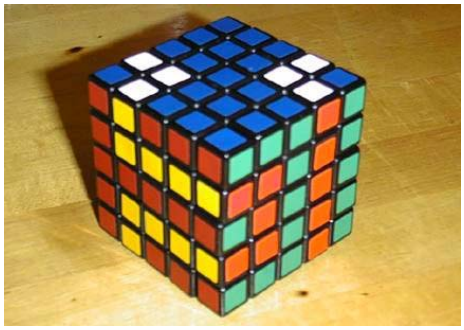
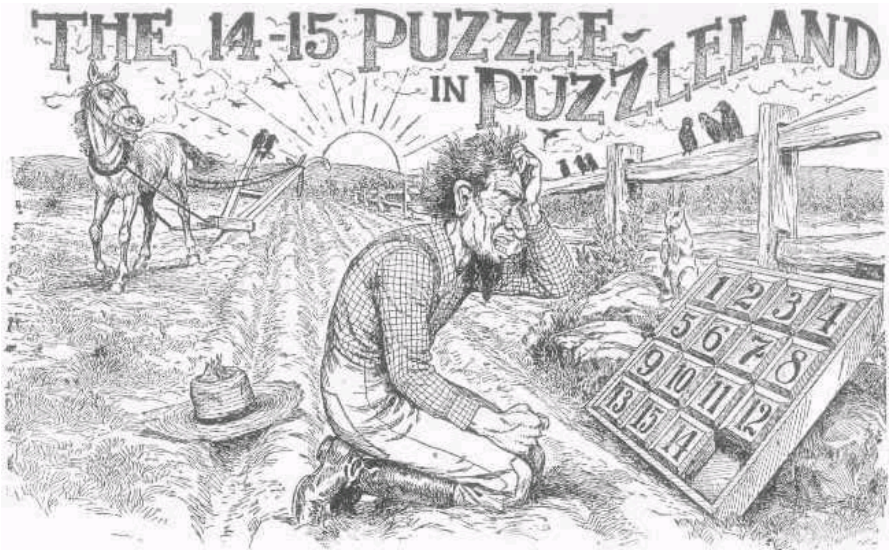
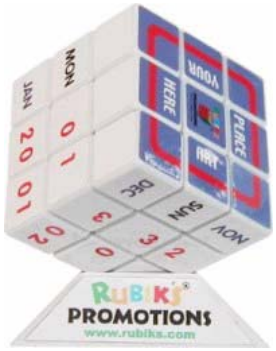
De schuifpuzzel, Rubiks kubus en andere puzzels doorgrond



Thesis, januari 2007
Bruno van Albada
Valentijn Karemaker
Brigitte Sprenger

Inhoudsopgave

Inleiding p. 4

Samenvatting p. 5

Permutaties p. 6

Schuifpuzzel p. 10
- Beschrijving van een schuifpuzzel p. 10
- Behoud van pariteit p. 10
- Pariteit van een permutatie p. 12
- Gevolgen van behoud van pariteit p. 15
- Bereikbaarheid even situaties p. 16

Rubiks kubus p. 27
- Pariteit bij de Rubiks kubus p. 29
- Uitbreiding van de formule p. 31
- Bereikbaarheid van even situaties van de Rubiks kubus p. 36

Andere Rubiks kubussen p. 44
- Minikubus p. 44
- Sudokukubus of kubus met teken p. 45

Conclusie p. 46

Reflectie en suggesties voor vervolgonderzoek p. 48

Begrippenlijst p. 50

Bronnenlijst p. 53

Logboeken p. 54

Commentaar van medeleerlingen p. 67

Inleiding

Een puzzel die je onmogelijk kunt oplossen, hoe vaak je het ook probeert, dat was ons uitgangspunt in dit onderzoek: De beroemde 14-15 puzzel van Sam Loyd. Na een aantal frustrerende uren was het ons duidelijk dat de puzzel inderdaad écht niet oplosbaar was. Maar hoe weet je dat nou zeker? Hoe kun je daar een bevredigende en duidelijke wiskundige verklaring voor geven?

Met deze vraag in ons achterhoofd begonnen wij ons te verdiepen in groepentheorie en permutatietheorie. Het werd ons snel duidelijk dat er achter die simpel ogende puzzeltjes nog behoorlijk veel interessante wiskunde zat. Een, ons van tevoren geheel onbekend maar cruciaal begrip bleek 'pariteit' te zijn. Die mysterieuze pariteit was het antwoord op onze vraag hoe je nu zéker weet of een puzzel oplosbaar is of niet. Toen we de formule hiervoor eenmaal opgesteld hadden, was het allemaal ineens logisch…

Maar deze oplossing was niet het einde. Het betekende juist een nieuwe start voor onderzoek naar andere schuifpuzzels, van willekeurige grootte, en zelfs in meerdere dimensies! Zelfs met die nieuwe formules waren wij echter nog niet tevreden, zodat we een puzzel erbij pakten die niemand onbekend kan zijn: De Rubiks Kubus die sinds 1981 mensen hoofdbrekens bezorgt. Zouden we ook deze puzzel kunnen onderwerpen aan onze regels voor pariteit?

U kunt het zelf lezen in dit thesisverslag. Het geeft antwoord op onze onderzoeksvraag: "Wat is het verband tussen de theorie van permutatiegroepen en de (on)oplosbaarheid van schuifpuzzels in verschillende dimensies en Rubiks puzzels?" We hebben geprobeerd een zo eenvoudig mogelijke voorstelling van zaken te geven, ook omdat veel bestaande literatuur over permutatiepuzzels (nodeloos) ingewikkeld is of veel fouten bevat.

Hopelijk bent u aan het eind van dit verslag een stuk wijzer geworden en zijn de puzzels minder ongrijpbaar dan eerst. Of u ze in een handomdraai kunt oplossen na ons verhaal, kunnen wij niet beloven, maar we hopen dat u in ieder geval aangestoken bent door ons enthousiasme om dat te gaan proberen!

Wij wensen u veel leesplezier.

Bruno van Albada
Valentijn Karemaker
Brigitte Sprenger
JCU 2006-2007

Samenvatting

In dit verslag hebben we antwoord gegeven op de onderzoeksvraag: “Wat is het verband tussen de theorie van permutatiegroepen en de (on)oplosbaarheid van schuifpuzzels in verschillende dimensies en Rubiks puzzels?”
Hiervoor hebben wij gekeken naar:

- Schuifpuzzels: puzzels van m bij n vakjes waarbij één vakje leeg is, zodat er met de overige vakjes geschoven kan worden om de volgorde van de vakjes te veranderen
- De driedimensionale schuifpuzzel genaamd Peter’s Black Hole
- De Rubiks kubus, ofwel de 3 bij 3 bij 3 kubus
- De minikubus, ofwel de 2 bij 2 bij 2 kubus
- De kubus met tekening, ofwel de sudokukubus

Het verband tussen permutatiegroepen en oplosbaarheid van puzzels bleek te liggen in het begrip pariteit. Dit geeft aan of iets (in ons geval: een permutatie, een stand van de puzzel, of een draaiing in de puzzel) even of oneven is en geeft daarbij even de waarde 0 en oneven de waarde 1. De pariteit is een begrip uit de permutatietheorie, waarmee onze onderzoeksvraag dus beantwoord is. Als de waarde voor de pariteit 0 is, is de bijbehorende stand van de puzzel oplosbaar, en als de pariteit 1 is, is de puzzel onoplosbaar.

Voor alle hierboven genoemde puzzels hebben wij eenzelfde bewijsvoering gebruikt:

- We hebben na experimenteren of literatuuronderzoek een formule opgesteld
- We hebben bewezen dat bij legale zetten in de puzzel behoud van pariteit geldt
- We hebben daardoor bewezen dat alle oneven situaties onoplosbaar zijn
- We hebben met behulp van algoritmes bewezen dat alle even situaties oplosbaar zijn

Bovendien hebben wij bij alle puzzels de kans berekend op een oplosbare puzzel, als deze op een willekeurige manier in elkaar gezet wordt.
De opgestelde formules en berekende kansen staan hieronder op een rijtje. Uitleg van de variabelen volgt in de bijbehorende hoofdstukken.

Formules
Schuifpuzzel: $P = p(\sigma) + p(\Delta x + \Delta y)$
Peter’s Black Hole: $P = p(\sigma) + p(\Delta x + \Delta y + \Delta z)$
Rubiks kubus: $P = p(p(\sigma\,(r)) + p(\sigma\,(h))) + p(p(\sigma\,(dr)) + p(|(idem - inv)| \bmod 3))$
Minikubus: $P = p(|(idem - inv)| \bmod 3)$
Kubus met tekening: $P = p(p(\sigma\,(r)) + p(\sigma\,(h))) + p(p(\sigma\,(dr)) + p(|(idem(h) - inv(h))| \bmod 3)) + p(|(idem(m) - inv(m))| \bmod 4)$

Kansen
Schuifpuzzel: ½
Peter’s Black Hole: ½
Rubiks kubus: $^1/_{12}$
Minikubus: $^1/_3$
Kubus met tekening: $^1/_{48}$

Permutaties

In dit hoofdstuk wordt de relevante theorie van permutaties uitgelegd en toegelicht aan de hand van voorbeelden.

Definitie
Ten eerste is het van belang te beschrijven wat een permutatie eigenlijk is. Permutaties zijn verwisselingen die binnen een verzameling worden uitgevoerd. Die verzameling bestaat uit elementen die van alles kunnen voorstellen en heet bijvoorbeeld X. Als je verzameling X permuteert, verwijs je alle elementen in die verzameling naar een nieuwe plaats in die verzameling, maar dat hoeft niet per se een andere te zijn.

