Nationale Wiskunde Dagen 2001

Het platzakprobleem

door Frits Beukers

1 Het probleem

Stel we hebben een bepaald bedrag op zak, zeg fl 24,93, en we willen dit bedrag in zijn geheel besteden aan postzegels van 62 en van 37 cent. Vraag: kan dat?

Ik geef direct toe dat dit probleem niet actueel is. Postzegels met dergelijke waarden hebben vroeger bestaan, maar zijn nu niet meer geldig. Ook is het maar een vraag of je al je geld aan postzegels zou willen besteden. Hoe dan ook, het voorbeeld is illustratief voor een grote klasse van problemen waarin we te maken met een tweetal artikelen met prijzen die we a en b zullen noemen. Vraag luidt: welke bedragen n kunnen we volledig besteden aan de aankoop van deze artikelen? Aan het eind van de transactie zijn we dan platzak, hetgeen de titel van dit verhaal verklaart. Andere benamingen zijn *knapzakprobleem*, *geldwisselprobleem* of *Frobeniusprobleem*, naar de Duitse wiskundige G.Frobenius (1847-1917). Iets wiskundiger gesteld luidt de vraag:

Vraag 1.1 *Gegeven positief gehele getallen a en b. Bij welke n bestaan er gehele getallen $x, y \geq 0$ zó dat $n = ax + by$?*

Tegenwoordig eindigen prijzen van artikelen vaak op een 5 of 0. Het zal duidelijk zijn combinaties van dergelijke artikelen een totaalprijs hebben, die ook op 5 of 0 eindigt. In dit geval zijn de bedragen a en b deelbaar door 5 en hetzelfde geldt natuurlijk voor het eindbedrag. Het ligt daarom voor de hand om deze 5 uit a en b weg te delen, en het platzakprobleem voor de nieuwe getallen $a/5$ en $b/5$ te bekijken. Mochten deze twee getallen nog een gemeenschappelijke deler hebben, dan delen we die ook weg. Kortom, we nemen voortaan aan dat $\text{ggd}(a, b) = 1$, zonder daarbij ons verhaal tekort te doen.
In de volgende paragraaf zullen we laten zien dat er bij de waarde $n = ab - a - b$ geen gehele $x, y \geq 0$ bestaan zó dat $n = ax + by$, maar bij iedere waarde van n groter dan $ab - a - b$ wel. In het geval dat $a = 37$ en $b = 62$ is $37 \times 62 - 62 - 37 = 2195$ het grootste bedrag dat niet volledig besteedbaar is. Alle bedragen

daarboven zijn dus wel besteedbaar. De methode om dit alles te laten zien is niet moeilijk en wellicht ook begrijpbaar voor gemotiveerde middelbare scholieren.
Het wordt een andere zaak bij drie of meer artikelen. Stel we hebben een r-tal artikelen met prijzen $a_1, a_2, \ldots, a_r$. Neem wederom aan dat hun grootste gemeenschappelijke deler 1 is. Een specifieke vraag zou zijn:

Vraag 1.2 *Wat is de grootste waarde van n zó dat*

$$n = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_rx_r$$

niet oplosbaar is in gehele getallen $x_1, x_2, \ldots, x_r \geq 0$?

Voor het geval van twee artikelen, $r = 2$, zagen we dat $a_1a_2 - a_1 - a_2$ het antwoord is. Als $r = 3$, dan ligt de zaak een stuk ingewikkelder. Er is weliswaar een methode om de gevraagde waarde uit te rekenen, maar die is vele malen ingewikkelder dan de formule in het geval $r = 2$. Als $r > 3$, dan zijn er helemaal geen formules bekend.
In het geval van drie of meer artikelen is het leuk om speciale gevallen te nemen, bijvoorbeeld $a_1 = n, a_2 = n+1, a_3 = n+2$, en dan te kijken wat het antwoord op onze vraag is. Op de computer kun je experimenteren met dergelijke simpele keuzen. Soms blijken er regelmatige patronen in het antwoord te zitten. Het is een leuke sport om te proberen die op te sporen. De volgende taak is dan deze patronen te verklaren. Hier is veel ruimte om zelf aan de slag te gaan. Als hulpmiddel hierbij heb ik een Java-applet geschreven dat voor $r \leq 4$ het antwoord op onze vraag berekent. Zoek op internet de pagina

`www.math.uu.nl/people/beukers/frobenius`

en je kunt meteen beginnen.

