Priemgetallen en het Riemannvermoeden

Frits Beukers

Studium Generale

Wageningen, 14 november 2007

Priemgetallen

$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61,$
$67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149$
$139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199,$
$211, 223, 227, \ldots$

Vermoedens

Vermoeden van Goldbach

Elk even getal ≥ 4 kan geschreven worden als som van twee priemgetallen.

Vermoedens

Vermoeden van Goldbach

Elk even getal ≥ 4 kan geschreven worden als som van twee priemgetallen.

$$100 = 3 + 97 = 11 + 89 = 17 + 83 = 29 + 71 = 41 + 59 = 47 + 53$$

Vermoedens

Vermoeden van Goldbach

Elk even getal ≥ 4 kan geschreven worden als som van twee priemgetallen.

$$100 = 3 + 97 = 11 + 89 = 17 + 83 = 29 + 71 = 41 + 59 = 47 + 53$$

Priemgetaltweeling vermoeden

Er zijn oneindig veel paren $n, n + 2$ die beide priem zijn.

Vermoedens

Vermoeden van Goldbach

Elk even getal ≥ 4 kan geschreven worden als som van twee priemgetallen.

$$100 = 3 + 97 = 11 + 89 = 17 + 83 = 29 + 71 = 41 + 59 = 47 + 53$$

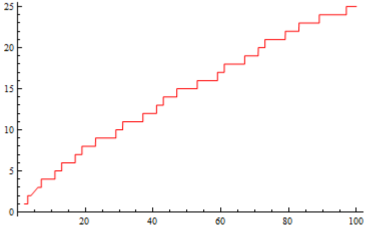
Priemgetaltweeling vermoeden

Er zijn oneindig veel paren $n, n + 2$ die beide priem zijn.

$$(11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), (71, 73), (101, 103), \ldots$$

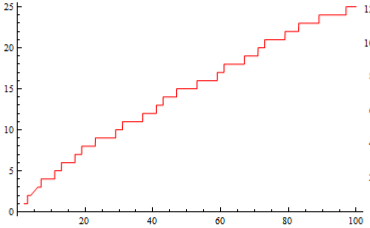
Priemgetallen tellen

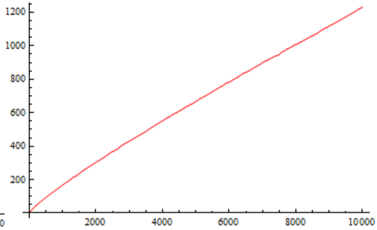
$$\pi(x) = \text{aantal priemgetallen kleiner of gelijk } x$$



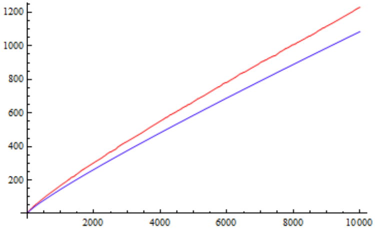
Priemgetallen tellen

$$\pi(x) = \text{aantal priemgetallen kleiner of gelijk } x$$



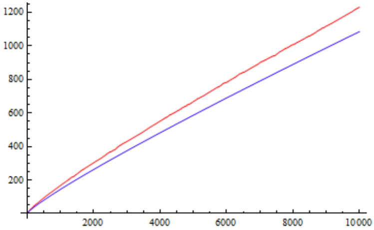


Benaderingen van $\pi(x)$

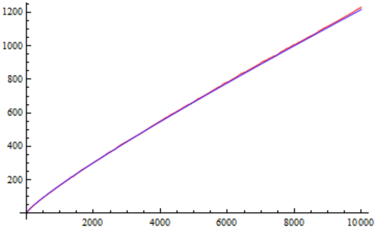


$$\frac{x}{\ln x}$$

Benaderingen van $\pi(x)$



$$\frac{x}{\ln x}$$



$$\frac{x}{\ln x - 1}$$

Gauss

Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Gauss benadering

Gauss: de dichtheid van de priemgetallen binnen de gehele getallen van de orde van grootte X is gelijk aan $\frac{1}{\ln X}$.