Voorbeeld:
Verzameling X = [123456]
Na uitvoering van permutatie α ziet X eruit als [135462]. Elementen 1 en 4 veranderen hier niet van plaats. De uitgevoerde permutatie kan worden opgeschreven als:

$$\alpha = \left[\frac{123456}{135462}\right]$$

Groep S_x
Alle permutaties die bestaan, vormen samen een groep die S_x genoemd wordt. Om een groep te zijn, moet een verzameling aan drie voorwaarden voldoen:

1. De vermenigvuldiging moet associatief zijn, d.w.z. dat $(\alpha*\beta)*\gamma = \alpha*(\beta*\gamma)$ waarbij α, β en γ permutaties zijn. Vermenigvuldigen betekent hier 'na elkaar uitvoeren' en dat van rechts naar links lezend. Een samengestelde functie van twee permutaties, bijvoorbeeld (α*β), is ook weer een permutatie.
2. Er is een zogenaamde identiteit, die ε genoemd wordt. Als ε uitgevoerd wordt, verandert geen enkel element in de verzameling van plaats.
3. Iedere permutatie heeft een inverse, dus omgekeerde permutatie. Als α een permutatie is, is α^{-1} diens inverse en geldt: $\alpha* \alpha^{-1} = \alpha^{-1}* \alpha = \varepsilon$, d.w.z. als je eerst de permutatie uitvoert en daarna de inverse, verander je geen enkel element van plaats, wat dus overeenkomt met de identiteit ε.

Als de verzameling X oneindig is, is S_x ook oneindig. S_n is een eindige groep permutaties die alle permutaties in verzameling X bevat op n letters (die gemaakt kunnen worden met de getallen 1 tot en met n), als X uit positieve gehele getallen bestaat. Dit zijn n! permutaties.

Voorbeeld:
Neem n = 3. Groep S_3 bestaat dan uit de volgende 3! permutaties:

$$\left[\frac{123}{123}\right]\left[\frac{123}{132}\right]\left[\frac{123}{213}\right]\left[\frac{123}{231}\right]\left[\frac{123}{312}\right]\left[\frac{123}{321}\right]$$

S_3 voldoet aan de drie regels:

1. $$\left(\left[\frac{123}{132}\right]*\left[\frac{123}{213}\right]\right)*\left[\frac{123}{231}\right]=\left[\frac{123}{312}\right]*\left[\frac{123}{231}\right]=\left[\frac{123}{123}\right]$$

$$\left[\frac{123}{132}\right]*\left(\left[\frac{123}{213}\right]*\left[\frac{123}{231}\right]\right)=\left[\frac{123}{132}\right]*\left[\frac{123}{132}\right]=\left[\frac{123}{123}\right]$$

Eerst voer je de berekening tussen haakjes uit en het resultaat schrijf je weer als een permutatie op. Dan voer je de tweede berekening uit. Je ziet dat er geen verschil is tussen beide methoden.

2. $\left[\frac{123}{123}\right]$ **is een permutatie die alles op zijn plaats laat en is dus de identiteit ε van S_3.**

3. De inverse van een permutatie maakt die permutatie ongedaan zodat $\alpha\,\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = \varepsilon$.

$\left[\frac{123}{231}\right]$ **maakt van 1 een 2, van 2 een 3 en van 3 een 1. De inverse permutatie moet dus van een 1 een 3, van 2 een 1 en van 3 een 2 maken.**

Dat is: $\left[\frac{123}{312}\right]$

Nu geldt: $\left[\frac{123}{231}\right]*\left[\frac{123}{312}\right]=\left[\frac{123}{123}\right]=\varepsilon$

Valkuilen

Om verwarring te voorkomen, moeten twee dingen opgemerkt worden:

1. Het is belangrijk om te zien dat α*β niet altijd hetzelfde is als β*α. α*β betekent dat je eerst permutatie β uitvoert en met dat resultaat permutatie α uitvoert, terwijl β*α betekent dat je eerst permutatie α uitvoert en met dat resultaat permutatie β uitvoert. In wiskundige termen: S_x is geen Abelse groep, als geldt: $|x| > 2$.

   Voorbeeld:

   Neem twee permutaties, α en β. α= $\left[\frac{1234}{2341}\right]$ **en β=** $\left[\frac{1234}{3142}\right]$

   α * β geeft dan: [1234] → [3142] → [3214], maar
   β * α geeft: [1234] → [2431] → [1243]
   Dit is duidelijk niet hetzelfde.

2. Het is ook belangrijk om duidelijk te maken of je in een permutatie naar de posities kijkt of naar de getallen zelf. Wij zullen in deze thesis kijken naar de getallen zelf, dat is gebruikelijk in de wiskunde en is handig voor het onderzoeken van de 14-15 puzzel.

Voorbeeld:

Neem dezelfde permutatie α als hierboven, dus α= $\left[\frac{1234}{2431}\right]$**. Vul in deze permutatie niet [1234] in, maar [3241].**

a) **Als je er vanuit gaat dat de getallen in α posities voorstellen, zou je α opvatten als 'het getal op de eerste positie gaat naar de vierde positie' etcetera en komt er bij invullen van [3241], [2143] uit.**
b) **Als je er vanuit gaat dat de getallen in α de getallen zelf voorstellen, zou je α opvatten als '1 verandert in 2' etcetera en komt er bij invullen van [3241], [3412] uit.**

Dat is duidelijk niet dezelfde uitkomst. Wij gebruiken dus methode b.

Notatie

De notatie die hierboven voor een permutatie gebruikt werd, bijvoorbeeld $\left[\frac{123456}{135462}\right]$ is enigszins omslachtig, vooral als de verzameling X niet 6 maar bijvoorbeeld 1000 elementen bevat. Daarom worden permutaties meestal in de zogenaamde cykel-notatie opgeschreven. Overigens is niet elke permutatie één cykel.

Voorbeeld:

α = $\left[\frac{123456}{135462}\right]$ **wordt in cykel-notatie (2356)**

Hierbij staat een de permutatie tussen haakjes. Alleen de elementen die daadwerkelijk van plaats veranderen, worden erin opgenomen. In het voorbeeld hierboven komen 1 en 4 dus niet voor omdat zij op dezelfde plaats blijven.
(1234) wil zeggen: 1 gaat naar 2, 2 gaat naar 3, 3 gaat naar 4 en 4 gaat weer naar 1. Dit wordt cyclisch genoemd omdat het laatste element dus naar het eerste gaat. Een permutatie tussen haakjes wordt een n-cykel genoemd, waarbij n het aantal elementen dat erin voorkomt voorstelt. (1234) is dus een 4-cykel. Een 2-cykel, bijvoorbeeld (12), heet ook wel een transpositie of paarverwisseling.

Notaties van groep S_n

Iedere permutatie kan geschreven worden als een product van cyclische permutaties. Als alle getallen die in de ene cykel voorkomen, niet in de andere voorkomen, commuteren de cykels met elkaar. Dat wil zeggen dat het niet uitmaakt of je eerst de ene cykel uitvoert en dan de andere, of andersom. Bovendien maakt dan de volgorde waarin je de cykels opschrijft niet uit. Er is maar één manier om de getallen in cykels in te delen.

Voorbeeld:

$\left[\frac{1234567}{2763541}\right]$ **is, in cykel-notatie, (127)(364). 5 wordt niet opgenomen want die verandert niet van plaats. In dit geval maakt het niet uit of je de permutatie schrijft als (127)(364) of als (364)(127); beide schrijfwijzen betekenen hetzelfde dus ze zijn niet verschillend.**

Alle permutaties in S_n kunnen ook geschreven worden als een product van paarverwisselingen. Het ligt voor de hand dat in deze notatie een getal wél in meerdere cykels voorkomt. Daaruit volgt weer dat er voor een notatie in paarverwisselingen wél meerdere (verschillende) mogelijkheden zijn.

Er zijn dus veel manieren om permutaties op te schrijven als product van paarverwisselingen. Het opvallende, en voor het geval van schuifpuzzels cruciale, is dat het aantal paarverwisselingen die een permutatie beschrijven *altijd* even óf oneven is.
Een permutatie die geschreven kan worden als product van een even aantal paarverwisselingen heet een even permutatie, een permutatie die geschreven kan worden als product van een oneven aantal paarverwisselingen heet een oneven permutatie. We zullen later bewijzen dat dit wiskundig ook klopt.
N.B.: De lengte van een cykel komt niet overeen met het even- of oneven-zijn van de permutatie!

Voorbeeld:
Een 3-cykel, zoals (123), kan geschreven worden als (12)(23). Dat is een even aantal paarverwisselingen dus (123) is een even permutatie, ook al is zijn lengte oneven.

Precies de helft van alle permutaties in S_n is even. Alle even permutaties vormen een ondergroep van S_n die de alternerende groep A_n genoemd wordt. Dat wil zeggen dat A_n elementen bevat die ook allemaal in S_n zitten en dat ze voldoen aan alle regels voor een groep zoals die ook voor S_n golden (zie hierboven). Alle elementen in deze groep zijn te schrijven als product van 3-cykels.

Schuifpuzzel

Beschrijving van een schuifpuzzel

Een schuifpuzzel is een tweedimensionale puzzel, met zijdes die *m* en *n* vakjes lang zijn. Het totale aantal vakjes is dan *m* * *n*. Deze vakjes zitten niet aan elkaar vast; ze kunnen los van elkaar bewegen. Eén van deze vakjes is eigenlijk niet aanwezig; het is een open plek. Je doet een zet door één van de andere vakjes in deze open plek te schuiven. Door meerdere zetten te doen, kunnen alle vakjes verschoven worden.
Vaak staat er op een schuifpuzzel een plaatje, dat verdeeld is over de verschillende vakjes. Het plaatje kan door elkaar gehaald worden, en vervolgens is het doel om het plaatje er weer 'heel' uit te laten zien. In onze thesis worden schuifpuzzels als volgt afgebeeld:

0	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	5	6	7	8
3	9	10	11	12
4	13	14	15	16

Waarbij de eerste rijen aan de linker - en bovenkant de coördinaten van de verschillende vakjes aangegeven. Vakje 7 heeft dus bijvoorbeeld coördinaat (3, 2). Het gele vakje is het lege vakje; dit vakje kan dus worden gebruikt om andere vakjes te verplaatsen.

Behoud van pariteit

We gaan met behulp van de formule voor de pariteit bewijzen dat er in schuifpuzzels behoud van pariteit is. De pariteit kan even of oneven zijn, respectievelijk 0 of 1. Daarom rekenen we in modulo 2, dit betekent dat de uitkomst door twee gedeeld moet worden, waarbij "de rest" het nieuwe getal wordt. Hieruit volgt onder andere: 1 + 1 = 0. We definiëren de pariteit als:
$P = p(\sigma) + p(\Delta x + \Delta y)$
In woorden: de pariteit is de pariteit van de permutatie plus de pariteit van de verplaatsing van het lege vakje, waarbij de x- en y-richting bij elkaar opgeteld worden.
Hierbij wordt altijd met de beginsituatie vergeleken, de opgeloste situatie dus. We nemen in het komende gedeelte aan dat de pariteit van één transpositie oneven is en van een 3-cykel even enzovoort. We zullen dit later bewijzen.
We zullen de formule voor de pariteit toelichten aan de hand van de 2 bij 2 puzzel.