2 Twee artikelen

In deze paragraaf laten we zien dat het volgende waar is.

Stelling 2.1 *Gegeven twee positief gehele getallen a en b met* $\mathrm{ggd}(a, b) = 1$. *Het grootste getal n, zó dat*

$$n = ax + by$$

geen oplossing heeft in gehele getallen $x, y \geq 0$, is $n = ab - a - b$.

Het blijkt dat ons verhaal er wat simpeler uitziet als we deze stelling iets anders formuleren door te eisen dat $x, y \geq 1$ in plaats van $x, y \geq 0$. We krijgen dan:

Stelling 2.2 *Gegeven twee positief gehele getallen a en b met* $\text{ggd}(a,b) = 1$. *Het grootste getal n, zó dat*

$$n = ax + by$$

geen oplossing heeft in gehele getallen $x, y \geq 1$, is $n = ab$.

Het verband tussen deze twee Stelling is hopelijk duidelijk. Als $n = ax + by$ een oplossing in $x_0, y_0 \geq 0$ heeft, dan heeft $n + a + b = ax + by$ een oplossing met gehele $x, y \geq 1$, namelijk $x_0 + 1, y_0 + 1$. En vice versa. In het bijzonder volgt hieruit het verband tussen de getallen $n = ab - a - b$ en $n = ab$ in beide stellingen. We zeggen dat een getal n *positief representeerbaar* is met a en b als $n = ax + by$ een oplossing in gehele $x, y \geq 1$ heeft. Als eerste laten we zien:

Het getal $n = ab$ is niet positief representeerbaar door a en b.

Stel namelijk dat er gehele $x, y \geq 1$ bestaan zó dat $ab = ax + by$. Twee van deze termen, ab en ax, zijn deelbaar door a. Dus is ook de derde term, by, deelbaar door a. De getallen a en b hebben geen gemeenschappelijke factoren. Dus uit a deelt by volgt dat a een deler is van y. Samen met het feit dat $y > 0$, volgt hier weer uit dat $y \geq a$. Maar nu komen we in de problemen. De ongelijkheden $y \geq a$ en $x \geq 1$ impliceren dat $ax + by \geq a + ab > ab$. Maar $ax + by$ had gelijk moeten zijn aan ab. We hebben een tegenspraak gekregen en concluderen dat ab niet positief representeerbaar is door a, b.
Om Stelling 2.2 helemaal aan te tonen moeten we ook laten zien dat elk getal $n > ab$ wèl positief representeerbaar is door a en b.
In het bijzonder zou $ab + 1$ positief representeerbaar moeten zijn. Maar de bijbehorende waarden van x en y zijn absoluut niet duidelijk. In het voorbeeld $a = 37, b = 62$ zouden er gehele $x, y \geq 1$ moeten zijn zó dat $2196 = 37x + 62y$. Weinig mensen zien hier meteen een oplossing voor. In de rest van deze paragraaf gebruiken we dit voorbeeldprobleem ter illustratie.
Om verder te kunnen, doen we eerst een stapje terug onder het motto *retirer pour sauter mieux*. We zeggen dat een getal *representeerbaar* is door a en b als er gehele x, y bestaan zó dat $n = ax + by$. Bij het begrip representeerbaar stellen we niet meer de eis dat x, y positief zijn. We bewijzen nu de volgende stelling.

Stelling 2.3 *Zij a, b een tweetal positief gehele getallen met* $\text{ggd}(a,b) = 1$. *Dan is elk geheel getal representeerbaar door a en b.*

Om deze stelling aan te tonen gaan we laten zien dat het getal 1 altijd representeerbaar is. Met andere woorden, er bestaan gehele x, y zó dat $1 = ax + by$. Als we dit eenmaal hebben, zijn we klaar. Immers uit $1 = ax + by$ volgt $n = a(nx) + b(ny)$ voor elke gehele n.
Laat d het kleinste positieve gehele getal zijn, dat representeerbaar is door a en b. Zij n een willekeurig positief representeerbaar getal. Dat wil zeggen, er zijn

gehele x, y, x', y' zó dat

$$\begin{aligned} n &= ax + by \\ d &= ax' + by' \end{aligned}$$

Stel dat n gedeeld door d gelijk is aan "k rest r". Trekken we k maal de tweede gelijkheid van de eerste af, dan vinden we

