Inleveropgaven deel I

Elementaire getaltheorie 2005

NB: Geef bij al je antwoorden aan hoe je aan het resultaat komt.

1. Bepaal de ggd d van 20785 en 44350. Bepaal tevens gehele getallen x, y zó dat $d = 20785x+44350y$. (Je mag hier natuurlijk een rekenapparaat gebruiken)

2. Zij a, b een tweetal verschillende natuurlijke getallen, en relatief priem. Laat zien dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt

$$\operatorname{ggd}\left(\frac{a^n - b^n}{a-b}, a-b\right) = \operatorname{ggd}(n, a-b).$$

3. Een natuurlijk getal n heet *overvloedig* als $\sigma(n) > 2n$.

   (a) Zij n een overvloedig getal. Laat zien dat elk veelvoud van n ook overvloedig is.

   (b) Laat zien dat er een oneven overvloedig getal is.

   (c) Laat zien dat er oneindig veel oneven overvloedige getallen zijn.

4. Vindt alle oplossingen $x \in \mathbb{Z}$ van de congruentievergelijking

$$987x \equiv 610 (\text{mod } 1597).$$

5. Bewijs door inductie dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt,

$$5^n \equiv 1 + 4n (\text{mod } 16).$$

   Vindt een analoge formule voor $5^n (\text{mod } 32)$.

6. Geef de volledige oplossing van het stelsel congruentievergelijkingen

$$x \equiv 7 (\text{mod } 9) \quad x \equiv 2 (\text{mod } 10) \quad x \equiv 3 (\text{mod } 12) \quad x \equiv 6 (\text{mod } 15)$$

   in $x \in \mathbb{Z}$.

7. Zij p, q een tweetal priemgetallen. Hoeveel restklassen modulo pq heeft de vergelijking $x^2 \equiv 1 (\text{mod } pq)$ als oplossing?