Gauss benadering

Gauss: de dichtheid van de priemgetallen binnen de gehele getallen van de orde van grootte X is gelijk aan $\frac{1}{\ln X}$. Hieruit zou volgen

$$\pi(x) \approx \int_2^x \frac{dt}{\ln t}$$

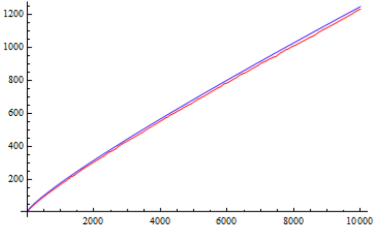
We geven deze laatste integraal aan met $\mathrm{li}(x)$.

Gauss benadering

Gauss: de dichtheid van de priemgetallen binnen de gehele getallen van de orde van grootte X is gelijk aan $\frac{1}{\ln X}$. Hieruit zou volgen

$$\pi(x) \approx \int_2^x \frac{dt}{\ln t}$$

We geven deze laatste integraal aan met $\mathrm{li}(x)$.



De verwachting is dat op de lange duur $\mathrm{li}(x)$ de beste benadering geeft.

Priemgetalstelling

Hadamard, De la Vallée-Poussin, 1899

De verhouding van $\pi(x)$ en $\frac{x}{\ln x}$ gaat naar 1 als x naar oneindig gaat.

Priemgetalstelling

Hadamard, De la Vallée-Poussin, 1899

De verhouding van $\pi(x)$ en $\frac{x}{\ln x}$ gaat naar 1 als x naar oneindig gaat.

Opmerkingen:

- Hetzelfde geldt voor de verhouding $\pi(x)/\mathrm{li}(x)$.
- Het bewijs gebruikt eigenschappen van de Riemann zeta-functie.

De Riemann ζ-functie

Neem een getal $s > 1$ en bekijk

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$$

De Riemann ζ-functie

Neem een getal $s > 1$ en bekijk

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$$

Bekende waarden:

1. (Euler)

$$\zeta(2) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\zeta(4) = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90}$$

De Riemann ζ-functie

Neem een getal $s > 1$ en bekijk

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$$

Bekende waarden:

1. (Euler)

$$\zeta(2) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\zeta(4) = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90}$$

2. $\zeta(2k) = \mathrm{breuk} \times \pi^{2k}$ voor alle positief gehele k (Euler).

De Riemann ζ-functie

Neem een getal $s > 1$ en bekijk

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$$

Bekende waarden:

1. (Euler)

$$\zeta(2) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\zeta(4) = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90}$$

2. $\zeta(2k) = \mathrm{breuk} \times \pi^{2k}$ voor alle positief gehele k (Euler).
3. Over $\zeta(3), \zeta(5), \ldots$ is vrijwel niets bekend. De irrationaliteit van $\zeta(3)$ werd pas in 1978 aangetoond ("A proof missed by Euler").

Euler

Leonhard Paul Euler (1707-1783)

Verband met priemgetallen

Euler product

$$\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots = \frac{1}{1-2^{-s}} \times \frac{1}{1-3^{-s}} \times \frac{1}{1-5^{-s}} \times \cdots$$

Verband met priemgetallen

Euler product

$$\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots = \frac{1}{1-2^{-s}} \times \frac{1}{1-3^{-s}} \times \frac{1}{1-5^{-s}} \times \cdots$$

Kort samengevat:

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ priem}} \frac{1}{1-p^{-s}}.$$

Bewijs

"Bewijs":

$$\frac{1}{1-2^{-s}} \times \frac{1}{1-3^{-s}} \times \frac{1}{1-5^{-s}} \times \cdots =$$

$$1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^{2s}} + \frac{1}{2^{3s}} + \cdots$$
$$\times$$
$$1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{3^{2s}} + \frac{1}{3^{3s}} + \cdots$$
$$\times$$
$$1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{5^{2s}} + \frac{1}{5^{3s}} + \cdots$$
$$\times \cdots$$

