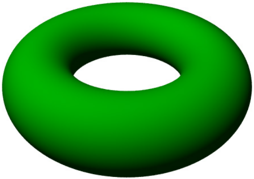
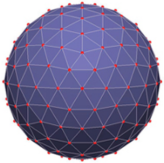
Euler, Ballonnen en de rest

door Gunther Cornelissen (Universiteit Utrecht)



Het Ballonnenspel

Blaas een ballon op en *trianguleer* hem, d.w.z.: bedek hem volledig met veelhoeken (driehoeken, vierkanten, ...) die elkaar precies in volledige zijden overlappen:



Stel dat

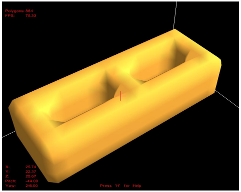
- H = aantal hoekpunten dat je hebt gebruikt;
- Z = aantal zijden dat je hebt gebruikt;
- V = aantal vlakken dat je hebt gebruikt.

Bereken vervolgens

$$\boxed{H - Z + V}$$

De Rest

Een aantal van jullie heeft niet een ballon gekregen om te trianguleren, maar wel iets anders . . . .



De opgave is nog steeds: bereken

$$\boxed{H - Z + V}$$

als

- H = aantal hoekpunten dat je hebt gebruikt;
- Z = aantal zijden dat je hebt gebruikt;
- V = aantal vlakken dat je hebt gebruikt.

Resultaten

object	$\chi = H - Z + V$
sfeer, kubus, ...	2
torus	0

Resultaten

object	$\chi = H - Z + V$
sfeer, kubus, ...	2
torus	0
g gatenkaas	$2 - 2g$

Stelling ("Euler", 1752). *Als een gesloten oppervlak met g gaten volledig is overdekt door V vlakken die precies in zijden overlappen, en er zijn Z zijden en H hoekpunten, dan is*

$$H - Z + V = 2 - 2g.$$

Opgave

Een vijandig bijenvolk wil de volledige aarde omspannen met één grote honingraat. Een slimme bij ziet in dat dit niet kan:
laat zien dat een sfeer niet door zeshoeken kan worden overdekt, zodat elk paar verschillende zeshoeken precies één zijde gemeen heeft en in elk hoekpunt tenminste drie zijden samenkomen.

Oplossing

- Stel dat we n zeshoeken gebruiken (dus $V = n$).

Oplossing

- Stel dat we n zeshoeken gebruiken (dus $V = n$).
- Er zijn 6 zijden per zeshoek. Elke zijde hoort bij precies twee zeshoeken, dus $Z = 6n/2 = 3n$.

Oplossing

- Stel dat we n zeshoeken gebruiken (dus $V = n$).
- Er zijn 6 zijden per zeshoek. Elke zijde hoort bij precies twee zeshoeken, dus $Z = 6n/2 = 3n$.
- Er zijn per zeshoek 6 hoekpunten. Elk hoekpunt hoort bij minstens 3 zeshoeken, dus $H \leq 6n/3 = 2n$.

Oplossing

- Stel dat we n zeshoeken gebruiken (dus $V = n$).
- Er zijn 6 zijden per zeshoek. Elke zijde hoort bij precies twee zeshoeken, dus $Z = 6n/2 = 3n$.
- Er zijn per zeshoek 6 hoekpunten. Elk hoekpunt hoort bij minstens 3 zeshoeken, dus $H \leq 6n/3 = 2n$.

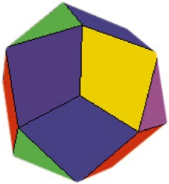
Bijgevolg

$$V - Z + H \leq n - 3n + 2n = 0,$$

terwijl $V - Z + H = 2$ op een sfeer.

Regelmatige veelvlakken

Een *veelvlak* is een gesloten ruimtefiguur die gevormd wordt door eindig veel veelhoeken langs hun zijden aan mekaar te plakken.



Regelmatige veelvlakken (II)

Een *regelmatig veelvlak* is een veelvlak dat bestaat uit veelhoeken die allemaal hetzelfde aantal zijden hebben, zodat in elk hoekpunt hetzelfde totale aantal zijden samenkomt.

