Extra opgaven lineaire algebra 15, 17 jan 2013

Extra opgave 1 Gegeven de vectorruimte $\mathbb{R}[x]$ met inproduct

$$\langle p(x), q(x)\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx.$$

Zij V de deelruimte opgespannen door $1, x, x^2$. Bepaal de orthogonale projectie van x^n op V.

Extra opgave 2 Gegeven de vectorruimte van continue functies op $[-\pi, \pi]$ en inproduct

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

Zij V de deelruimte opgespannen door $\sin(x), \sin(2x), \ldots, \sin(nx)$. Bepaal de orthogale projectie van de functie x op V.

Extra opgave 3 Gegeven is de vectorruimte $\mathbb{R}^4$ met standaard inproduct (dotproduct). Zij V de deelruimte gegeven door de vergelijking $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$. Zij $P : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ de loodrechte projectie-afbeelding op V. Bepaal de matrix van P ten opzichte van de standaard basis van $\mathbb{R}^4$.

Extra opgave 4 Een lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ heeft ten opzichte van de standaard basis van $\mathbb{R}^3$ de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Bepaal een orthonormale basis van eigenvectoren van A.

Extra opgave 5 Een lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ heeft ten opzichte van de standaard basis van $\mathbb{R}^4$ de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bepaal een orthonormale basis van eigenvectoren van A.

Extra opgave 6 Zij V een vectorruimte met inproduct $\langle , \rangle$ en $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$. De Grammatrix van deze vectoren noemen we M. Bewijs:

$$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \text{ afhankelijk} \iff \det(M) = 0.$$