeven opgaven.

Niveau: De praktikumopgaven zijn van wisselend niveau geweest, sommigen lagen boven het tentamenniveau, anderen daaronder. In het onderstaande volgt een selectie van opgaven op tentamenniveau. U wordt aangeraden (onder andere!) deze opgaven nog eens door te nemen bij de voorbereiding van het tentamen.

E_2 – 5, 6, 7
E_2 – 10, 19, 22, 23, 25
Hfdst 4 Analyse B: 6, 7, 23, 38
Hfdst 5 Analyse B: 10, 32, 33, 35
E_2 – 36.