Regelmatige veelvlakken (II)

Een *regelmatig veelvlak* is een veelvlak dat bestaat uit veelhoeken die allemaal hetzelfde aantal zijden hebben, zodat in elk hoekpunt hetzelfde totale aantal zijden samenkomt.

Opgave. Een regelmatig veelvlak bestaat uit 4, 8 of 20 driehoeken, 6 vierhoeken of 12 vijfhoeken.

Regelmatige veelvlakken (III)

Projecteer een regelmatig veelvlak op een omgeschreven sfeer: dit geeft H hoekpunten, Z zijden en V vlakken. Als het lichaam uit regelmatige n-hoeken bestaat en er in elk hoekpunt q zijden samenkomen, dan is

- $2Z = nV$;
- $qH = 2Z$

Regelmatige veelvlakken (III)

Projecteer een regelmatig veelvlak op een omgeschreven sfeer: dit geeft H hoekpunten, Z zijden en V vlakken. Als het lichaam uit regelmatige n-hoeken bestaat en er in elk hoekpunt q zijden samenkomen, dan is

- $2Z = nV$;
- $qH = 2Z$

en dus volgens Euler

$$\frac{H}{2} + \frac{V}{2} = 1 + \frac{Z}{2} \Rightarrow \frac{H}{2Z} + \frac{V}{2Z} = \frac{1}{Z} + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{q} + \frac{1}{n} = \frac{1}{Z} + \frac{1}{2}$$

dus

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$$

Regelmatige veelvlakken (IV)

We vermenigvuldigen $\frac{1}{q} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$ met $2qn$:

$$2n + 2q > nq$$

Regelmatige veelvlakken (IV)

We vermenigvuldigen $\frac{1}{q} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$ met $2qn$:

$$2n + 2q > nq$$

en tellen hier 4 bij op:

$$nq - 2n - 2q + 4 < 4$$

Regelmatige veelvlakken (IV)

We vermenigvuldigen $\frac{1}{q} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$ met $2qn$:

$$2n + 2q > nq$$

en tellen hier 4 bij op:

$$nq - 2n - 2q + 4 < 4$$

d.w.z.,

$$(n-2)(q-2) < 4.$$

Regelmatige veelvlakken (IV)

We vermenigvuldigen $\frac{1}{q}+\frac{1}{n}>\frac{1}{2}$ met $2qn$:

$$2n+2q>nq$$

d.w.z.,

$$(n-2)(q-2)<4.$$

Nu zijn n en q positieve getallen met $n,q\geq 3$, dus zijn er voor $(n-2)(q-2)<4$ enkel volgende mogelijkheden:

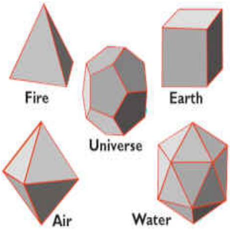
$$n\cdot q \quad = \quad 1\cdot 1;\ 1\cdot 2; 1\cdot 3;\ 2\cdot 1;\ 3\cdot 1,$$

en omdat $V=\frac{4q}{2q+(2-q)n}$ zijn dit de enige mogelijkheden:

n	3	3	3	4	5
q	3	4	5	3	3
V	4	8	20	6	12

Platonische lichamen

Elk van deze gevallen kan worden gerealiseerd met identieke zijvlakken, dit zijn de zogenaamde *platonische lichamen*:



(plaatje uit Kepler *Mysterium Cosmographicum*.)

Kaarten kleuren

Stelling. Elke kaart (op een sfeer, in het vlak) kan met ten hoogste 6 kleuren worden ingekleurd.

- Volgt uit de stelling van Euler.
- Het is niet zo moeilijk aan te tonen dat het ook met 5 kleuren kan.
- Het is heel moeilijk aan te tonen dat het met 4 kleuren kan. Dat deden Appel en Haken in 1977.

- Zie Rademacher-Toeplitz: Von Zahlen und Figuren / The Enjoyment of Math en Coxeter: Introduction to Geometry

Kaarten kleuren (II)

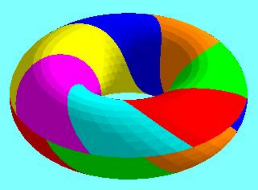
Uit de formule van Euler volgt wel vrij makkelijk de

Stelling. *Elke kaart op een oppervlak met* $\chi \leq 0$ *kan met ten hoogste*

$$[\frac{1}{2} \cdot (7 + \sqrt{49 - 24\chi})]$$

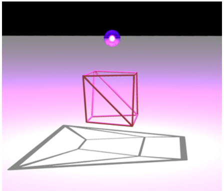
kleuren worden ingekleurd.