$$r = n - kd = a(x - kx') + b(y - ky').$$

Met andere woorden, de rest r is ook representeerbaar door a en b.
Aangezien $0 \leq r < d$, r representeerbaar en d het kleinste positieve representeerbare getal is, kunnen we alleen maar concluderen dat $r = 0$. Met andere woorden, het kleinst representeerbare getal d deelt elk ander representeerbaar getal n. In het bijzonder zijn $a = a \cdot 1 + b \cdot 0$ en $b = a \cdot 0 + b \cdot 1$ representeerbaar, en dus ook deelbaar door d. We hadden echter aangenomen dat a en b geen gemeenschappelijke delers hebben, behalve 1. Conclusie: $d = 1$. Het getal 1 is dus representeerbaar door a en b.

Bovenstaand bewijs is een voorbeeld van een *existentiebewijs*. We laten zien dat een oplossing voor $1 = ax + by$ in gehele x, y bestaat (existentie), maar geven geen methode om deze te bepalen. Gelukkig geeft het fundamentele idee in bovenstaand bewijs ons wel een aanwijzing hoe eventuele x, y te vinden. We lichten dit toe aan de hand van de vergelijking $1 = 37x + 62y$ in x, y geheel. Er van uitgaand dat niemand meteen een oplossing ziet, gaan we als volgt te werk. Van de voor de hand liggende gelijkheid

$$62 = 37 \cdot 0 + 62 \cdot 1$$

trekken we 1 maal de gelijkheid

$$37 = 37 \cdot 1 + 62 \cdot 0$$

af. We vinden,

$$25 = -37 \cdot 1 + 62 \cdot 1.$$

Trek deze 1 maal van de voorgaande af. We vinden

$$12 = 37 \cdot 2 - 62 \cdot 1.$$

Trek deze 2 maal van de voorgaande af. We vinden

$$1 = -37 \cdot 5 + 62 \cdot 3.$$

We zien de oplossing $x = -5, y = 3$ van $1 = 37x + 62y$ te voorschijn komen. Hopelijk wordt uit dit voorbeeld duidelijk hoe je in het algemeen een gehele

oplossing x, y van $1 = ax + by$ vindt. De methode staat bekend als het *algoritme van Euclides*, naar de beroemde Griekse wijsgeer en wiskundige Euclides (365 v. Chr. - 300 v. Chr.).
Ons getal 2196 is nu ook representeerbaar. Vermenigvuldig $1 = 37 \cdot (-5) + 62 \cdot 3$ aan beide zijden met 2196. We vinden,

$$2196 = 37 \cdot (-10980) + 62 \cdot 6588.$$

In ieder geval is 2196 representeerbaar. We wilde echter laten zien dat dit getal *positief* representeerbaar is. Daarvoor hebben we nog één idee nodig.
Als we een gehele oplossing x, y van $n = ax + by$ hebben, dan is dit niet de enige oplossing. Immers $x+b, y-a$ is ook een oplossing zoals we uit $a(x+b)+b(y-a) = ax + by = n$ zien. Evenzo zien we,

$$n = ax+by = a(x+b)+b(y-a) = a(x+2b)+b(y-2a) = a(x+3b)+b(y-3a) = \dots$$

Met andere woorden, als x, y een oplossing van $n = ax+by$ is, dan is $x+kb, y-ka$ dat ook voor elke keuze van k. De waarde van y in de oplossing kan met stapjes ter lengte a verschoven worden. Door k juist te kiezen, kunnen we er dus voor zorgen dat $0 < y - ka \leq a$. Met behulp van deze opmerking kunnen we Stelling 2.3 nog iets verfijnen.

Stelling 2.4 *Zij a, b een tweetal positief gehele getallen met* $\mathrm{ggd}(a, b) = 1$. *Dan zijn er bij elk geheel getal n gehele getallen x, y te vinden zó dat $n = ax + by$ en $0 < y \leq a$.*

Dit is een stap in de richting van positieve representeerbaarheid. We kunnen de waarde van y immers positief krijgen. Laten we dit schuifprincipe toepassen op ons voorbeeld $2196 = 37 \cdot (-10980) + 62 \cdot 6588$. Trek 178 maal 37 van 6588 af en tel 178 maal 62 bij -10980 op. We vinden

$$2196 = 37 \cdot 56 + 62 \cdot 2,$$

waarmee we zien dat 2196 positief representeerbaar is. Door y tussen 1 en 37 te kiezen, hebben we een gratis bonus gekregen, namelijk een positieve waarde van x. Het aardige is dat dit altijd werkt. We laten nu zien:

Elk getal $n > ab$ is positief representeerbaar door a en b.