Voorbeeld:

0	**1**	**2**
1	**1**	**2**
2	**3**	**4**

In deze figuur is het gele vakje het lege vakje. Aan de linker- en bovenkant staan de coördinaten. De pariteit van de puzzel hangt mede af van de permutatie. In de figuur hiernaast zijn er nul permutaties gedaan, de pariteit van de permutatie is dus even, een 0. Het lege vakje is in deze situatie ook niet verplaatst, de verandering in de x-richting (Δx) is 0 en de verandering in de y-richting (Δy) ook. De pariteit van de beweging van het lege vakje ($p(\Delta x + \Delta y)$) is dus: 0 + 0 = 0. De totale pariteit (P) is dus ook 0 + 0 = 0.
We gaan één zet doen met de 2 bij 2 puzzel. De nieuwe situatie is hieronder weergegeven.

0	1	2
1	1	4
2	3	2

We gaan de formule invullen: P = p(σ) + p(Δx + Δy). Er is één transpositie gedaan (4 2), de pariteit (p(σ)) hiervan is oneven, een 1. De verandering van de positie geeft de pariteit van de positie van het lege vakje, p(Δx + Δy). De verandering in de x-richting (Δx) is 0 (van coördinaat (2,2) naar (2,1)) en de verandering in de y-richting (Δy) is 1. De pariteit van de beweging van het lege vakje (p(Δx + Δy)) is dus: 0 + 1 = 1. De totale pariteit (P) is dus 1 + 1 = 2 = 0. De puzzel is dus even.

Nu gaan we nog een zet doen, zie het plaatje hieronder.

0	1	2
1	4	1
2	3	2

Weer vullen we de formule in, P = p(σ) + p(Δx + Δy). Er zijn nu twee transposities gedaan (41)(42), de pariteit (p(σ)) hiervan is even, een 0. De verandering in de x-richting (Δx) is 1 (van coördinaat (2,2) naar (1,1)) en de verandering in de y-richting (Δy) is ook 1. De pariteit van de beweging van het lege vakje (p(Δx + Δy)) is dus: 1 + 1 = 2 = 0. De totale pariteit (P) is dus 0 + 0 = 0. De puzzel is dus even.

We vermoeden nu dat de pariteit altijd even blijft na legale zetten; zetten die daadwerkelijk kunnen in de schuifpuzzel. We gaan dit hieronder bewijzen.

Na één zet is er altijd één transpositie gedaan, het lege vakje wordt met een ander vakje omgewisseld. p(σ) is dus 1, omdat één transpositie oneven is. Het lege vakje wordt altijd of één plaats naar boven of beneden, of één plaats opzij geschoven. Bij één plaats opzij geldt Δx = 1 en Δy = 0, bij één plaats omhoog of omlaag geldt Δx = 0 en Δy = 1. De optelsom van beide p(Δx + Δy) is dus altijd 1. De totale pariteit P = p(σ) + p(Δx + Δy) wordt hierdoor altijd (1 + 1 = 2 = 0) even.

Nu hebben we dus gezien dat bij het uitvoeren van één zet de pariteit altijd even blijft. Bij meerdere zetten geldt dit ook, omdat er dan meerdere keren na elkaar één zet wordt gedaan. De pariteit van de puzzel blijft dus altijd even.

De kans op een oplosbare puzzel

Een schuifpuzzel kan even of oneven zijn, maar puzzels met verschillende pariteiten kunnen niet in elkaar omgezet worden. Even en oneven zijn daarom twee verschillende families. Beide families bevatten de helft van alle mogelijke standen van een schuifpuzzel. De helft van de mogelijke standen is dus even en de andere helft is oneven. Een puzzel is alleen oplosbaar als hij even is, dus de kans op een oplosbare puzzel is ½. Dit betekent dat wanneer een schuifpuzzel op een willekeurige manier in elkaar gezet wordt, de kans dat de puzzel oplosbaar is, ½ is.

Pariteit van een permutatie

We hebben hierboven aangenomen dat een transpositie oneven is, oftewel pariteit 1 heeft. We hebben dat echter nog niet bewezen. Dat zullen we hieronder doen.

Permutaties kunnen gedaan worden op verzamelingen door de elementen in die verzameling een nieuwe plek aan te wijzen. Maar permutaties kunnen ook gedaan worden in polynomen, door de indices daarvan te veranderen – zonder iets met de coëfficiënten te doen.

Voorbeeld:
Neem de polynoom $3x_1 + x_2^2$ en de permutatie (12): Het resultaat is $3x_2 + x_1^2$
Neem de polynoom $x_1 * x_2 + 7\ x_3^5$ en de permutatie (12)(34): Het resultaat is $x_2 * x_1 + 7\ x_4^5$

De definitie van teken is het teken zoals gegeven door de onderstaande polynoom P:
$P = P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \ldots (x_1 - x_n)(x_2 - x_3) \ldots (x_{n-1} - x_n)$
Je kunt in deze polynoom een permutatie doen, die de indices van x permuteert. De polynoom kan door de permutatie $+P$ worden, dus hetzelfde teken hebben als ervoor, of $-P$ zijn, dus tegengesteld zijn. Als de permutatie P in $+P$ verandert, is het teken van die permutatie +1 en als de permutatie P in $-P$ verandert, is het teken van de permutatie -1.

Voorbeeld:
Permutatie $\alpha = (132)$ in P_3:
$P_3 = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$
$\alpha P_3 = (x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_1 - x_2) = (x_1 - x_2) * -(x_1 - x_3) * -(x_2 - x_3) = +P_3$
Je ziet dat door de permutatie de indices permuteren. De termen tussen haakjes kunnen dan van teken veranderen, zodat ze het tegengestelde worden aan wat ze eerst waren. Bijvoorbeeld: $(x_1 - x_2)$ wordt na permutatie $-(x_1 - x_3)$. Dit gebeurt twee keer, en (-) *(-) = (+), zodat in totaal geldt dat $\alpha P_3 = +P_3$. Het teken van α is dus +1.

Het teken van het product van twee permutaties is het product van de tekens van die permutaties.
Je vult de permutaties σ en τ in in de polynoom P om het teken ervan te bepalen. Het teken van $\sigma\ \tau$ kun je daarom ook opschrijven als $P(\sigma\ \tau) * P$, namelijk de pariteit (het teken) van $\sigma\ \tau$ in polynoom P.

Het bewijs heeft een aantal stappen:
Stap 1: $P(\sigma) = P(\sigma) * P$ en $P(\tau) = P(\tau) * P$
Stap 2: $P(\sigma\ \tau) = (P(\sigma) * P)(\tau)$
Stap 3: $P(\sigma\ \tau) = P(\sigma) * P(\tau)$.
Stap 4: $P(\sigma\ \tau) = P(\sigma) * P(\tau) * P$

Toelichting op de stappen:
Stap 1: Permutatie σ uitvoeren in polynoom P is hetzelfde als de pariteit P van σ vermenigvuldigd met $(+)P$. Hetzelfde geldt voor permutatie τ.

Stap 2: Je vervangt nu $P(\sigma)$ door de in stap 1 gevonden notatie, en doet in die anders geschreven polynoom nog permutatie τ.
Stap 3: De in stap 2 gevonden notatie kan ook zo opgeschreven worden, wat (ook) neerkomt op permutatie τ uitvoeren in de polynoom, die vermenigvuldigd is met de pariteit van σ.
Stap 4: Je substitueert nu de in stap 1 gevonden notatie voor $P(\tau)$ in de in stap 3 gevonden notatie voor $P(\sigma\ \tau)$.

De eerste notatie van het teken van $\sigma\ \tau$ was: $P(\sigma\ \tau) * P$
Na invullen bleek dat het ook te schrijven was als: $P(\sigma\ ) * P(\tau) * P$
Hieruit valt af te leiden dat $P(\sigma\ \tau) = P(\sigma\ ) * P(\tau)$, oftewel dat het teken van het product van twee permutaties gelijk is aan het product van de tekens van die permutaties.

N.B. In deze redenering wordt +(1) gebruikt om even aan te geven en –(1) om oneven aan te geven. Om de totale pariteit te berekenen, moet je dus de tekens vermenigvuldigen. Wij gebruikten eerder 0 om even aan te geven en 1 om oneven aan te geven. Om de totale pariteit dan te berekenen, moet je de tekens optellen.

Pariteit van een transpositie
Het teken van transpositie (12) wordt -1:
$P_2 = (x_1 – x_2)$ en $\alpha = (12)$
$\alpha\ P_2 = (x_2 – x_1) = -(x_1 – x_2) = -P$
Als je transpositie (12) niet in P_2 doet maar in P_n, dus de polynoom met x_1 t/m x_n, gebeurt het volgende: Alle termen waar x_1 in zit, veranderen in de termen waar x_2 in zit en omgekeerd. Deze termen veranderen daardoor alleen van plaats, niet van teken. $(x_1\text{-}x_6)\ldots (x_2\text{-}x_6)$ is immers hetzelfde als $(x_2\text{-}x_6)\ldots (x_1\text{-}x_6)$ maar dan in een andere volgorde. De enige term die wezenlijk verandert is $(x_1\text{-}x_2)$: Die verandert in $(x_2 – x_1)$ dus wordt tegengesteld. Als één term tegengesteld wordt, is de polynoom veranderd in $–P$ dus het teken van de permutatie natuurlijk -1.
Kortom: Ook in P_n is het teken van (12) -1.
Alle volgende transposities worden ook in P_n gedaan.

Uit de regel (1a) = (2a)(12)(2a) volgt dan dat het teken van (1a) ook -1 is:
Het teken van (12) is zoals gezegd -1 en het teken van (2a)(2a) is +1 (omdat -1 * -1 = 1 én 1 * 1 = 1). Daarom is het teken van (1a) -1 * 1 = -1.

Uit de regel (ab) = (1b)(1a)(1b) volgt op dezelfde manier dat het teken van (ab) -1 is:
Het teken van (1a) is zoals gezegd -1 en het teken van (1b)(1b) is +1 (omdat -1 * -1 = 1 én 1 * 1 = 1). Daarom is het teken van (ab) -1 * 1 = -1.
(ab) is een willekeurige permutatie van twee elementen, dus hiermee is bewezen dat een transpositie altijd oneven is, anders gezegd het teken is (in onze notatie!) 1.

