Extra opgave 1

1. Bewijs dat $\pi(n) \leq n - [n/2] - [n/3] + [n/6]$ voor alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$.
2. Leidt hieruit af dat $\pi(n) \leq n/3 + 2$ voor alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$.
3. Schrijf een analoge ongelijkheid als in onderdeel (1) maar nu met de eerste r priemgetallen $p_1, p_2, \ldots, p_r$ in plaats van $2, 3$.
4. Leidt uit het voorgaande onderdeel af dat $\pi(n)/n \to 0$ wanneer $n \to \infty$.

Extra opgave 2
Bewijs dat voor elke $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ het interval $[n! + 2, n! + n]$ geen priemgetallen bevat.

Extra opgave 3
Gegeven is dat voor elke $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ geldt $n! > (n/e)^n$.

1. Zij p priem. Bewijs dat het aantal priemfactoren p in $n!$ altijd kleiner is dan $n/(p-1)$.
2. Laat met behulp van het voorgaande onderdeel zien dat
$$\sum_{p \leq n} \frac{\log p}{p-1} \geq -1 + \log n$$
voor alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$. (De sommatie is over alle priemgetallen $p \leq n$)
3. Laat zien dat er een constante C bestaat zó dat
$$\sum_{p \leq n} \frac{\log p}{p} \geq C + \log n$$
voor alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$.
4. (lastiger) Gegeven is dat $n! < 7n(n/e)^n$ voor alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$. Bewijs dat er een C' is zó dat
$$\sum_{p \leq n} \frac{\log p}{p} \leq C' + \log n$$
voor alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$.
5. (ook lastig) Leidt uit het voorgaande onderdeel af dat er $A > 0$ en B bestaan zó dat
$$\sum_{p \leq n} \frac{1}{p} \leq B + A \log \log n$$
voor alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$.