

Inleveropgaven deel II
Elementaire getaltheorie 2005

NB: Geef bij al je antwoorden aan hoe je aan het resultaat komt.

1. Voor welke natuurlijke getallen n geldt dat $\phi(n) = n/2$?
2. Laat zien dat voor elke natuurlijk getal $n \neq 2, 6$ geldt $\phi(n) \geq \sqrt{n}$.
3. Zij p oneven priem.
 - (a) Laat zien dat $\text{ord}_{p^2}(1+p) = p$.
 - (b) Laat zien dat voor elke $k \geq 1$ geldt $\text{ord}_{p^k}(1+p) = p^{k-1}$.
 - (c) Laat zien dat er voor elke $k \geq 1$ een primitieve wortel modulo p^k bestaat. (Hint: Bepaal $\phi(p^k)$ en gebruik Lemma 7.3.5 en Stelling 7.4.1)
4. Zij p oneven priem en zij g een primitieve wortel modulo p .
 - (a) Zij $a \in \mathbb{N}$. Laat dat g^a een primitieve wortel modulo p is precies dan als $\text{ggd}(a, p-1) = 1$.
 - (b) Hoeveel (mod p) verschillende primitieve wortels modulo p bestaan er?
5. Bereken hoeveel verschillende oplossingen $x^2 \equiv 58 \pmod{77}$ heeft en bepaal ze vervolgens.