Pariteit van een n-cykel
Uit $(a_1a_2\ldots a_k) = (a_1a_k)\ \ldots\ (a_1a_3)(a_1a_2)$ volgt de pariteit van andere cykels:
Een 3-cykel kan volgens bovenstaande regel geschreven worden als twee transposities. In iedere 2-cykel zit namelijk element a_1 en één van de andere elementen. Daarvan zijn er

dus nog maar n-1 van over. In dit geval zijn alleen nog de 2 en de 3 over, dus zijn er twee transposities. Dus het teken is -1 * -1 = +1 = even. Een 3-cykel is dus een even permutatie. Een 4-cykel kan zo geschreven worden als n - 1 = 4 - 1 = 3 transposities en is dus oneven (zijn teken is -1 * -1 * -1 = -1), een 5-cykel is weer even, etcetera.
In het algemeen geldt: de pariteit van een n-cykel is n-1.

Gevolgen van behoud van pariteit

We hebben nu voor de 2 bij 2 schuifpuzzel bewezen dat de pariteit altijd hetzelfde blijft, namelijk even of 0, hoeveel zetten je ook doet. Dit heeft verschillende gevolgen:

Grotere schuifpuzzels

De formule van pariteit, $P = p(\sigma) + p(\Delta x + \Delta y)$ geldt zoals we hebben gezien in de 2 bij 2 schuifpuzzel. Maar ook bij schuifpuzzels die een andere vorm hebben, algemeen gezegd bij alle m bij n schuifpuzzels, geldt deze regel. Stel je immers voor dat je in een grotere schuifpuzzel één zet doet: $p(\sigma)$ is nog steeds 1 omdat één zet nog steeds één transpositie is, en het teken van een transpositie is, zoals hierboven bewezen is, 1. De pariteit $p(\Delta x + \Delta y)$ is ook nog steeds 1 omdat in alle tweedimensionale schuifpuzzels het lege vakje óf in de x-richting één vakje naar links of naar rechts gaat, óf in de y-richting één vakje naar boven of naar beneden gaat. $\Delta x + \Delta y$ is dus altijd 1 zodat $p(\Delta x + \Delta y)$ bij één zet ook altijd 1 is.
De totale pariteit na één zet is dus nog altijd: $p(\sigma) + p(\Delta x + \Delta y) = 1 + 1 = 2 = \text{even} = 0$, en ook na een aantal zetten zal de pariteit 0 blijven.
In alle m bij n schuifpuzzels zijn daarom twee 'families' te onderscheiden: alle even situaties en alle oneven situaties. Als je eenmaal een even beginsituatie hebt, kun je nooit in een oneven situatie uitkomen en andersom.

De 14-15 puzzel

0	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	5	6	7	8
3	9	10	11	12
4	13	15	14	16

De 14-15 puzzel is een 4 bij 4 schuifpuzzel waarin vakje 14 en vakje 15 omgedraaid zijn en vakje 16 het lege vakje is (zie figuur). De bedoeling is om de 14 en 15 om te draaien zonder dat de rest verandert. Met onze formule voor pariteit, $P = p(\sigma) + p(\Delta x + \Delta y)$, kunnen we nu bewijzen dat deze puzzel onoplosbaar is.
$p(\sigma) = 1$: De permutatie vanuit de beginsituatie is (14 15) en één transpositie is oneven.
$p(\Delta x + \Delta y) = 0$: Het lege vakje is op dezelfde plaats gebleven dus $\Delta x + \Delta y$ is 0.
Voor de totale pariteit geldt dan: $P = 1 + 0 = 1$. We hebben hier dus te maken met een oneven situatie van de puzzel. En uit het behoud van pariteit volgde juist dat oneven situaties niet met legale zetten te bereiken zijn! De 14-15 puzzel is dus onoplosbaar.

Meerdimensionale schuifpuzzels

We hebben nu bewezen dat bij tweedimensionale schuifpuzzels van willekeurige grootte, de formule voor pariteit (en dus behoud van pariteit) geldt.
Maar met een kleine aanpassing kun je de formule ook geschikt maken voor meerdimensionale puzzels. 'Peter's black hole' bijvoorbeeld is een driedimensionale schuifpuzzel (zie figuur). Dat betekent dat het lege vakje in één zet óf in de x-richting, óf in de y-richting, óf in de z-richting kan bewegen, maar per zet maar in één van deze richtingen en met 1 stapje. Eén zet is daarom ook nog steeds één transpositie, namelijk een verwisseling van twee kubusjes. De nieuwe formule wordt dus: $P = p(\sigma) + p(\Delta x + \Delta y + \Delta z)$. Er zijn weer twee families te onderscheiden, de even situaties en de oneven situaties. Alle even situaties zijn te bereiken en de oneven niet.

Bereikbaarheid van even situaties

We hebben nu met behulp van behoud van pariteit bewezen dat het onmogelijk is door legale zetten een oneven situatie van de schuifpuzzel te krijgen, omdat de beginsituatie van de puzzel even is. Maar daarmee is nog niet bewezen dat alle even situaties wél bereikbaar zijn. Daarom zullen wij dat hieronder bewijzen.

Het bewijs komt op het volgende neer: Alle even situaties zijn te schrijven als een even permutatie. Even permutaties vormen de alternerende groep A_n, en ieder element van A_n kan geschreven worden als (product van) 3-cykel(s). Een 3-cykel uitvoeren in een schuifpuzzel houdt in dat drie vakjes verwisseld worden zonder dat de andere vakjes van plaats verwisselen. We zullen een algoritme uitleggen dat bewijst dat dit altijd kan.

Even situaties als even permutaties
Een situatie in de schuifpuzzel is een sortering van de vakjes binnen de puzzel waarbij het lege vakje op dezelfde plaats zit als in de beginpositie – rechtsonder bijvoorbeeld. Je kunt natuurlijk veel meer permutaties doen in een schuifpuzzel, waarbij het lege vakje níet rechtsonder zit, maar vanuit die situaties kan het lege vakje ook altijd naar rechtsonder geplaatst worden. Hierbij geldt dan weer behoud van pariteit.

0	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	5	6	7	8
3	9	10	11	12
4	13	14	15	16

0	1	2	3	4
1	9	15	3	4
2	8	6	7	5
3	1	13	11	12
4	10	14	2	16

Figuur: beginsituatie van een 4x4 schuifpuzzel (links) en een even permutatie daarvan (rechts)

Uit de formule voor pariteit $P = p(\sigma) + p(\Delta x + \Delta y)$ volgt:
De coördinaten van het lege hokje zijn niet veranderd dus $p(\Delta x + \Delta y) = 0$
$P = 0$ want die blijft altijd 0
Dus $p(\sigma) = 0$ om een goede uitkomst te krijgen.

$p(\sigma) = 0$ houdt in dat er een even permutatie gedaan is. In het geval van de figuur hierboven is dat gemakkelijk te controleren:
In cykels kan de permutatie zo geschreven worden: (1 9)(2 15)(5 8)(10 13). Dat zijn vier transposities dus dit is inderdaad een even permutatie.

Alle even permutaties vormen samen de ondergroep A_n, ofwel de alternerende groep.

A_n uitdrukken in 3-cykels
De algemene methode om elementen van A_n in 3-cykels te schrijven is de volgende:

1. Schrijf (indien nodig) de permutatie op als transposities
2. Schrijf (indien nodig) de transposities als transposities met steeds hetzelfde getal
3. Neem twee opeenvolgende transposities waarin hetzelfde getal voorkomt, samen tot een 3-cykel.

Voorbeeld 1
(18439) is een element van A_n want 5-cykels beschrijven een even permutatie
Stap 1: Schrijf (18439) als transposities:
(18439) = (19)(13)(14)(18)
Stap 2: Schrijf de transposities als transposities met steeds hetzelfde getal:
Dat is in dit geval niet meer nodig
Stap 3: Neem twee transposities waarin hetzelfde getal voorkomt, samen tot een 3-cykel:
(19)(13)(14)(18) = (139)(184)
Nu is (18439), een 5-cykel, geschreven als (139)(184), een product van twee 3-cykels.

Voorbeeld 2
(17)(35) is een element van A_n want twee transposities beschrijven een even permutatie
Stap 1: Schrijf (17)(35) als transposities:
Dat is in dit geval niet meer nodig
Stap 2: Schrijf de transposities als transposities met steeds hetzelfde getal:
Maak dat getal 1: (17)(35) = (17)(13)(15)(13)
Stap 3: Neem twee transposities waarin hetzelfde getal voorkomt, samen tot een 3-cykel:
(17)(13)(15)(13) = (137)(135)
Nu is (17)(35), twee transposities, geschreven als (137)(135), twee 3-cykels.

We hebben nu bewezen dat alle even permutaties op deze manier, via 2-cykels, als (product van) 3-cykels geschreven kunnen worden. Een 3-cykel in een schuifpuzzel betekent dat drie vakjes met elkaar van plaats ruilen, zonder dat de andere vakjes van hun plaats komen.

Een algoritme voor 3-cykels
Wouter Waalewijn[1] heeft een algoritme bedacht om te bewijzen dat 3-cykels in een schuifpuzzel altijd uit te voeren zijn. Wij zullen hieronder iedere stap daarvan toelichten aan de hand van een 4 bij 4 schuifpuzzel als voorbeeld.

Stap 1: Wijs de drie vakjes aan die je wilt verwisselen.

Voorbeeld:

0	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	5	6	7	c
3	9	10	b	12
4	a	14	15	16

Figuur: In dit voorbeeld zijn a (vakje 13), b (vakje 11) en c (vakje 8) de vakjes die je wilt verwisselen. Vakje 16 is het lege vakje. Aan de linker- en bovenkant staan de coördinaten van de vakjes in de puzzel.

[1] Waalewijn W. (2003). *Schuifpuzzels.* NAW 5/4 nr. 3, p. 240-241

Stap 2: Breng het eerste vakje, a, naar de linkerbovenhoek (1,1). Doe dit door een denkbeeldige rechthoek te vormen die a en (1,1) bevat. Beweeg het lege vakje tot binnen deze rechthoek en beweeg dan binnen de rechthoek vakje a naar de plaats van bestemming.