Bewijs

"Bewijs":

$$\frac{1}{1-2^{-s}} \times \frac{1}{1-3^{-s}} \times \frac{1}{1-5^{-s}} \times \cdots =$$

$$1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^{2s}} + \frac{1}{2^{3s}} + \cdots$$

$$\times$$

$$1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{3^{2s}} + \frac{1}{3^{3s}} + \cdots$$

$$\times$$

$$1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{5^{2s}} + \frac{1}{5^{3s}} + \cdots$$

$$\times \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \cdots$$

Convergentie van de reeks

Voor $s = 1$ hebben we

$$\zeta(1) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

en deze *divergeert*, dwz heeft oneindige som.

Convergentie van de reeks

Voor $s = 1$ hebben we

$$\zeta(1) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

en deze *divergeert*, dwz heeft oneindige som. Immers:

- $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

Convergentie van de reeks

Voor $s = 1$ hebben we

$$\zeta(1) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

en deze *divergeert*, dwz heeft oneindige som. Immers:

- $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$
- $\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8} > 4 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$

Convergentie van de reeks

Voor $s = 1$ hebben we

$$\zeta(1) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

en deze *divergeert*, dwz heeft oneindige som. Immers:

- $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$
- $\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8} > 4 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$
- $\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16} > 8 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$

Convergentie van de reeks

Voor $s = 1$ hebben we

$$\zeta(1) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

en deze *divergeert*, dwz heeft oneindige som. Immers:

- $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$
- $\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8} > 4 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$
- $\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16} > 8 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$
- etcetera...

Oneindig veel priemgetallen

Vullen we in het Euler product $s = 1$ in, dan krijgen we

$$\zeta(1) = \prod_{p \text{ priem}} \left(\frac{1}{1 - 1/p} \right)$$

Als er eindig veel priemgetallen zouden zijn, dan krijgen we rechts een eindig getal als antwoord. Dat kan niet want $\zeta(1) = \infty$.

Oneindig veel priemgetallen

Vullen we in het Euler product $s = 1$ in, dan krijgen we

$$\zeta(1) = \prod_{p \text{ priem}} \left(\frac{1}{1 - 1/p} \right)$$

Als er eindig veel priemgetallen zouden zijn, dan krijgen we rechts een eindig getal als antwoord. Dat kan niet want $\zeta(1) = \infty$.

Een variant:

$$\frac{\pi^2}{6} = \zeta(2) = \prod_{p \text{ priem}} \left(\frac{1}{1 - 1/p^2} \right)$$

De linkerzijde is irrationaal. Als er eindig veel priemgetallen zouden zijn, dan zou de rechterzijde rationaal (een breuk) zijn. Kan niet.

Riemann

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866)

Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse (November 1859)

Riemann's ideeën

1. Bekijk $\zeta(s)$ ook voor complexe waarden van s.

Riemann's ideeën

1. Bekijk $\zeta(s)$ ook voor complexe waarden van s.
2. $\zeta(s)$ is analytisch voortzetbaar tot het gehele complexe vlak.

Riemann's ideeën

1. Bekijk $\zeta(s)$ ook voor complexe waarden van s.
2. $\zeta(s)$ is analytisch voortzetbaar tot het gehele complexe vlak.
3. De waarden van $\zeta(s)$ en $\zeta(1-s)$ staan in verband met elkaar (functionaalvergelijking).

Riemann's ideeën

1. Bekijk $\zeta(s)$ ook voor complexe waarden van s.
2. $\zeta(s)$ is analytisch voortzetbaar tot het gehele complexe vlak.
3. De waarden van $\zeta(s)$ en $\zeta(1-s)$ staan in verband met elkaar (functionaalvergelijking).
4. Het groeigedrag van de functie $\pi(x)$ staat in direct verband met de locatie van de nulpunten van $\zeta(s)$ in de strook $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$.

