PI = 3.14159265358979323846264338327950288419716939937 5105820974944592307816406286208998628034825342117067 98214808651328230664709384460955058223172535940812 848111745028410270193852110555964462294895493038...

Jaar:	**Aantal bekende cijfers:**	**Ontdekker:**
2000 B.C.	 1	Babyloniërs (3.125)
250 B.C.	 3	Archimedes (3.1418)
1220	 3	Fibonacci (3.141818)
1593	 9	Viète (3.1415926536)
1615	 35	L.van Ceulen
1706	 100	Machin
1874	 707	Shanks (527 correct)
1897	 0	E.J.Goodman, $\pi = 3.2$
1949	.... 2.037	Reitwiesner et al(ENIAC)
1961	.... 100.265	Shanks, Wrench (IBM7090)
1973	.... 1.001.250	Guillard, Bouyer (CDC7600)
1985	.... 17.526.200	Gosper
1986	.... 29.360.111	Bailey (CRAY2)
1988	.... 201.326.551	Kanada, Tamura (NEC SX2)
1989	..... 1.011.196.691	Chudnovsky's
1994	..... 4.044.000.000	Chudnovsky's
1995	..... 6.442.450.938	Kanada
1997	.... 51.539.600.000	Kanada (Hitachi SR2201)
1999	... 206.158.430.000	Kanada

Klassieke Berekeningsmethode

Kies N positief geheel. Zij a_N respectievelijk b_N de omtrek van de omgeschreven resp. ingeschreven regelmatige N-hoek aan de cirkel met diameter 1. Dan geldt:

$$a_{2N} = \frac{2a_N b_N}{a_N + b_N} \qquad b_{2N} = \sqrt{a_{2N} b_N}.$$

Verder is het duidelijk dat $\lim_{n\to\infty} a_N = \lim_{n\to\infty} b_N = 2\pi$
Idee: start met a_N, b_N voor zekere N (bijvoorbeeld $N = 6$) en bereken via bovenstaande formule

$$a_{2N}, b_{2N}, \quad a_{4N}, b_{4N}, \quad a_{8N}, b_{8N}, \quad \ldots$$

Bij $N = 6$ kunnen we bijvoorbeeld starten met $a_6 = 2\sqrt{3}$, $b_6 = 3$. Archimedes ging tot $6 \cdot 2^4$, Van Ceulen tot $6 \cdot 2^{60}$. Hier is een tabel:

n	a_n	b_n	$a_n - b_n$
6	3.461016151	3.000000000	0.461016151
$6 \cdot 2$	3.215390309	3.105828541	0.109561768
$6 \cdot 2^2$	3.159659942	3.132628613	0.027031329
$6 \cdot 2^3$	3.146086215	3.139350203	0.006736012
$6 \cdot 2^4$	3.142714599	3.141031950	0.001682649
$6 \cdot 2^5$	3.141873049	3.141452472	0.000420577
$6 \cdot 2^6$	6.283325494	6.283115215	0.000210278
$6 \cdot 2^7$	6.283220353	6.283167784	0.000052569
$6 \cdot 2^8$	6.283194068	6.283180926	0.000013142

Methoden gebaseerd op Gregory's reeks

Beschouw de machtreeks

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Deze reeks convergeert voor alle $x \in (-1, 1]$ met $\arctan x$ als som. Vullen we hier $x = 1$ in, dan vinden we Leibniz's reeks

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Helaas verloopt convergentie van deze reeks langzaam. Stel namelijk

$$R_n = \left| \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n-1} \right|$$

Dan geldt $nR_n \to 1/4$ als $n \to \infty$. Met andere woorden, voor grote n is R_n ongeveer gelijk aan $1/4n$. Om $\pi/4$ op 4 cijfers nauwkeurig te berekenen moeten we dus $n = 5000$ nemen, dat wil zeggen 5000 inversies en sommaties uitvoeren! Gelukkig merkte Machin op dat

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right).$$

De reeks

$$\arctan\left(\frac{1}{5}\right) = 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{5}\right)^7 - \cdots$$

convergeert wel heel snel. Om nu $\pi/4$ op vier cijfers te berekenen hoeven we slechts de eerste drie termen te nemen!

