

De Wonderbare Wiskundige Keuken

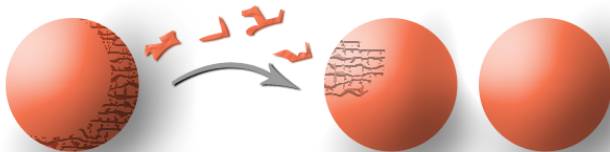
door Gunther Cornelissen



Ouderdag A-eskwadraat, 10 februari 2007



Wat we willen koken



Uit één sinaasappel twee sinaasappels maken die elk precies even groot zijn als de oorspronkelijke, door



Wie?

Uit één sinaasappel twee sinaasappels maken die elk precies even groot zijn als de oorspronkelijke, door

- ▶ De eerste sinaasappel in 5 samenhangende stukken te verdelen;
- ▶ Deze stukken op een continue manier weer samen te voegen.

Banach-Tarski 1924



Wie?



Stefan Banach

30/3/1892

Kraków

(Oostenrijk-Hongarije, nu Polen)

31/8/1945

Lvov (Ukraine, tot 1944 Polen)



Alfred Tarski

14/1/1902,

Warschau

(Russisch Keizerrijk, nu Polen)

26/10/1983

Berkeley, California (USA)



Wie?

Uit één sinaasappel twee sinaasappels maken die elk precies even groot zijn als de oorspronkelijke, door

- ▶ De eerste sinaasappel in 5 samenhangende stukken te verdelen;
- ▶ Deze stukken op een continue manier weer samen te voegen.

R.M. Robinson 1947



Wie?

Uit één sinaasappel twee sinaasappels maken die elk precies even groot zijn als de oorspronkelijke, door

- ▶ De eerste sinaasappel in 5 samenhangende stukken te verdelen;
- ▶ Deze stukken op een **continue** manier weer samen te voegen.

T.M. Wilson 2005





Waarom het *niet* kan met een mesje en sinaasappels

De Banach-Tarski-stelling gaat over de (*wiskundige*) vorm: uit een bol twee dezelfde bollen maken. Het kan niet in werkelijkheid met sinaasappels:

- ▶ Volume/gewicht is niet behouden, want anders zou $1=1+1$. Inderdaad: de 5 stukken zijn **niet meetbaar**.



Waarom het *niet* kan met een mesje en sinaasappels

De Banach-Tarski-stelling gaat over de (*wiskundige*) vorm: uit een bol twee dezelfde bollen maken. Het kan niet in werkelijkheid met sinaasappels:

- ▶ Volume/gewicht is niet behouden, want anders zou $1=1+1$. Inderdaad: de 5 stukken zijn **niet meetbaar**.
- ▶ Het bewijs is **niet constructief**. Inderdaad: het gebruikt het **keuzeaxioma**.



Waarom het *niet* kan met een mesje en sinaasappels

De Banach-Tarski-stelling gaat over de (*wiskundige*) vorm: uit een bol twee dezelfde bollen maken. Het kan niet in werkelijkheid met sinaasappels:

- ▶ Volume/gewicht is niet behouden, want anders zou $1=1+1$. Inderdaad: de 5 stukken zijn **niet meetbaar**.
- ▶ Het bewijs is **niet constructief**. Inderdaad: het gebruikt het **keuzeaxioma**.
- ▶ de constructie van de 5 delen is misschien in strijd met **natuurkunde**, i.h.b. de aard van elementaire deeltjes.



Waarom het ook wiskundig vreemd is...

- ▶ Er is een 1-1 afbeelding tussen één bol en twee bollen: dat is niet zo vreemd, er is ook een 1-1 afbeelding tussen getallen en even getallen ($1 \mapsto 2, 2 \mapsto 4, 3 \mapsto 6, \dots$).



Waarom het ook wiskundig vreemd is...

- ▶ Er is een 1-1 afbeelding tussen één bol en twee bollen: dat is niet zo vreemd, er is ook een 1-1 afbeelding tussen getallen en even getallen ($1 \mapsto 2, 2 \mapsto 4, 3 \mapsto 6, \dots$).
- ▶ Het merkwaardige aan Banach-Tarski is: er zijn maar **eindig** veel stukken, en ze worden door **vormbehoudende transformaties** weer samengevoegd.