Complexe zeta-functie

Complexe s-de macht van een positief getal a:

$$a^s = e^{s \ln a}.$$

Ter herinnering:

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Complexe zeta-functie

Complexe s-de macht van een positief getal a:

$$a^s = e^{s \ln a}.$$

Ter herinnering:

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

De reeks

$$\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$$

convergeert voor alle complexe s met $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Voortzetting tot complexe vlak

Riemann ontdekte dat $\zeta(s)$ op natuurlijke manier voort te zetten is tot het gehele complexe vlak, behalve $s = 1$. Daar heeft $\zeta(s)$ een pool (ihb $\zeta(1) = \infty$).

Voortzetting tot complexe vlak

Riemann ontdekte dat $\zeta(s)$ op natuurlijke manier voort te zetten is tot het gehele complexe vlak, behalve $s = 1$. Daar heeft $\zeta(s)$ een pool (ihb $\zeta(1) = \infty$).
Tevens is er een verband tussen $\zeta(s)$ en $\zeta(1-s)$, namelijk:

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \pi^{(s-1)/2}\Gamma((1-s)/2)\zeta(1-s).$$

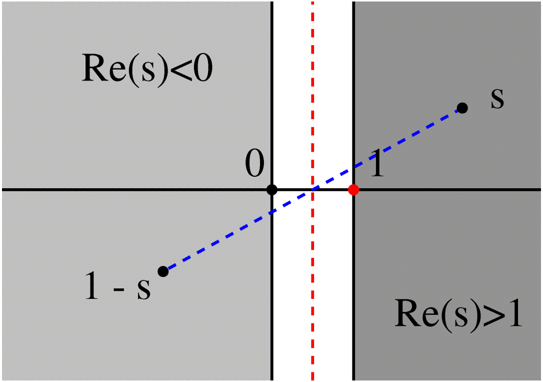
Voortzetting tot complexe vlak

Riemann ontdekte dat $\zeta(s)$ op natuurlijke manier voort te zetten is tot het gehele complexe vlak, behalve $s = 1$. Daar heeft $\zeta(s)$ een pool (ihb $\zeta(1) = \infty$).
Tevens is er een verband tussen $\zeta(s)$ en $\zeta(1-s)$, namelijk:

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \pi^{(s-1)/2}\Gamma((1-s)/2)\zeta(1-s).$$

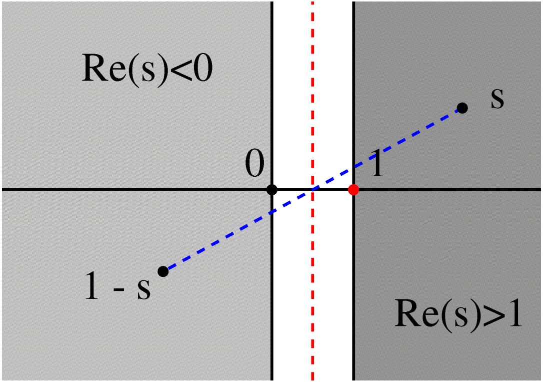
Voor de liefhebbers: $\Gamma(n+1) = n!$.

De kritieke strook



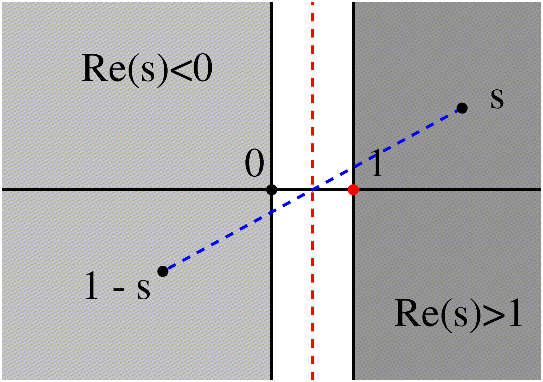
- In $\mathrm{Re}(s) > 1$ is $\zeta(s)$ bekend vanwege de somdefinitie.

De kritieke strook



- In $\mathrm{Re}(s) > 1$ is $\zeta(s)$ bekend vanwege de somdefinitie.
- In $\mathrm{Re}(s) < 0$ is $\zeta(s)$ bekend vanwege de functionaal-vergelijking.