Voorbeeld: op een torus zijn 7 kleuren genoeg.



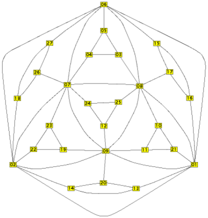
Euler voor vlakke grafen

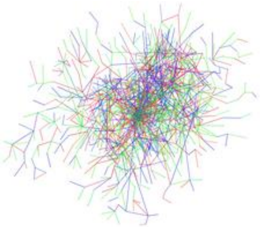
De formule van Euler met $\chi = 2$ is ook waar voor een samenhangende vlakke graaf:



Hierbij is V het aantal "componenten" waarin de graaf het vlak verdeelt (dus ook het buitenvlak moet worden geteld).

Voorbeelden van grafen





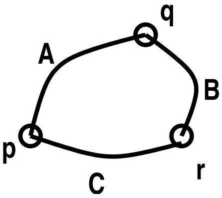
Wat is de (wiskundige) definitie van een graaf?

Een (abstracte) graaf bestaat uit twee verzamelingen:

- Een verzameling H van hoekpunten;
- Een familie Z van zijden die elk bestaan uit een paar ongeordende hoekpunten;

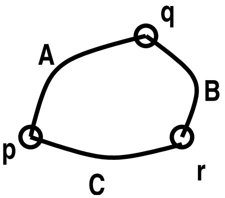
Misschien wil je dat de graaf samenhangend is; of eindig; of dat de zijden georiënteerd zijn, of dat twee hoekpunten door niet meer dan één zijde verbonden kunnen zijn, . . .

Voorbeeld van abstracte graaf



is de abstracte graaf $(H = \{p, q, r\}, Z = \{[p, q], [q, r], [p, r]\})$.

Voorbeeld van abstracte graaf

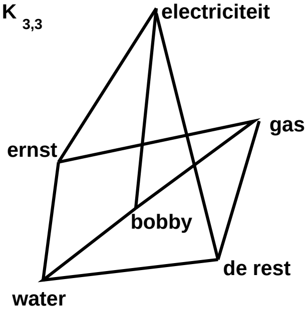


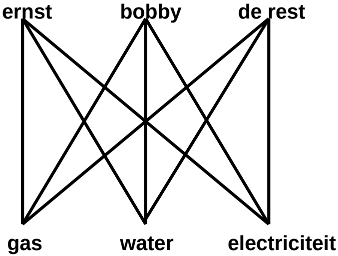
is de abstracte graaf $(H = \{p, q, r\}, Z = \{[p, q], [q, r], [p, r]\})$.

Voor het *vlakke plaatje van de graaf hierboven* is $H = 3, Z = 3$ en $V = 2$, dus $H - Z + V = 2$ (Euler!).

Voorbeeld van abstracte graaf (II): “Utiliteitsgraaf”

$$H = \{e, b, d, E, G, W\},$$
$$Z = \{[e, E], [e, G], [e, W], [b, E], [b, G], [b, W], [d, E], [d, G], [d, W]\}$$





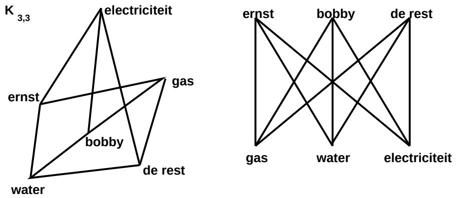
Planariteit

Vraag: Kan je elke graaf als vlakke graaf tekenen, zonder dat zijdes mekaar snijden?

Speel een spelletje op `http://www.planarity.net`

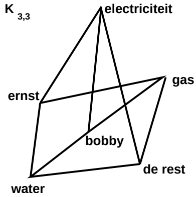
Opgave: Laat zien dat het voor $K_{3,3}$ *niet* kan.