Voorbeeld:

0	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	5	6	7	c
3	9	10	b	12
4	a	14	16	15

0	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	5	6	7	c
3	9	10	b	12
4	a	16	14	15

Figuur: De denkbeeldige rechthoek bevat vakjes 1, 2, 5, 6, 9, 10, a en 14.
Je beweegt het lege vakje nu d.m.v. deze twee stappen tot binnen deze rechthoek.

0	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	5	6	7	c
3	9	10	b	12
4	16	a	14	15

0	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	5	6	7	c
3	16	10	b	12
4	9	a	14	15

0	1	2	3	4
1	a	16	3	4
2	10	9	7	c
3	6	5	b	12
4	2	1	14	15

Figuur: Beweeg nu vakje 16 binnen deze rechthoek met de klok mee. Daardoor beweegt automatisch vakje a tegen de klok in tot het in de linkerbovenhoek zit, op positie (1,1) dus. Van deze actie zijn de eerste twee zetten en de eindpositie weergegeven.

Stap 3: Breng het tweede vakje, b, tot rechts naast vakje a., positie (2,1) Doe dit weer door een denkbeeldige rechthoek te vormen die b en het vakje van bestemming bevat. Beweeg het lege vakje tot binnen deze rechthoek en beweeg dan binnen de rechthoek vakje b naar de plaats van bestemming.

Voorbeeld:

0	1	2	3	4
1	a	9	3	4
2	10	16	7	c
3	6	5	b	12
4	2	1	14	15

0	1	2	3	4
1	a	b	5	4
2	10	7	16	c
3	6	3	9	12
4	2	1	14	15

Figuur: De denkbeeldige rechthoek bevat vakjes 9, 3, 16, 7, 5 en b. Het lege vakje bevindt zich nu toevallig al in de rechthoek. Schuif nu weer het lege vakje met de klok mee zodat vakje b tegen de klok in naar positie (2,1) beweegt.
Van deze actie zijn de eerste zet en de eindpositie weergegeven.

Stap 4: Nu zijn er twee gevallen te onderscheiden: Ofwel (mogelijkheid 1) het derde vakje, c, bevindt zich op een of andere plek in de puzzel, ofwel (mogelijkheid 2) het zit rechts naast vakje b, dus op positie (3,1). Deze mogelijkheden vereisen een verschillende aanpak.

Voorbeeld:

0	1	2	3	4
1	a	b	5	4
2	10	7	16	c
3	6	3	9	12
4	2	1	14	15

Figuur: In dit geval bevindt c zich op een andere plek in de puzzel. We gebruiken dus de methode voor mogelijkheid 1. Om het algoritme volledig uit te leggen, zullen we echter allebei de mogelijkheden uitvoeren. Eerst leggen we mogelijkheid 1 uit, omdat die hier het meest voor de hand ligt, en daarna mogelijkheid 2.

Stap 5 (Mogelijkheid 1): Breng het derde vakje, c, tot recht onder het eerste vakje, a, en zorg dat het lege vakje rechts naast vakje c zit. Doe dit weer door een denkbeeldige rechthoek te vormen die c en het vakje van bestemming bevat. Beweeg het lege vakje tot binnen deze rechthoek en beweeg dan binnen de rechthoek vakje c naar de plaats van bestemming.

Voorbeeld:

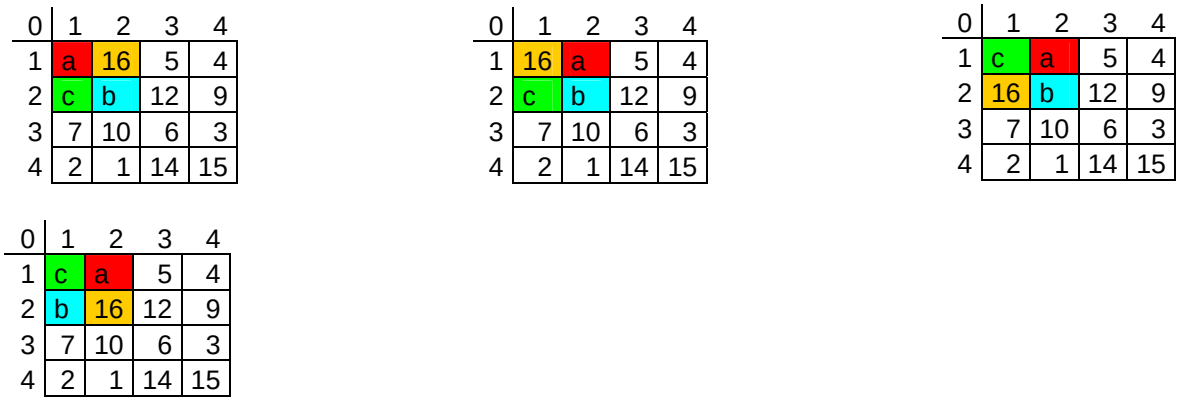
0	1	2	3	4
1	a	b	5	4
2	10	7	16	c
3	6	3	9	12
4	2	1	14	15

0	1	2	3	4
1	a	b	5	4
2	c	16	12	9
3	7	10	6	3
4	2	1	14	15

Figuur: De denkbeeldige rechthoek bevat vakjes 10, 7, 16, c, 6, 3, 9 en 12. Het lege vakje bevindt zich toevallig al in deze rechthoek. Schuif nu weer het lege vakje met de klok mee zodat vakje c tegen de klok in naar positie (1,2) beweegt. Uiteindelijk plaats je het lege vakje naast vakje c.
Van deze actie zijn de uitgangspositie – de uitkomst van stap 3 - en de eindpositie weergegeven.

Stap 6 (Mogelijkheid 1): Verwissel de drie aangewezen vakjes binnen het ontstane vierkantje. Zorg ervoor dat het lege vakje weer op dezelfde plek uitkomt.

Voorbeeld:



Figuur: Beweeg het lege vakje in het ontstane vierkantje tegen de klok in een heel aantal 'rondjes', zodat het weer op dezelfde positie (2,2) uitkomt.
Van deze actie zijn alle stappen van één 'rondje' gegeven. De gedane permutatie is, zoals na vergelijking blijkt, (abc).

Stap 7 (Mogelijkheid 1): Doe de inverse van stap 5 (Mogelijkheid 1). Dit betekent dat je in plaats van het derde vakje c onder het eerste vakje a te brengen – wat bij stap 5 gebeurde – het vakje wat nu onder het eerste vakje staat, terugbrengt naar waar vakje c stond voordat stap 5 uitgevoerd werd. Je doet dus stap 5 omgekeerd, oftewel je voert de inverse ervan uit.

Voorbeeld:

0	1	2	3	4
1	c	a	5	4
2	10	7	16	b
3	6	3	9	12
4	2	1	14	15

Figuur: In stap 5 (Mogelijkheid 1) werd vakje c van zijn positie (4,2) naar (1,2) gebracht, onder vakje a. Nu brengen we het vakje op positie (1,2), dat door stap 6 nu vakje b is in plaats van vakje c, naar positie (4,2). We vormen daarvoor weer een rechthoek die vakjes b, 16, 12, 9, 7, 10, 6 en 3 bevat en bewegen hierin het lege vakje tegen de klok in (!) zodat vakje b met de klok mee naar de oude positie van vakje c verplaatst.
Van deze actie is de eindpositie weergegeven.

Stap 8 (Mogelijkheid 1): Doe de inverse van stap 3. Dit betekent dat je in plaats van het tweede vakje b naast het eerste vakje a te brengen – wat bij stap 3 gebeurde – het vakje wat nu naast het eerste vakje staat, terugbrengt naar waar vakje b stond voordat stap 3 uitgevoerd werd. Je doet dus stap 3 omgekeerd, oftewel je voert de inverse ervan uit.

Voorbeeld:

0	1	2	3	4
1	c	a	16	4
2	10	7	5	b
3	6	3	9	12
4	2	1	14	15

0	1	2	3	4
1	c	16	a	4
2	10	7	5	b
3	6	3	9	12
4	2	1	14	15

0	1	2	3	4
1	c	3	16	4
2	10	9	7	b
3	6	5	a	12
4	2	1	14	15

Figuur: In stap 3 werd vakje b van zijn beginpositie (3,3) naar (2,1) gebracht, naast vakje a. Nu brengen we het vakje op positie (2,1), dat door stap 6 nu vakje a is in plaats van vakje b, naar positie (3,3). We vormen daarvoor weer een rechthoek die de vakjes a, 16, 7, 5, 3, en 9 bevat en bewegen hierin het lege vakje tegen de klok in (!) zodat vakje a met de klok mee verplaatst wordt.
Van deze actie zijn de eerste twee zetten en de eindpositie (r) weergegeven.

Stap 9 (Mogelijkheid 1): Doe de inverse van stap 2. Dit betekent dat je in plaats van het eerste vakje a naar de linkerbovenhoek te brengen – wat in stap 2 gebeurde – het vakje wat nu in de linkerbovenhoek staat, terugbrengt naar waar vakje a stond voordat stap 2 uitgevoerd werd. Je doet dus stap 2 omgekeerd, oftewel je voert de inverse ervan uit. Tenslotte breng je het lege vakje naar de plaats waar het stond aan het begin van het algoritme.

Voorbeeld:

0	1	2	3	4
1	c	16	3	4
2	10	9	7	b
3	6	5	a	12
4	2	1	14	15

0	1	2	3	4
1	16	c	3	4
2	10	9	7	b
3	6	5	a	12
4	2	1	14	15

0	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	5	6	7	b
3	9	10	a	12
4	c	16	14	15

0	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	5	6	7	b
3	9	10	a	12
4	c	14	16	15

0	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	5	6	7	b
3	9	10	a	12
4	c	14	15	16

Figuur: In stap 2 werd vakje a van zijn beginpositie (1,4) naar (1,1) gebracht, de linkerbovenhoek. Nu brengen we het vakje op positie (1,1), dat door stap 6 nu vakje c is, naar positie (1,4). We vormen daarvoor weer een rechthoek die de vakjes c, 16, 10, 9, 6, 4, 2 en 1 bevat en bewegen hierin het lege vakje tegen de klok in (!) zodat vakje c met de klok mee verplaatst wordt. Tenslotte verplaats je het lege vakje weer naar de rechteronderhoek, positie (4,4).
N.B. Hieraan voorafgaand is het lege vakje binnen de rechthoek geplaatst.
Van deze actie zijn de eerste twee zetten, de eindpositie van vakje c (rechtsboven), en de laatste twee zetten weergegeven. Je ziet dat het algoritme zijn werk goed heeft gedaan.