Varianten op Machin's formule

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$$

$$\frac{\pi}{4} = 2\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{7}$$

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8}$$

Een ontdekking van Euler

De partiële som $2\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots - \frac{1}{99999}\right)$ zou $\pi/2$ tot op 5 cijfers nauwkeurig moeten benaderen. De som blijkt gelijk te zijn aan

$$1.5707\underline{8}63267948\underline{9}\underline{7}61923132\underline{1}1916397\underline{5}\underline{205}209\ldots$$

De werkelijke waarde van $\pi/2$ is,

$$1.5707\underline{9}6326794896\underline{6}192313216916397\underline{5}\underline{144}209\ldots$$

De methode van Gauss-Salamin

Deze methode maakt gebruik van het *arithmetisch-geometrisch* gemiddelde van twee getallen a en b. Beschouw de recurrentie gegeven door:

$$a_0 = a \qquad b_0 = b$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \qquad n \geq 0$$

Dan geldt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

Noem deze limiet $M(a,b)$ (Arithmetisch-Geometrisch Gemiddelde of AGM). Stel tevens $c_n^2 = a_n^2 - b_n^2$ voor $n \geq 1$.

STELLING:

$$\pi = \frac{2M(1,\sqrt{2})^2}{1 - \sum_{n=1}^{\infty} 2^n c_n^2}$$

Bovendien benadert

$$\pi_n = \frac{2a_n^2}{(1 - \sum_{j=1}^{n} 2^j c_j^2)}$$

de waarde π tot op 2^n decimalen. De eerste acht iteraties geven benaderingen die goed zijn tot op $0, 3, 8, 19, 41, 84, 171$ en 344 cijfers! Er zijn 25 iteratiestappen nodig om π tot 45 miljoen decimalen te berekenen.

Het idee van Gauss-Salamin

Beschouw de integralen

$$I(a,b) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(a^2(1-x^2)+b^2x^2}}$$

en

$$J(a,b) = \int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(a^2(1-x^2)+b^2x^2}}$$

Bewijs door slimme substituties de volgende stelling.

STELLING:

$$I\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = I(a,b)$$

$$\frac{b-a}{a+b} J\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) + 2J(a,b) = I(a,b).$$

GEVOLG:
Noteer $I_n = I(a_n, b_n)$ en $J_n = J(a_n, b_n)$. Dan geldt,

$$I_0 = I_1 = I_2 = I_3 = \cdots = I_n = \cdots = \frac{\pi}{2M(a,b)}$$

en

$$-2^1c_1^2J_1 + (a_0^2 - b_0^2)J_0 = (a_0^2 - b_0^2)I_0/2$$

$$-2^2c_2^2J_2 + 2^1c_1^2J_1 = 2c_1^2I_1/2$$

$$-2^3c_3^2J_3 + 2^2c_2^2J_2 = 2^2c_2^2I_2/2$$

$$-2^4c_4^2J_4 + 2^3c_3^2J_3 = 2^3c_3^2I_3/2$$

. . . .

Sommatie levert :

$$(a_0^2 - b_0^2)J_0 = \frac{1}{2}\left(a_0^2 - b_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n c_n^2\right) I_0.$$

Kies nu $a_0 = 1, b_0 = \sqrt{2}$. Dan geldt,

$$I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}, \qquad J_0 = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

STELLING:

$$\left(\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}\right)\left(\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Zetten we al onze resultaten met $a_0 = \sqrt{2}, b_0 = 1$ op een rij,

$$I_0 = \frac{\pi}{2M(1,\sqrt{2})}, \qquad J_0 = \frac{I_0/2}{1 - \sum_{n=1}^{\infty} 2^n c_n^2}, \qquad I_0 J_0 = \frac{\pi}{4}$$

Uit deze gelijkheden volgt,

$$\frac{\pi}{4} = I_0 J_0 = \frac{1/2}{1 - \sum_{n=1}^{\infty} 2^n c_n^2}\left(\frac{\pi}{2M(1,\sqrt{2})}\right)^2$$