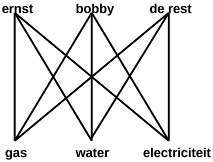
Planariteit (II)



- Voor $K_{3,3}$ is $H = 6$ en $Z = 9$, dus Euler zegt dat $V = 5$.

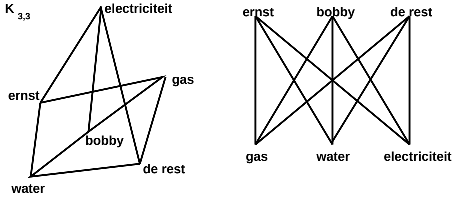
Planariteit (II)





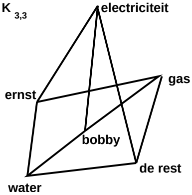
- Voor $K_{3,3}$ is $H = 6$ en $Z = 9$, dus Euler zegt dat $V = 5$.
- Een wandeling (zonder omdraaien) op $K_{3,3}$ komt pas na minstens vier zijden terug bij het beginpunt: het minimale aantal zijden dat een vlak omgeeft is dus 4.

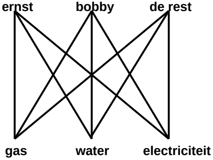
Planariteit (II)



- Voor $K_{3,3}$ is $H = 6$ en $Z = 9$, dus Euler zegt dat $V = 5$.
- Een wandeling (zonder omdraaien) op $K_{3,3}$ komt pas na minstens vier zijden terug bij het beginpunt: het minimale aantal zijden dat een vlak omgeeft is dus 4.
- Elke zijde grenst aan twee gebieden.

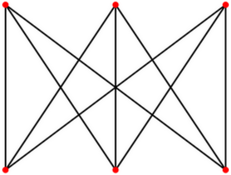
Planariteit (II)



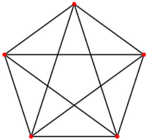


- Voor $K_{3,3}$ is $H = 6$ en $Z = 9$, dus Euler zegt dat $V = 5$.
- Een wandeling (zonder omdraaien) op $K_{3,3}$ komt pas na minstens vier zijden terug bij het beginpunt: het minimale aantal zijden dat een vlak omgeeft is dus 4.
- Elke zijde grenst aan twee gebieden.
- Er zijn dus meer dan $4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 10$ zijden: tegenspraak.

Planariteit (III)



$K_{3,3}$



K_5

Stelling (Kuratowski, 1930). *Elke samenhangende abstracte graaf die niet in het vlak kan worden ingebed zonder zelfdoorsnijdingen bevat de utiliteitsgraaf* $K_{3,3}$ *of de complete* 5*-graaf* K_5 *of een verfijning ervan (d.w.z. dat er extra hoekpunten op een zijde kunnen liggen).*

Planariteit (IV)

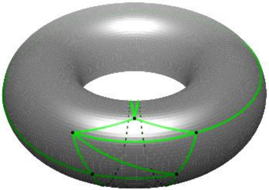
Opgave. Laat zien dat als je in K_5 één zijde weglaat, de resulterende graaf wel planair is.

Opgave. Laat zien dat je K_5 op een torus kan tekenen zonder zelfdoorsnijdingen.

Planariteit (IV)

Opgave. Laat zien dat als je in K_5 één zijde weglaat, de resulterende graaf wel planair is.

Opgave. Laat zien dat je K_5 op een torus kan tekenen zonder zelfdoorsnijdingen.

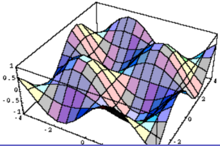


Bewijs van de formule van Euler op de sfeer

Op de `Geometry Junkyard` staan 17 bewijzen van de formule van Euler op de sfeer. Hier is er één van:

We maken een landschap op de sfeer op basis van de triangularisatie.

- De H hoekpunten liggen dieper dan al de rest (“putten”);

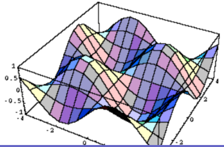


Bewijs van de formule van Euler op de sfeer

Op de `Geometry Junkyard` staan 17 bewijzen van de formule van Euler op de sfeer. Hier is er één van:

We maken een landschap op de sfeer op basis van de triangularisatie.