Dan nu hoe het gegaan zou zijn als ‘Mogelijkheid 2’ gekozen werd. We doen dan in feite alsof het derde vakje c naast vakje b staat door het eerst daarheen te bewegen. Vervolgens voeren we de stappen van het algoritme voor Mogelijkheid 2 uit.

Stap 5 (Mogelijkheid 2): Breng zoals gezegd het derde vakje c rechts naast vakje b door een geschikte denkbeeldige rechthoek te kiezen waarbinnen we het lege vakje met de klok mee bewegen.

Voorbeeld:

0	1	2	3	4
1	a	b	5	4
2	10	7	16	c
3	6	3	9	12
4	2	1	14	15

0	1	2	3	4
1	a	b	16	4
2	10	7	5	c
3	6	3	9	12
4	2	1	14	15

0	1	2	3	4
1	a	b	4	16
2	10	7	5	c
3	6	3	9	12
4	2	1	14	15

0	1	2	3	4
1	a	b	c	16
2	10	7	4	5
3	6	3	9	12
4	2	1	14	15

Figuur: Eerst is de uitgangspositie na stap 3 weergegeven (linksboven). We vormen nu een denkbeeldige rechthoek die vakjes 5, 4, 16 en c bevat en bewegen hierin het lege vakje met de klok mee. Vakje c beweegt dus automatisch tegen de klok in totdat het zich rechts naast vakje b bevindt.
Van deze actie zijn de eerste drie zetten en de eindpositie weergegeven.

Stap 6 (Mogelijkheid 2): Zorg ervoor dat het lege vakje en de vakjes a, b en c in een vierkantje zitten in de linkerbovenhoek van de puzzel. Doe dit op de bekende manier van een denkbeeldige rechthoek vormen en daarin het lege vakje met de klok mee te laten bewegen.

Voorbeeld:

0	1	2	3	4
1	a	b	c	5
2	10	7	4	16
3	6	3	9	12
4	2	1	14	15

0	1	2	3	4
1	b	c	5	4
2	a	16	10	7
3	6	3	9	12
4	2	1	14	15

Figuur: De denkbeeldige rechthoek bevat hier de vakjes a, b, c, 5, 10, 7, 4 en 16. Het lege vakje beweegt met de klok mee zodat a, b en c tegen de klok in schuiven totdat het gewenste vierkantje gevormd is.
Van deze actie zijn de eerste zet en de eindpositie weergegeven.

Stap 7 (Mogelijkheid 2): Verwissel de drie aangewezen vakjes binnen het ontstane vierkantje.

Voorbeeld:

0	1	2	3	4
1	b	16	5	4
2	a	c	10	7
3	6	3	9	12
4	2	1	14	15

0	1	2	3	4
1	16	b	5	4
2	a	c	10	7
3	6	3	9	12
4	2	1	14	15

0	1	2	3	4
1	a	b	5	4
2	16	c	10	7
3	6	3	9	12
4	2	1	14	15

0	1	2	3	4
1	a	b	5	4
2	c	16	10	7
3	6	3	9	12
4	2	1	14	15

Figuur: Beweeg het lege vakje in het ontstane vierkantje tegen de klok in een heel aantal 'rondjes', zodat het weer op dezelfde positie (2,2) uitkomt.
Van deze actie zijn alle stappen van één 'rondje' gegeven. De gedane permutatie is, zoals na vergelijking blijkt, (abc).

Stap 8 (Mogelijkheid 2): Doe de inverse van stap 6 (Mogelijkheid 2). Dit betekent dat je vanuit het vierkant de drie vakjes a, b en c weer naast elkaar op de bovenste rij brengt in plaats van andersom – wat bij stap 6 gebeurde. Je doet dus stap 6 omgekeerd, oftewel je voert de inverse ervan uit. Doe dit weer door een denkbeeldige rechthoek te vormen waarin het lege vakje nu de andere kant op beweegt.

Voorbeeld:

0	1	2	3	4
1	a	b	5	4
2	c	10	16	7
3	6	3	9	12
4	2	1	14	15

0	1	2	3	4
1	c	a	b	16
2	10	7	4	5
3	6	3	9	12
4	2	1	14	15

Figuur: De denkbeeldige rechthoek bevat de vakjes a, b, 5, 4, c, 10, 16 en 7. Beweeg hierin het lege vakje tegen de klok in (!) zodat vakjes c, a en b met de klok mee bewegen.
Van deze actie zijn de eerste zet en de eindpositie weergegeven.

Stap 9 (Mogelijkheid 2): Doe de inverse van stap 5 (Mogelijkheid 2). Dit betekent dat je in plaats van het derde vakje c rechts naast vakje b te zetten op positie (3,1) – wat in stap 5 gebeurde – het vakje op positie (3,1), dat door stap 7 niet meer vakje c is maar vakje b, op de beginpositie van vakje c te zet. Doe dit weer met behulp van een denkbeeldige rechthoek.

Voorbeeld:

0	1	2	3	4
1	c	a	16	b
2	10	7	4	5
3	6	3	9	12
4	2	1	14	15

0	1	2	3	4
1	c	a	4	16
2	10	7	5	b
3	6	3	9	12
4	2	1	14	15

Figuur: Het denkbeeldige vierkant bevat de vakjes 16, b, 4 en 5. Beweeg hierin het lege vakje tegen de klok in (!) zodat vakje b met de klok mee naar de beginpositie van vakje c, (4,2), verplaatst.
Van deze actie zijn de eerste zet en de eindpositie weergegeven.

Stap 10 (Mogelijkheid 2): Doe de inverse van stap 3. Dit betekent dat je in plaats van het tweede vakje b naast het eerste vakje a te brengen – wat bij stap 3 gebeurde – het vakje wat nu naast het eerste vakje staat, terugbrengt naar waar vakje b stond voordat stap 3 uitgevoerd werd. Je doet dus stap 3 omgekeerd, ofwel je voert de inverse ervan uit.

Voorbeeld:

0	1	2	3	4
1	c	a	16	4
2	10	7	5	b
3	6	3	9	12
4	2	1	14	15

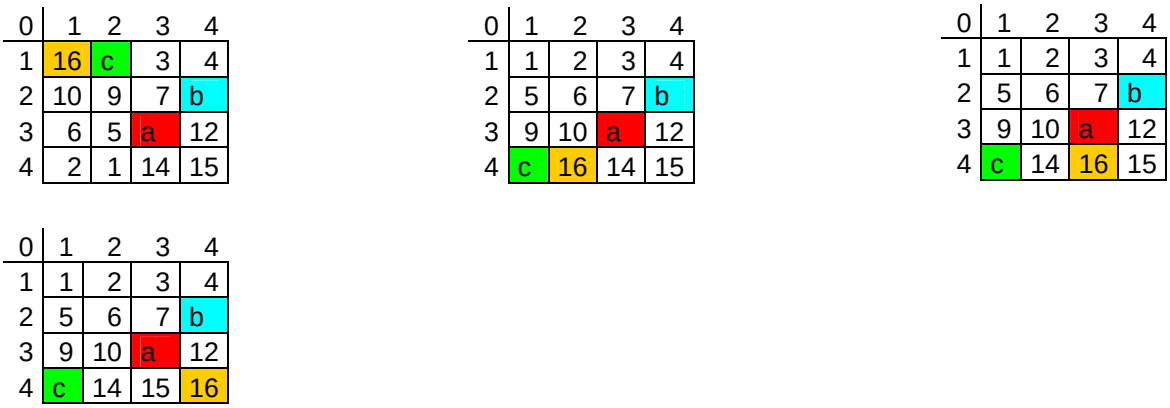
0	1	2	3	4
1	c	16	a	4
2	10	7	5	b
3	6	3	9	12
4	2	1	14	15

0	1	2	3	4
1	c	16	3	4
2	10	9	7	b
3	6	5	a	12
4	2	1	14	15

Figuur: In stap 3 werd vakje b van zijn beginpositie (3,3) naar (2,1) gebracht, naast vakje a. Nu brengen we het vakje op positie (2,1), dat door stap 6 nu vakje a is in plaats van vakje b, naar positie (3,3). We vormen daarvoor weer een rechthoek die de vakjes a, 16, 7, 5, 3 en 9 bevat en bewegen hierin het lege vakje tegen de klok in (!) zodat vakje a met de klok mee verplaatst wordt.
Van deze actie zijn de eerste twee zetten en de eindpositie (rechts) weergegeven.
N.B. in de eerste zet (links) wordt het lege vakje in de denkbeeldige rechthoek gebracht.

Stap 11 (Mogelijkheid 2): Doe de inverse van stap 2. Dit betekent dat je in plaats van het eerste vakje a naar de linkerbovenhoek te brengen – wat in stap 2 gebeurde – het vakje wat nu in de linkerbovenhoek staat, terugbrengt naar waar vakje a stond voordat stap 2 uitgevoerd werd. Je doet dus stap 2 omgekeerd, oftewel je voert de inverse ervan uit. Tenslotte breng je het lege vakje naar de plaats waar het stond aan het begin van het algoritme.

Voorbeeld:



Figuur: In stap 2 werd vakje a van zijn beginpositie (1,4) naar (1,1) gebracht, de linkerbovenhoek. Nu brengen we het vakje op positie (1,1), dat door stap 6 nu vakje c is in plaats van vakje a, naar positie (1,4). We vormen daarvoor weer een rechthoek die de vakjes 16, c, 10, 9, 6, 5, 2 en 1 bevat en bewegen hierin het lege vakje tegen de klok in (!) zodat vakje c met de klok mee verplaatst wordt. Tenslotte verplaats je het lege vakje weer naar de rechteronderhoek, positie (4,4).
Van deze actie zijn de eerste zet, de eindpositie van vakje c (middenboven), en de laatste twee zetten weergegeven.
Je ziet dat het algoritme zijn werk ook nu goed heeft gedaan. Allebei de mogelijkheden geven dus een goed resultaat, maar mogelijkheid 2 heeft in dit geval twee stappen meer nodig. Dat is logisch want we deden maar alsof vakje c naast b stond door het daarheen te verplaatsen en vervolgens de inverse van die permutatie uit te voeren.