Mexikanische Gerichte

155	Burrito à la Mohan mit frischem Gemüse	5,50
156	Burrito Klassic mit Rinderkack, Bacon, BBQ-Sauce in der Füllung	6,00
157	Burrito California mit Hähnchenfleisch, Zwiebeln, Mais, Paprika	6,00



Een taal met vier letters



Neem twee letters a en b en maak hiermee alle (eindige) woorden in de tekens a , b , a^{-1} en b^{-1} , zodat geen a naast a^{-1} en geen b naast b^{-1} staat. Maak ook een “leeg” woord e .



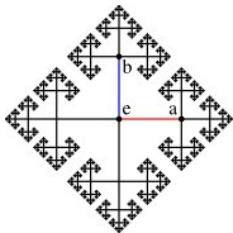
Een taal met vier letters

Twee woorden kunnen worden samengevoegd door ze na mekaar te schrijven en eventuele opeenvolgende a , a^{-1} of b , b^{-1} te schrappen:

$$aaba^{-1}bb \cdot b^{-1}b^{-1}aba = aaba^{-1}b \underbrace{bb^{-1}} b^{-1}aba = \dots = aababa.$$



Een taal met vier letters



Stel elk woord voor als een punt in het vlak, en verbindt twee woorden als je het ene uit het andere krijgt door er één van de vier letters voor te zetten. Je krijgt een *boom*.



Een paradoxale ontbinding

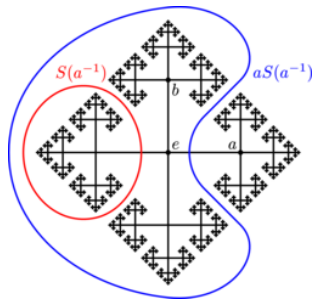
Stel dat F_2 de verzameling is van alle woorden in deze letters.
Voor x een letter, stel dat $S(x)$ de verzameling is van alle woorden die met x beginnen, bijv.

$$S(a) = \{a, aa, ab, aaa, aba, aaab, abababa, \dots\}$$



Een paradoxale ontbinding

Stel dat F_2 de verzameling is van alle woorden in deze letters.
Voor x een letter, stel dat $S(x)$ de verzameling is van alle woorden die met x beginnen,



$$F_2 = \{e\} \cup S(a) \cup S(a^{-1}) \cup S(b) \cup S(b^{-1})$$

$$F_2 = aS(a^{-1}) \cup S(a)$$

$$F_2 = bS(b^{-1}) \cup S(b).$$



Een paradoxale ontbinding

Stel dat F_2 de verzameling is van alle woorden in deze letters.
Voor x een letter, stel dat $S(x)$ de verzameling is van alle woorden die met x beginnen.

$$F_2 = \{e\} \cup S(a) \cup S(a^{-1}) \cup S(b) \cup S(b^{-1})$$

$$F_2 = aS(a^{-1}) \cup S(a) \approx S(a^{-1}) \cup S(a)$$

$$F_2 = bS(b^{-1}) \cup S(b) \approx S(b^{-1}) \cup S(b).$$



Van woorden naar rotaties

We vinden nu een verzameling **rotaties in de ruimte** die zich net zo gedragen als F_2 .

Stel θ is een hoek waarvan de cosinus $1/3$ is.

in F_2	als rotatie
a	rotatie A rond de x -as over de hoek θ .
b	rotatie B rond de z -as over de hoek θ .

Dan zijn a^{-1} en b^{-1} gegeven door de rotaties in de omgekeerde richting, want het regeltje $aa^{-1} = e$ moet kloppen.

Zo correspondeert met een woord een samenstelling van de rotaties: bijv. aba is eerst rond de x -as, dan rond de z -as en dan weer rond de x -as roteren; dit schrijven we als ABA .

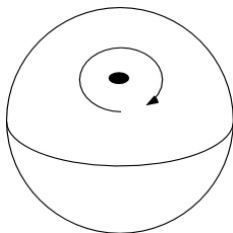
Men kan wiskundig (met lineaire algebra en "volledige inductie") aantonen dat dit een 1-1 correspondentie is tussen woorden in de vier letters en *verschillende* rotaties.



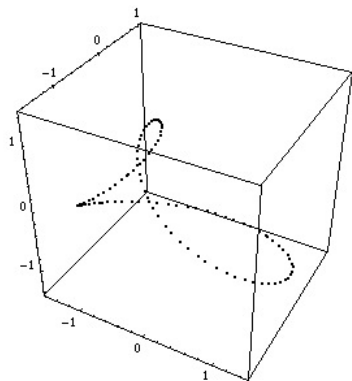
Acties en banen

Denk aan de baan van een planeet onder een vaste rotatie.