- De H hoekpunten liggen dieper dan al de rest ("putten");
- de middelpunten van de Z zijden zijn het unieke hoogste punt op de zijden, vanwaaruit het monotoon bergaf gaat naar de hoekpunten ("bergpassen");

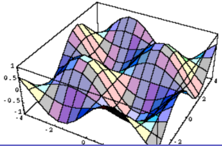


Bewijs van de formule van Euler op de sfeer

Op de `Geometry Junkyard` staan 17 bewijzen van de formule van Euler op de sfeer. Hier is er één van:

We maken een landschap op de sfeer op basis van de triangularisatie.

- De H hoekpunten liggen dieper dan al de rest ("putten");
- de middelpunten van de Z zijden zijn het unieke hoogste punt op de zijden, vanwaaruit het monotoon bergaf gaat naar de hoekpunten ("bergpassen");
- de centra van de V vlakken zijn de unieke hoogste punten van de vlakken, vanwaaruit het in alle richtingen monotoon bergaf gaat naar de omliggende zijden ("bergtoppen").



Bewijs van de formule van Euler op de sfeer (II)

Eerst is deze wereld kurkdroog. We laten een echte plensbui neervallen over deze wereld tot alles behalve de toppen van de bergen blank staat.

- De middelpunten van zijden zijn "zadels", zodat een overstroming daar
  - óf twee meertjes verbindt; stel dat dit v keer gebeurt;
  - óf een meertje zo groot maakt dat in het midden een eilandje ontstaat; stel dat dit e keer gebeurt.

Dan is $v + e = Z$.

Bewijs van de formule van Euler op de sfeer (II)

Eerst is deze wereld kurkdroog. We laten een echte plensbui neervallen over deze wereld tot alles behalve de toppen van de bergen blank staat.

- De middelpunten van zijden zijn "zadels", zodat een overstroming daar
  - óf twee meertjes verbindt; stel dat dit v keer gebeurt;
  - óf een meertje zo groot maakt dat in het midden een eilandje ontstaat; stel dat dit e keer gebeurt.

  Dan is $v + e = Z$.
- Nu tellen we: aanvankelijk is er één groot stuk land, dan komen er e bij, uiteindelijk hebben we V eilandjes voor alles onder water staat: $1 + e = V$, dus $e = V - 1$.

Bewijs van de formule van Euler op de sfeer (II)

Eerst is deze wereld kurkdroog. We laten een echte plensbui neervallen over deze wereld tot alles behalve de toppen van de bergen blank staat.

- De middelpunten van zijden zijn “zadels”, zodat een overstroming daar
  - óf twee meertjes verbindt; stel dat dit v keer gebeurt;
  - óf een meertje zo groot maakt dat in het midden een eilandje ontstaat; stel dat dit e keer gebeurt.

  Dan is $v + e = Z$.
- Nu tellen we: aanvankelijk is er één groot stuk land, dan komen er e bij, uiteindelijk hebben we V eilandjes voor alles onder water staat: $1 + e = V$, dus $e = V - 1$.
- We tellen andersom: we beginnen na een beetje regen met H meertjes, daar verdwijnen er v van, en uiteindelijk hebben we één groot meer: $H - v = 1$, dus $v = H - 1$.

Bewijs van de formule van Euler op de sfeer (II)

Eerst is deze wereld kurkdroog. We laten een echte plensbui neervallen over deze wereld tot alles behalve de toppen van de bergen blank staat.

- De middelpunten van zijden zijn "zadels", zodat een overstroming daar
  - óf twee meertjes verbindt; stel dat dit v keer gebeurt;
  - óf een meertje zo groot maakt dat in het midden een eilandje ontstaat; stel dat dit e keer gebeurt.

  Dan is $v + e = Z$.
- Nu tellen we: aanvankelijk is er één groot stuk land, dan komen er e bij, uiteindelijk hebben we V eilandjes voor alles onder water staat: $1 + e = V$, dus $e = V - 1$.
- We tellen andersom: we beginnen na een beetje regen met H meertjes, daar verdwijnen er v van, en uiteindelijk hebben we één groot meer: $H - v = 1$, dus $v = H - 1$.
- Uit deze drie vergelijkingen volgt $H - 1 + V - 1 = Z$ (Euler!).