Stel $n > ab$. We weten op grond van Stelling 2.4 dat er gehele getallen x, y bestaan zó dat $n = ax + by$ met $0 < y \leq a$. Uit de laatste ongelijkheid volgt dat $by \leq ab$. Omdat $n > ab$ betekent dit dat $ax = n - by$ positief is. En dus is x ook positief. Het getal n is positief representeerbaar. Daarmee is Stelling 2.2, en dus ook Stelling 2.1 bewezen.

Een beetje experimenteren met de Java-applet brengt nog een aantal feiten aan het licht, die met van bovenstaande theorie te verklaren zijn. Hier zijn een paar. Kijk of je ze experimenteel ziet gebeuren en geef een verklaring. Van a, b veronderstellen we dat $\mathrm{ggd}(a, b) = 1$ en $a < b$.

1. $ab - a$ is niet positief representeerbaar.

2. Als $a > 1$ dan is $ab - 1$ positief representeerbaar.

3. Als $a > 1$ dan zijn $ab - 1, ab - 2, \ldots, ab - a + 1$ positief representeerbaar.

Behalve bovengenoemde kun je zelf misschien ook nog andere regelmatigheden observeren.

3 Drie of meer artikelen

Nu we het Frobenius probleem met twee artikelen opgelost hebben kunnen we ook naar Vraag 1.2 gaan. In het geval $r = 3$ hebben we dus de volgende vraag:

Vraag 3.1 *Zij a, b, c een drietal positieve gehele getallen met* $\mathrm{ggd}(a, b, c) = 1$. *Wat is de grootste waarde van n zó dat*

$$n = ax + by + cz$$

niet oplosbaar is in gehele getallen $x, y, z \geq 0$?

Laten we het gevraagde getal aangeven met $g(a, b, c)$. Het blijkt dat er geen eenvoudige formule voor $g(a, b, c)$ bestaat. In de loop der jaren zijn er diverse algoritmen gevonden om $g(a, b, c)$ te bepalen. Helaas zijn ze te ingewikkeld om nog leuk te zijn in deze tekst. We verwijzen de geïnteresseerde lezer daarom naar J.L.Davison, *On the linear diophantine problem of Frobenius*, Journal of Number Theory 48 (1994), p353-363. Dit artikel geeft een goede ingang tot verdere literatuur.
Het blijkt wel vaak mogelijk te zijn om formules voor $g(a, b, c)$ te geven bij speciale keuzen van a, b, c. Het is aardig om een paar van zulke keuzes te maken, vervolgens experimenteel een formule voor $g(a, b, c)$ bepalen, en tenslotte, het belangrijkste, een bewijs voor deze formule geven.
Laten we dit illustreren aan de hand van een voorbeeld. We kiezen n willekeurig en nemen vervolgens $a = n, b = n+1, c = n+2$. Hier volgt een tabel van waarden van $g(n, n+1, n+2)$ die we met onze applet bepaald hebben. In de derde kolom staan de opeenvolgende verschillen van de waarden in de tweede kolom. Voor de aardigheid hebben we ook nog een vierde kolom toegevoegd. Daarin staat het één na grootste getal dat niet als combinatie van $n, n+1, n+2$ te schrijven is met gehele coëfficienten ≥ 0. We noemen dit getal h_n. Laten we trouwens het getal $g(n, n+1, n+2)$ verkort weergeven door g_n.

n	g_n	$g_n - g_{n-1}$	h_n
9	35		34
10	49	14	39
11	54	5	53
12	71	17	59
13	77	6	76
14	97	20	83
15	104	7	103
16	127	23	111
17	135	8	134

Voer zelf dit experiment uit en verifieer dat de getallen in de tabel correct zijn. Uit deze tabel zien we een aantal regelmatigheden. Wat is bijvoorbeeld het verband tussen g_n en h_n ? Verder zit er een regelmatig patroon in de derde kolom, de verschillen van de opeenvolgende waarden van g_n. Zie je dit patroon?
Laten we nu op empirische wijze een formule voor g_n geven. Allereerst, met een beetje puzzelen zien we dat de verschillen $g_n - g_{n-2}$ voor elke volgende even waarde van n met 4 toenemen. Dit suggereert een formule van de vorm $g_n - g_{n-2} = \alpha n + \beta$ voor elke even waarde van n. Vul hier $n = 12$ en $n = 14$ in. We krijgen, met behulp van bovenstaande tabel:

$$\begin{aligned} 12\alpha + \beta &= g_{12} - g_{10} = 22 \\ 14\alpha + \beta &= g_{14} - g_{12} = 26 \end{aligned}$$