Bekijk de baan op een sfeer (middenpunt 0, straal 1) van een vast punt onder *alle* rotaties die van F_2 komen. Dit is een verzameling punten X op de sfeer.

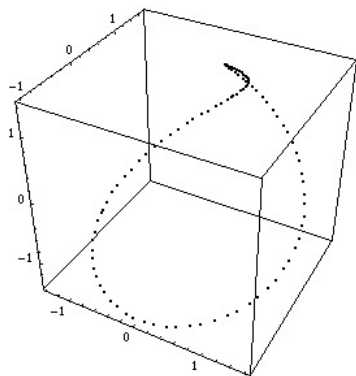


Enige banen



$$A^i B^{i+2} (1.1.1)$$

($i=1, \dots, 100$)



$$A^i B^{i+20} (1.1.1)$$



Acties en banen

Elke rotatie heeft twee vaste punten op de sfeer: de snijpunten van de rotatie-as met de sfeer. Alle rotaties in F_2 samen hebben een aftelbare verzameling F vaste punten op de sfeer S .

Stel dat u een punt is op S buiten F . Dan is er een 1-1 verband tussen F_2 en de baan X van u onder de actie van F_2 :

$$abab \rightarrow ABAB(u).$$



Acties en banen

De splitsing

$$F_2 - \{e\} = S(a) \cup S(a^{-1}) \cup S(b) \cup S(b^{-1})$$

geeft een splitsing van de baan

$$X - \{u\} = S(A) \cdot u \cup S(A^{-1}) \cdot u \cup S(B) \cdot u \cup S(B^{-1}) \cdot u$$

met ook

$$X = S(A) \cdot u \cup AS(A^{-1}) \cdot u = S(B) \cdot u \cup BS(B^{-1}) \cdot u$$



Alle banen samen

Kies in elke baan X een beginpunt u (keuzeaxioma!) en maak een splitsing van de baan als voorheen. Bekijk dan

$$A_1 = \bigcup_u S(A) \cdot u; \quad A_2 = \bigcup_u S(A^{-1}) \cdot u;$$

$$B_1 = \bigcup_u S(B) \cdot u; \quad B_2 = \bigcup_u S(B^{-1}) \cdot u.$$

Er geldt

$$S - F = A_1 \cup A_2 \cup B_1 \cup B_2$$

en

$$S - F = A_1 \cup A \cdot A_2 = B_1 \cup B \cdot B_2,$$

met A en B rotaties.



De laatste loodjes

$$S - F = A_1 \cup \dots \cup A_i \cup B_1 \cup \dots \cup B_j$$

$$S - F = A'_1 \cup \dots \cup A'_i = B'_1 \cup \dots \cup B'_j.$$

$$A'_* \equiv A_*; B'_* \equiv B_*$$



De laatste loodjes

$$S = A_1 \cup \dots \cup A_i \cup B_1 \cup \dots \cup B_j$$

$$S = A'_1 \cup \dots \cup A'_i = B'_1 \cup \dots \cup B'_j.$$

$$A'_* \equiv A_*; B'_* \equiv B_*$$

- ▶ I.p.v. een splitsing van $S - F$ kan het ook voor S (technisch!)



De laatste loodjes

$$B - \{0\} = A_1 \cup \dots \cup A_i \cup B_1 \cup \dots \cup B_j$$

$$B - \{0\} = A'_1 \cup \dots \cup A'_i = B'_1 \cup \dots \cup B'_j.$$

$$A'_* \equiv A_*; B'_* \equiv B_*$$

- ▶ I.p.v. een splitsing van $S - F$ kan het ook voor S (technisch!)
- ▶ I.p.v. een splitsing van S kan het ook voor $B - \{0\}$:
uitbreiding naar “stralen”.



De laatste loodjes

$$B = A_1 \cup \dots \cup A_i \cup B_1 \cup \dots \cup B_j$$

$$B = A'_1 \cup \dots \cup A'_i = B'_1 \cup \dots \cup B'_j.$$

$$A'_* \equiv A_*; B'_* \equiv B_*$$

- ▶ I.p.v. een splitsing van $S - F$ kan het ook voor S (technisch!)
- ▶ I.p.v. een splitsing van S kan het ook voor $B - \{0\}$:
uitbreiding naar “stralen”.
- ▶ I.p.v. een splitsing van $B - \{0\}$ kan het ook voor B