Zoals uit de bovenstaande uitleg waarschijnlijk duidelijk geworden is, berust het algoritme op het feit dat je van iedere permutatie die je doet vóórdat je a, b en c verwisselt, ook de inverse doet. Alleen gebruik je dan natuurlijk niet dezelfde vakjes (a, b en c staan immers op een andere plaats) maar de vakjes die nu op die plaats staan. De enige permutatie die je dan netto uitvoert is die van a, b en c.
Wij hebben het voorbeeld van een 4 bij 4 schuifpuzzel gebruikt, maar dit algoritme werkt in alle schuifpuzzels en met alle hokjes a, b en c.

We hebben het hier alleen nog maar over tweedimensionale puzzels gehad, maar dit algoritme werkt ook voor meerdimensionale puzzels, neem bijvoorbeeld Peter's Black Hole: Zodra de drie vakjes die omgewisseld moeten worden in één vlak liggen, kan het bekende algoritme toegepast worden. Om dit te bereiken moet gekeken worden naar het vlak waarin:

- én één van de te verwisselen kubusjes, a, zit
- én een deel van het vlak waarin je het bekende algoritme wil toepassen, x, zit.

Het lege kubusje moet naar dit vlak verplaatst worden. In dit vlak moet a tegen de klok in tot in x verplaatst worden, met de rechthoekmethode. Dit wordt dan ook met b en c, de andere te verwisselen kubusjes, gedaan. Als ze eenmaal alledrie in x liggen, begin je met

het algoritme. Wanneer de kubusjes verwisseld zijn, doe je de inverse van alle zetten, inclusief de zetten die nodig waren om a, b en c in x te krijgen.

Conclusie

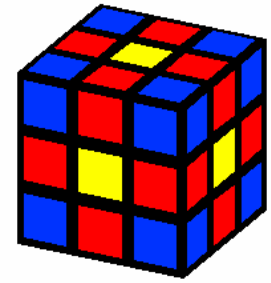
We hebben in het bovenstaande allerlei dingen bewezen:

1. Als eerste werd bewezen dat alle even situaties van een puzzel te schrijven zijn als een even permutatie. Dit volgt uit de formule voor pariteit, $P = p(\sigma) + p(\Delta x + \Delta y)$.
2. Vervolgens hebben we bewezen dat alle even permutaties te schrijven zijn als (product van) 3-cykel(s), omdat alle even permutaties geschreven kunnen worden als een even aantal transposities waar steeds hetzelfde getal in voorkomt: (ab) = (1a)(1b)(1a). Twee van die transposities zijn dan samen te nemen in een 3-cykel: (1a)(1b) = (1ba).
3. Een 3-cykel uitvoeren in een schuifpuzzel betekent drie vakjes omwisselen zonder de rest te verwisselen. We hebben een algoritme uitgelegd wat bewijst dat dit altijd kan.

De conclusie van dit geheel is dus dat alle even situaties van een schuifpuzzel te bereiken zijn.

Rubiks kubus

Beschrijving van de Rubiks kubus
De Rubiks kubus is een driedimensionale puzzel, die theoretisch gezien bestaat uit 3 bij 3 bij 3 = 27 kleinere kubussen. Echter, voor het oplossen van de puzzel zijn alleen de volgende kubusjes van belang:



- 8 hoekkubusjes, de blauwe kubusjes in de afbeelding hiernaast. Letterlijk de hoeken van de kubus. Deze kubusjes kunnen in 3 richtingen bewegen, aangezien ze aan 3 vlakken 'vastzitten.'

- 12 ribkubusjes de rode kubusjes in de afbeelding hiernaast. Zij zitten tussen de hoekkubusjes in. Ze kunnen per zet in 2 richtingen bewegen. De ribkubusjes tonen maar 2 kleuren.

- 6 middenkubusjes, de gele kubusjes in de afbeelding hierboven. Zij zitten in het midden van elke kant, van 3 bij 3 vlakjes. Deze kunnen ten opzichte van elkaar niet bewegen. Ze tonen maar 1 kleur.

De hoekkubusjes kunnen op 8! manieren neergezet worden in de puzzel. Vervolgens kan elk hoekkubusje op drie verschillende manieren op zijn positie gedraaid worden. Dat betekent dat er voor de hoekkubusjes in totaal $8! * 3^8$ manieren zijn om ze neer te zetten. Omdat ieder kubusje van de Rubiks kubus anders is door zijn unieke combinatie van gekleurde vlakjes, zijn dit allemaal verschillende manieren.

Voor de ribkubusjes geldt iets soortgelijks: het zijn er 12, dus ze kunnen op 12! manieren neergezet worden. Elk ribkubusje toont 2 kleuren, dus ze kunnen elk ook nog op twee manieren gedraaid worden. Dat betekent dat er voor de ribkubusjes in totaal $12! * 2^{12}$ manieren zijn om ze neer te zetten. Ook deze manieren zijn allemaal verschillend doordat er geen twee ribkubusjes dezelfde kleurencombinatie bezitten.

Aangezien de 6 middenkubusjes niet van hun plaats kunnen bewegen zijn er in totaal $(8! * 3^8) \times (12! * 2^{12}) = 519.024.039.293.878.272.000$ verschillende manieren om een Rubiks kubus in elkaar te zetten.
Echter, niet al deze mogelijkheden zijn ook te bereiken met legale zetten vanuit een opgeloste kubus. Hierop komen wij later terug.

Notatie
Er zijn verschillende manieren om draaiingen van een Rubiks kubus te beschrijven. Wij zullen hier de Engelse beschrijven, omdat deze het meest voorkomt.
Bij de Engelse notatie krijgt elk vlak van de kubus een eigen naam. Hierbij wordt ervan uitgegaan dat je de kubus voor je houdt terwijl je recht tegen één vlak aankijkt. De verschillende vlakken zijn dan:

- De voorkant. Deze wordt beschreven met de letter **F.**
- De rechterzijkant. Deze wordt beschreven met de letter **R**.

- De linkerzijkant. Deze wordt beschreven met de letter **L**.
- De achterkant. Deze wordt beschreven met de letter **B**.
- De bovenkant. Deze wordt besschreven met de letter **U**.
- De onderkant. Deze wordt beschreven met de letter **D**.

Om draaiingen te beschrijven, wordt een simpel systeem gebruikt. Als wij willen dat een vlak een kwartslag met de klok mee (als we recht naar dit vlak zouden kijken) wordt gedraaid, schrijven we simpelweg de corresponderende letter van dat vlak op. Dus als de voorkant een kwartslag met de klok mee wordt gedraaid, schrijven we '**F**.'
Als het vlak een kwartslag tegen de klok in wordt gedraaid, schrijven we ook de letter van dit vlak op, maar dan met het volgende teken erboven: '-1.' Dus als de voorkant een kwartslag tegen de klok in gedraaid wordt, schrijven wij '$\mathbf{F^{-1}}$.' Dit is de inverse van de beweging **F**.
Wordt een vlak 'op zijn kop gezet,' oftewel twee keer een kwartslag gedraaid, dan schrijven we eerst het vlak dat gedraaid wordt, en daarna een '2' erachter. Dus als de voorkant 2 keer een kwartslag gedraaid wordt, schrijven wij **F2** of $\mathbf{F^2}$.

Pariteit bij de Rubiks kubus

Pariteit van een zet
Elke zet die gedaan wordt met een Rubiks kubus draait een vlak van 9 kubusjes. Dit betekent dat met elke draaiing er 4 hoekkubusjes, 4 ribkubusjes en 1 middenkubusje gedraaid worden. Hoewel het middenkubusje ten opzicht van de andere middenkubusjes draait, blijft hij op dezelfde positie. We zullen daarom voorlopig niet meer naar de middenkubusjes kijken.

Zoals gezegd krijgen bij elke draaiing 4 hoekkubusjes een nieuwe plek. Als we beter kijken naar de verschillende kleuren die een hoekkubusje 'toont,' kun je de permutatie **F** beschrijven als een cykel. We beginnen met het hoekkubusje linksboven, en kijken naar elk afzonderlijk vlak waarop een kleur staat. De bovenkant van het kubusje linksboven gaat dan naar de 'rechterkant' op zijn volgende plek. De voorkant blijft de voorkant; de linkerkant wordt de bovenkant. In cykel-notatie: **(ufl rfu)** waarmee natuurlijk het bovenstaande bedoeld wordt.
Als we dit doorvoeren voor alle hoekkubusjes in een vlak, krijgen we de volgende cykel: **(ufl rfu dfr lfd)** voor een draaiing met de klok mee. Van links naar rechts zijn dit de kubus linksboven, rechtsboven, rechtsonder en linksonder. Dit is een oneven permutatie, aangezien het een 4-cykel is. (Hij kan op de volgende manier als een oneven aantal 2-cykels geschreven worden: **(ufl lfd) (ufl dfr) (ufl rfu)**)

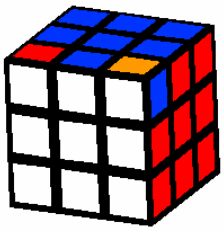
Er kan een soortgelijke cykel opgesteld worden voor de permutatie van de ribkubusjes als permutatie F gedaan wordt. Deze wordt dan **(uf rf df lf)**, met als volgorde van links naar rechts het ribkubusje boven, rechts, onder en links. Ook deze cykel is oneven. Hij kan als **(uf lf) (uf df) (uf rf)**, drie 2-cykels geschreven worden.

De permutatie **F** van zowel de ribkubusjes als de hoekkubusjes kan nu beschreven worden als 2 4-cykels, op de volgende manier:
(ufl rfu dfr lfd) (uf rf df lf). In totaal is deze permutatie even: hij kan geschreven worden als zes 2-cykels op de volgende manier: **(ufl lfd) (ufl dfr) (ufl rfu) (uf lf) (uf df) (uf rf)**. De totale permutatie **F** is dus even.

