Elementaire Getaltheorie, 27-6-1995

1. (a) Bepaal de kleinste $x \in \mathbb{N}$ zó dat

$$x \equiv 5 \pmod 6, \quad x \equiv 8 \pmod 9$$

$$x \equiv 2 \pmod{15}, \quad x \equiv 1 \pmod 8$$

   (b) Bewijs dat er bij elke $n \in \mathbb{N}$ een rij van n opeenvolgende natuurlijke getallen $x+1, x+2, \ldots, x+n$ bestaat, zódat $x+i$ deelbaar is door een i-de macht> 1 voor $i = 1, 2, \ldots, n$.

2. (a) Voor welke priemgetallen is 5 een kwadraatrest ?

   (b) Zij p een priemgetal zó dat $q = 2p+1$ priem is en zo dat $p \equiv 1 \pmod 5$. Bewijs dat 5 een primitieve wortel modulo q is.

3. (a) Bepaal alle primitieve wortels modulo 13.

   (b) Bepaal een primitieve wortel modulo 169.

   (c) Zij p oneven priem en $g \in \mathbb{N}$ een primitieve wortel modulo p en zó dat $g^{p-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p^2)$. Bewijs dat $g+p$ een primitieve wortel modulo p^2 is.

4. (a) Los $y^2 = 4x^3 + 1$ op in $x, y \in \mathbb{Z}$.

   (b) Geef aan hoe je oneindig veel drietallen $x, y, z \in \mathbb{N}$ kunt construeren met de eigenschappen $\mathrm{ggd}(x, y) = 1$ en $x^2 + y^2 = 5z^3$

5. Zij $a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots$ een strikt stijgende rij natuurlijke getallen. Bewijs dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

irrationaal is.