De kritieke strook



- In $\mathrm{Re}(s) > 1$ is $\zeta(s)$ bekend vanwege de somdefinitie.
- In $\mathrm{Re}(s) < 0$ is $\zeta(s)$ bekend vanwege de functionaal-vergelijking.
- Blijft over: $0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1$, de *kritieke strook*.

Nulpunten

We hebben: $\zeta(-2) = \zeta(-4) = \zeta(-6) = \ldots = 0$. Dit is een gevolg van de functionaalvergelijking. Men noemt dit de *triviale nulpunten*. Alle andere nulpunten liggen in de kritieke strook (als ze bestaan).

Nulpunten

We hebben: $\zeta(-2) = \zeta(-4) = \zeta(-6) = \ldots = 0$. Dit is een gevolg van de functionaalvergelijking. Men noemt dit de *triviale nulpunten*. Alle andere nulpunten liggen in de kritieke strook (als ze bestaan).
Er zijn inderdaad niet-triviale nulpunten! Riemann ontdekte:

$$\begin{aligned}
\zeta(1/2 + 14.1347\ldots i) &= 0 \\
\zeta(1/2 + 21.0220\ldots i) &= 0 \\
\zeta(1/2 + 25.0108\ldots i) &= 0 \\
&\ldots
\end{aligned}$$

Riemann vermoeden

Riemann vermoeden

Alle niet-triviale nulpunten van $\zeta(s)$ hebben reëel deel $1/2$.

Riemann vermoeden

Riemann vermoeden

Alle niet-triviale nulpunten van $\zeta(s)$ hebben reëel deel $1/2$.

Riemann: *Hiervon wäre allerdings ein strenger Beweis zu wünschen; ich habe indess die Aufsuchung desselben nach einigen flüchtigen vergeblichen Versuchen vorläufig bei Seite gelassen, da er für den nächsten Zweck meiner Untersuchung entbehrlich schien.*

Riemann vermoeden

Riemann vermoeden

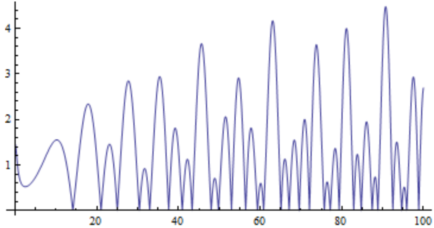
Alle niet-triviale nulpunten van $\zeta(s)$ hebben reëel deel $1/2$.

Riemann: *Hiervon wäre allerdings ein strenger Beweis zu wünschen; ich habe indess die Aufsuchung desselben nach einigen flüchtigen vergeblichen Versuchen vorläufig bei Seite gelassen, da er für den nächsten Zweck meiner Untersuchung entbehrlich schien.*

De lijn van punten s met reëel deel $1/2$ noemen we de *kritieke lijn*.