We conluderen,

$$\pi = \frac{2M(1,\sqrt{2})^2}{1 - \sum_{n=1}^{\infty} 2^n c_n^2}$$

De formules van Ramanujan

$$\frac{4}{\pi} = 1 + 7\left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{1}{4} + 13\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^3 \frac{1}{4^2} + 19\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\right)^3 \frac{1}{4^3} + \cdots$$

$$\frac{16}{\pi} = 5 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{47}{64} + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^3 \frac{89}{64^2} + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\right)^3 \frac{131}{64^3} + \cdots$$

Anders geschreven:

$$\frac{16}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^3 \frac{5+42n}{64^{2n}}$$

Andere Ramanujan formules:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{99^2} \sum \frac{(4n)!(1103+26390n)}{(n!)^4(396)^{4n}}$$

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (6n)!(13591409+545140134n)}{(3n)!(n!)^3 640320^{3n+3/2}}$$

De voorlaatste is gebruikt door Gosper, de laatste door de Chudnovsky's. Nog een toegift:

$$\frac{3528}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (4n)!(1123+21460n)}{(n!)^4(16\cdot 882)^{2n}}$$

De formule van P. en J.Borwein

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right)$$

BEWIJS: Merk op dat

$$\int_0^1 \frac{x^{k-1}}{1 - x^8/16} = \int_0^1 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{k-1+8i}}{16^i} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i(8i+k)}$$

Dus,

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right)$$

$$= \int_0^1 \frac{4 - 2x^3 - x^4 - x^5}{1 - x^8/16} dx$$

Merk nu op,

$$\frac{4 - 2x^3 - x^4 - x^5}{1 - x^8/16} = \frac{16x - 16}{x^4 - 2x^3 + 4x - 4}$$

$$= \frac{4x}{x^2 - 2} - \frac{4x - 8}{x^2 - 2x + 2}$$

Integratie van 0 tot 1 levert π.

Irrationaliteit van π

LEMMA 1:
Zij f een polynoom van graad $2n$. Dan geldt,

$$\int_0^1 (\sin \pi x) f(x)dx = \frac{f(1)-f(0)}{\pi} - \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 (\sin \pi x) f''(x)dx$$

Verder geldt

$$\int_0^1 (\sin \pi x) f(x)dx = \frac{f(1)-f(0)}{\pi} - \frac{f''(1)-f''(0)}{\pi^3}$$

$$+\cdots + (-1)^n \frac{f^{(2n)}(1)-f^{(2n)}(0)}{\pi^{2n+1}}.$$

LEMMA 2:
Zij f een polynoom met gehele coëfficienten. Dan geldt voor elke gehele a en elke natuurlijke k dat $f^{(k)}(a)/k!$ een geheel getal is.

We nemen nu het polynoom $f(x) = x^n(1-x)^n$. Merk op dat $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(1) = 0$ voor $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Volgens Lemma 2 zijn $f^{(k)}(1)/n!$ en $f^{(k)}(0)/n!$ gehele getallen voor elke $k \geq n$.
Uit deze twee feiten volgt dat $(f^{(k)}(1) - f^{(k)}(0))/n!$ geheel is voor alle k.

Gebruik makend van Lemma 1 zien we dat

$$I_n := \frac{1}{n!}\int_0^1 (\sin \pi x) x^n (1-x)^n dx$$

een polynoom van graad $2n+1$ in $\frac{1}{\pi}$ is met gehele coëfficienten. Bovendien, $I_n > 0$.
Stel nu dat π rationaal is, zeg $\pi = a/b$ met a, b positief geheel. Dan is I_n een breuk met noemer die a^{2n+1} deelt. Dus,

$$I_n \geq \frac{1}{a^{2n+1}}.$$

Anderzijds geldt, omdat de integrand een functie < 1 is,

$$I_n < \frac{1}{n!}$$

Combinatie van beide ongelijkheden geeft,

$$\frac{1}{a^{2n+1}} < \frac{1}{n!}$$

Dit geeft tegenspraak als $n \to \infty$.

QED

We hebben