Oplossen hiervan geeft $\alpha = 2, \beta = -2$. We vermoeden dus dat $g_n - g_{n-2} = 2n - 2$ voor alle even n. Maar dit suggereert weer dat g_n zelf een functie van de vorm $f(n) = \gamma n^2 + \delta n + \epsilon$ is voor geschikt gekozen γ, δ, ϵ. Immers, $f(n) - f(n-2) = 4\gamma n - 4\gamma + 2\delta$ voor een functie van deze vorm. Als we dus willen dat $g_n = f(n)$ voor alle even n, moeten we $4\gamma = 2$ nemen en $-4\gamma + 2\delta = -2$. Met andere woorden, $\gamma = 1/2$ en $\delta = 0$. Tenslotte volgt de waarde van ϵ uit $49 = g_{10} = f(10) = 100\gamma + 10\delta + \epsilon$. Omdat we al $\gamma = 1/2$ en $\delta = 0$ hadden, betekent dit dat $49 = 50 + \epsilon$. Dus $\epsilon = -1$. We komen nu tot het volgende vermoeden.

Vermoeden 3.1 *Voor elke even n geldt dat*

$$g(n, n+1, n+2) = \frac{1}{2}n^2 - 1.$$

Op een analoge manier kunnen we te werk gaan voor oneven n en vinden het volgende vermoeden.

Vermoeden 3.2 *Voor elke oneven n geldt dat*

$$g(n, n+1, n+2) = \frac{1}{2}(n+1)(n-2).$$

Om deze vermoedens te controleren kun je nog een paar grotere waarden van n nemen en kijken of de waarden die de applet geeft overeenstemmen met de door ons vermoedde waarde.
Tot zover hebben we alleen experimenteel werk gedaan, gecombineerd met wat puzzelwerk. Nu komt het lastigste deel, we moeten aantonen dat bovenstaande vermoedens inderdaad juist zijn.
Ter illustratie laten we zien:

Vermoeden 3.1 is waar.

Kies n even en N willekeurig positief geheel. Stel we willen

$$nx + (n+1)y + (n+2)z = N \tag{1}$$

oplossen. Herschrijven geeft, $n(x+y+z)+y+2z = N$. Eigenlijk kunnen we net zo goed de vergelijking $nu + y + 2z = N$ oplossen in $y, z, u \geq 0$ met de extra voorwaarde $u \geq y + z$. De waarde van x krijgen we door $x = u - y - z$ te nemen. Laten we nu $N = n^2/2 - 1$ nemen en $nu + y + 2z = n^2/2 - 1$ proberen op te lossen. Omdat $n^2/2$ een n-voud is, zien we dat $y+2z$ een n-voud plus $n-1$ moet zijn. In het bijzonder, $y + 2z \geq n - 1$. Dus $u \geq y + z \geq (y+2z)/2 \geq (n-1)/2$. Gevolg,

$$n^2/2 - 1 \geq n(n-1)/2 + n - 1 = (n^2+n)/2 - 1.$$

Hieruit zou volgen dat $n^2 \geq n^2 + n$ en dat kan dus niet. We concluderen dat $n^2/2 - 1 = nx + (n+1)y + (n+2)z$ onoplosbaar is in $x, y, z \geq 0$.
Nu moeten we laten zien dat als $N \geq n^2/2$, de vergelijking (1) wèl oplosbaar is. We doen dit als volgt. Kies u geheel zó dat $0 \leq N - nu < n$. Omdat $N \geq n^2/2$ en $n^2/2$ een n-voud is, moet gelden dat $u \geq n/2$. Definieer $r = N - nu$. Stel dat r even is. Kies dan $z = r/2$ en $y = 0$. Stel dat r oneven is. Kies dan $z = (r-1)/2$ en $y = 1$. In beide gevallen geldt dat $y + z \leq (r+1)/2 \leq n/2$. We hebben ook gezien dat $u \geq n/2$ en concluderen dus dat $u \geq y + z$. De waarde van x wordt hiermee $u - y - z$, welke ≥ 0 is.