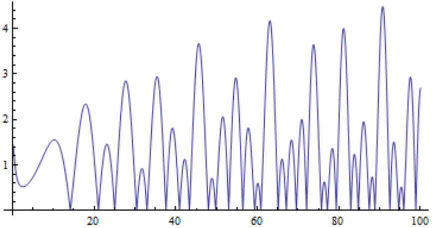
Grafieken

Grafiek van $|\zeta(1/2 + it)|$

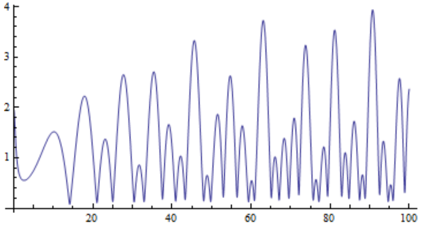


Grafieken

Grafiek van $|\zeta(1/2 + it)|$

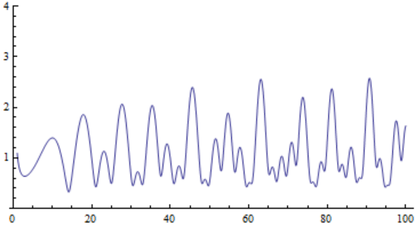


Grafiek van $|\zeta(0.6 + it)|$



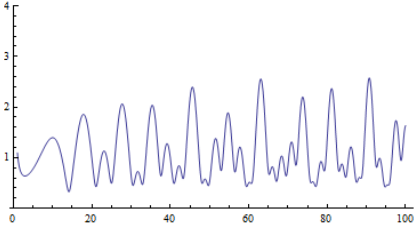
Als Re(s)=1

Grafiek van $|\zeta(1+it)|$



Als Re(s)=1

Grafiek van $|\zeta(1 + it)|$



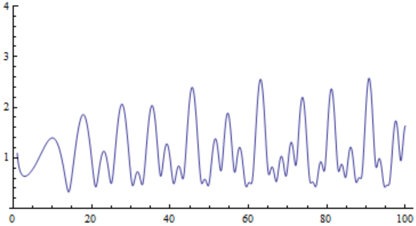
Voor het bewijs van de priemgetalstelling

$$\frac{x}{\pi(x)\ln(x)} \to 1$$

is alleen nodig dat $\zeta(s)$ geen nulpunten heeft op de lijn met reële deel 1.

Als Re(s)=1

Grafiek van $|\zeta(1+it)|$



Voor het bewijs van de priemgetalstelling

$$\frac{x}{\pi(x)\ln(x)} \to 1$$

is alleen nodig dat $\zeta(s)$ geen nulpunten heeft op de lijn met reële deel 1.
En dat is inderdaad het geval.

Resultaten

Levinson

Minstens $1/3$ deel van de niet-triviale nulpunten ligt op de kritieke lijn.

Resultaten

Levinson

Minstens 1/3 deel van de niet-triviale nulpunten ligt op de kritieke lijn.

Gourdon, DeMichel, 2004

De eerste 10^{12} nulpunten liggen op de kritieke lijn.

Resultaten

Levinson

Minstens $1/3$ deel van de niet-triviale nulpunten ligt op de kritieke lijn.

Gourdon, DeMichel, 2004

De eerste 10^{12} nulpunten liggen op de kritieke lijn.

In 2000 werd het Riemannvermoeden één van de zeven Milennium Prize Problems. De beloning van 1 miljoen dollar voor een correcte oplossing werd uitgeloofd door het Clay Mathematics Institute.

Verschil tussen $\pi(x)$ en $\mathrm{li}(x)$

x	$\pi(x)$	$\mathrm{li}(x)$	$\mathrm{li}(x) - \pi(x)$
1000	168	178	10
10000	1229	1246	17
100000	9592	9630	38
1000000	78498	78628	130
10000000	664579	664918	339
100000000	5761455	5762209	754
1000000000	50847534	50849235	1701
10000000000	455052511	455055614	3103

Verschil tussen $\pi(x)$ en $\mathrm{li}(x)$

x	$\pi(x)$	$\mathrm{li}(x)$	$\mathrm{li}(x) - \pi(x)$
1000	168	178	10
10000	1229	1246	17
100000	9592	9630	38
1000000	78498	78628	130
10000000	664579	664918	339
100000000	5761455	5762209	754
1000000000	50847534	50849235	1701
10000000000	455052511	455055614	3103

Als het Riemannvermoeden waar is, dan

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O(\sqrt{x} \ln x)$$

Verschil tussen $\pi(x)$ en $\mathrm{li}(x)$

x	$\pi(x)$	$\mathrm{li}(x)$	$\mathrm{li}(x) - \pi(x)$
1000	168	178	10
10000	1229	1246	17
100000	9592	9630	38
1000000	78498	78628	130
10000000	664579	664918	339
100000000	5761455	5762209	754
1000000000	50847534	50849235	1701
10000000000	455052511	455055614	3103

Als het Riemannvermoeden waar is, dan

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O(\sqrt{x} \ln x)$$

Omgekeerd, als de voorgaande gelijkheid waar is, dan is het Riemannvermoeden ook waar!

Liouville functie

Nog merkwaardiger: Definieer de *Liouville-functie* $\lambda(n) = 1$ als n een even aantal priemfactoren heeft en $\lambda(n) = -1$ anders.

Liouville functie

Nog merkwaardiger: Definieer de *Liouville-functie* $\lambda(n) = 1$ als n een even aantal priemfactoren heeft en $\lambda(n) = -1$ anders.

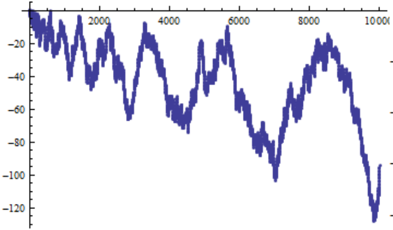
n	$\lambda(n)$				
1	1	11	-1	22	1
2	-1	12	-1	23	-1
3	-1	13	-1	24	1
4	1	14	1	25	1
5	-1	15	1	26	1
6	1	16	1	27	-1
7	-1	17	-1	28	-1
8	-1	18	-1	29	-1
9	1	19	-1	30	-1
10	1	20	-1	31	-1
		21	1	32	-1

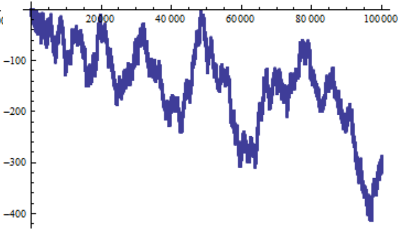
De som van Liouville-waarden

Bekijk

$$L(n) = \lambda(1) + \lambda(2) + \lambda(3) + \cdots + \lambda(n)$$

Grafieken van $L(n)$,





Dan is het Riemannvermoeden equivalent met:

$$\lambda(1) + \lambda(2) + \lambda(3) + \cdots + \lambda(N) = O(\sqrt{N}).$$

Toch convergentie voor $0 < s < 1$

De gewone reeks voor $\zeta(s)$ divergeert als $s < 1$.

Toch convergentie voor $0 < s < 1$

De gewone reeks voor $\zeta(s)$ divergeert als $s < 1$. Door een trucje kunnen we toch convergentie voor $0 < s < 1$ krijgen!

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$$

Toch convergentie voor $0 < s < 1$

De gewone reeks voor $\zeta(s)$ divergeert als $s < 1$. Door een trucje kunnen we toch convergentie voor $0 < s < 1$ krijgen!

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$$

$$\frac{2}{2^s}\zeta(s) = \frac{2}{2^s} + \frac{2}{4^s} + \frac{2}{6^s} + \cdots$$

Toch convergentie voor $0 < s < 1$

De gewone reeks voor $\zeta(s)$ divergeert als $s < 1$. Door een trucje kunnen we toch convergentie voor $0 < s < 1$ krijgen!

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$$

$$\frac{2}{2^s}\zeta(s) = \frac{2}{2^s} + \frac{2}{4^s} + \frac{2}{6^s} + \cdots$$

Verschil nemen:

$$(1 - 2^{1-s})\zeta(s) = \frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \cdots$$

Toch convergentie voor $0 < s < 1$

De gewone reeks voor $\zeta(s)$ divergeert als $s < 1$. Door een trucje kunnen we toch convergentie voor $0 < s < 1$ krijgen!

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$$

$$\frac{2}{2^s}\zeta(s) = \frac{2}{2^s} + \frac{2}{4^s} + \frac{2}{6^s} + \cdots$$

Verschil nemen:

$$(1 - 2^{1-s})\zeta(s) = \frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \cdots$$

Deze alternerende reeks convergeert voor alle $0 < s < 1$ en zelfs in de strook $0 < \mathrm{Re}(s) \leq 1$. We krijgen

$$\zeta(s) = \frac{1}{1 - 2^{1-s}} \left(\frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \cdots \right).$$