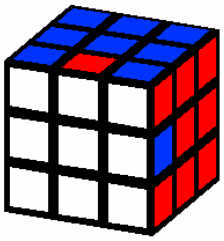
Aangezien elke permutatie die wij kunnen doen alleen maar een variant is van **F** (zoals **U**), of **F** meerdere malen uitgevoerd (**F2** en $\mathbf{F}^{-1}$), is elke permutatie even. Als je meerdere permutaties achter elkaar uitvoert blijft het teken ook even, want even + even = even. Behoud van pariteit geldt dus ook voor de Rubiks kubus. Maar in dit geval is het wiskundige niet correct om pariteit gebruiken, omdat er meer families zijn dan twee ('even' en 'oneven'). In plaats hiervan staat in de volgende hoofdstukken het woord 'invariant', want die blijft in dit geval behouden. De twee woorden kunnen verder hetzelfde gelezen worden.

Formule
We kunnen nu een formule opstellen voor de invariant van de kubus:
P = p(h) + p(r) waarbij p(h) de invariant van de permutaties van de hoekkubusjes en p(r) de invariant van de permutaties van de ribkubusjes is.

We komen nu terug op het aantal situaties van de kubus die ‘legaal’ bereikbaar zijn.



Je kunt je afvragen af er een manier is om 2 hoekkubusjes om te wisselen, terwijl je de rest niet verandert, zie de afbeelding hiernaast. Dit wil zeggen dat je één 2-cykel nodig hebt voor het beschrijven van de permutatie van de hoeken (oneven), en een even aantal permutaties voor de ribkubusjes. Als wij nu de formule voor de invariant erbij halen en de bovengenoemde waardes invullen, krijgen we het volgende: P = 1 + 0 = 1. De invariant van deze situatie is dus oneven, en aangezien hierboven is bewezen dat de Rubiks kubus altijd zijn even invariant behoudt, is deze situatie onmogelijk te bereiken. Het is dus onmogelijk om twee hoekkubusjes om te wisselen.



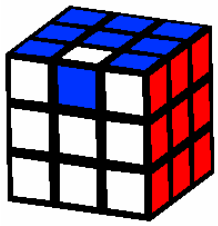
Het is, om dezelfde reden, ook onmogelijk om alleen maar twee ribkubusjes om te wisselen, zie de afbeelding hiernaast. In het verhaal hierboven moet dan ‘hoekkubusje’ vervangen worden door ‘ribkubusje’ en vice versa.

Uitbreiding van de formule

De invariant van de Rubiks kubus is dus met de hierboven beschreven formule te bepalen. Deze formule werkt prima voor het verwisselen van kubusjes, maar kubusjes kunnen ook gedraaid worden. Hierbij blijven ze op dezelfde plek staan, ze worden alleen gedraaid rond hun as. Deze bewegingen, permutaties, kunnen niet zomaar in de formule geïntegreerd worden. We moeten de formule uitbreiden.

Ribkubusjes

We hebben een heleboel geëxperimenteerd met behulp van een programma op internet.[2] We hebben verschillende tabellen gemaakt en uiteindelijk hebben we een formule kunnen opstellen. We zijn begonnen met het draaien van de ribkubusjes. Deze waren makkelijker dan de hoekkubusjes, omdat er maar één draaibeweging mogelijk is. Het verband bleek ook redelijk eenvoudig: als er één kubusje gedraaid wordt, kan dit gezien worden als één transpositie, twee kleuren verwisselen namelijk, zie afbeelding hieronder. Eén transpositie is oneven, het draaien van één ribkubusjes is ook oneven. Als er nu twee ribkubusjes gedraaid worden, kan dit geschreven worden als, twee transposities, tweemaal één transpositie, dit is dus even. Bij even is de kubus oplosbaar, bij oneven niet. Het bewijs hiervoor zullen wij later geven. Het maakt bij deze draaiingen niet uit waar de kubusjes zich ten opzichte van elkaar bevinden.



De formule voor de invariant van de draaiing van de ribkubusjes wordt dan: $P = p(\sigma(dr))$, waarin σ staat voor de permutatie en dr voor het aantal gedraaide ribkubusjes.

Aantal gedraaide ribkubusjes	**Oplosbaar (=0) of onoplosbaar (=1)?**
1	1
2	0
3	1
4	0
5	1

Enzovoort…

Bij het combineren van de draaiingen en verwisselingen van ribkubusjes, zou het logisch zijn om de twee permutaties gewoon op te tellen en dan de invariant te bepalen. Dit gaat dan volgens deze formule: $P = p(\sigma(r)) + p(\sigma(dr))$.
Hierbij is $p(\sigma(r))$ de invariant van de permutatie van de ribkubusjes, door verwisselingen. En $p(\sigma(dr))$, de invariant van de permutatie van de ribkubusjes, door draaiingen.

Maar toen we deze hypothese gingen testen, bleek het niet helemaal te kloppen. Al in een vroeg stadium hadden we ontdekt dat het oplossen van een kubus met één ribdraaiing en één ribverwisseling onmogelijk was. Dit zou volgens de formule hierboven wel oplosbaar moeten zijn. We vullen de formule, $P = p(\sigma(r)) + p(\sigma(dr))$, in: $p(\sigma(r))$ was 1, omdat er

[2] http://home.hetnet.nl/~rubik/kubus.htm

twee ribkubusjes verwisseld werden en p(σ(dr)) was 1 omdat er één kubusje gedraaid werd. De totale invariant is dan 1 + 1 = 0.

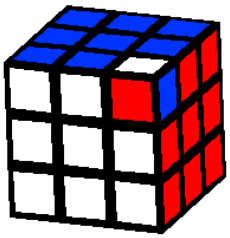
Uiteindelijk kwamen we tot de conclusie dat de bovenstaande formule wel geldt, maar de totale invariant moet op een iets andere manier berekend worden, namelijk zo:

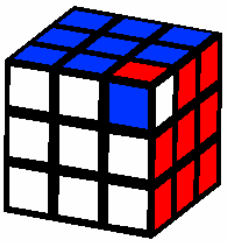
P = p(σ(r)) + p(σ(dr))
0 + 0 = 0
1 + 0 = 1
0 + 1 = 1
1 + 1 = 1

De totale invariant is 1 als minstens één van de twee invarianten (namelijk de draaiingsinvariant van de ribben en de verwisselingsinvariant van de ribben) 1 is, en alleen 0 als de twee invarianten allebei 0 zijn. Dit wijkt dus maar op één punt van de normale berekening af; 1 + 1 = 1 in plaats van 0. Door de rekenregels voor invarianten zo aan te passen, bleek de formule wel te kloppen.

Hoekkubusjes

We hebben nu een complete formule voor draaiingen en verwisselingen met ribkubusjes. Nu gaan we kijken naar hoekkubusjes.
Hoekkubusjes kunnen twee kanten op draaien, met de klok mee (afbeelding boven) en tegen de klok in (afbeelding onder). Wij hebben deze twee richtingen voor het gemak respectievelijk idem en inverse (inv) genoemd. Als in beide richtingen één keer gedraaid wordt, heffen deze twee bewegingen elkaar op. We hebben weer vele draaiingen en combinaties van draaiingen uitgeprobeerd, die weergegeven zijn in onderstaande tabel.





Aantal hoekkubusjes	**Idem/inverse**	**Oplosbaar (=0) of niet (=1)**	
1	1 idem of 1 inverse	1	1
2	2 Idem	1	2
2	Idem/inverse	0	0
2	2 inverse	1	2
3	3 Idem	0	3
3	2 idem/ 1 inverse	1	1
3	1 idem/ 2 inverse	1	1
3	3 inverse	0	3
4	4 Idem	1	4
4	3 idem/ 1 inverse	1	2
4	2 idem/ 2 inverse	0	0
4	1 idem/ 3 inverse	1	2
4	4 inverse	1	4
5	5 Idem	1	5

5	4 idem/ 1 inverse	0	3
5	3 idem/ 2 inverse	1	1
5	2 idem/ 3 inverse	1	1
5	1 idem/ 4 inverse	0	3
5	5 inverse	1	5
6	6 idem	0	6
6	5 idem/ 1 inverse	1	4
6	4 idem/ 2 inverse	1	2
6	3 idem/ 3 inverse	0	0
6	2 idem/ 4 inverse	1	2
6	1 idem/ 5 inverse	1	4
6	6 inverse	0	6

Zo hebben we uiteindelijk een verband gevonden. De formule van deze invariant is geworden: $P = p(|(idem – inv)| \bmod 3)$.
De invariant is dus de invariant van het verschil tussen het aantal idemdraaiingen en inversedraaiingen en dat in modulo drie. In modulo drie betekent dat het aantal door drie gedeeld moet worden, waarbij “de rest” het nieuwe getal wordt. Er zijn dus drie mogelijke getallen voor het verschil in modulo drie, de 0, 1 en 2. Uit onze experimenten bleek dat de invariant nu niet op de gewone manier bepaald kan worden. Het is dus niet zo dat de invariant respectievelijk 0, 1 en 0 is.
Bij 0 is de invariant 0, bij 1 is de invariant 1, maar bij 2 is de invariant ook 1. Eigenlijk wordt de invariant dus alleen maar nul als het verschil (tussen idem en inv) deelbaar door drie is.

Voor het verwisselen van de hoekkubusjes geldt het bekende verband: $P = p(\sigma(h))$. Één verwisseling is oneven, twee verwisselingen zijn even en zo verder.
Het combineren van de twee formules voor draaiingen en verwisselingen van hoekkubusjes geeft de volgende formule: $P = p(\sigma(h)) + p(|(idem – inv)| \bmod 3)$.
Hierbij is $p(\sigma(h))$ weer de invariant van de permutatie van de hoekkubusjes, door verwisselingen. En $p(|(idem – inv)| \bmod 3)$, de invariant van de draaiingen van de hoekkubusjes.
Bij deze formule geldt ook de afwijkende regel: $1 + 1 = 1$.

De totale kubus
Nu hebben we én een formule voor de ribkubusjes én een formule voor de hoekkubusjes. Het laatste wat nu nog moeten gebeuren is het samen voegen van deze twee formules tot één complete. Dit kunnen we doen door de formules voor de invarianten gewoon op te tellen:
$P = p(r) + p(h)$, waarbij $p(r)$ de totale invariant van de ribkubusjes is en $p(h)$ de totale invariant van de hoekkubusjes. Als we dit verder invullen wordt het:
$P = p(p(\sigma(r)) + p(\sigma(dr))) + p(p(\sigma(h)) + p(|(idem – inv)| \bmod 3))$
Eerst worden de invarianten van draaiingen en verwisseling van ribkubusjes bij elkaar opgeteld en dan de invarianten van de draaiingen en verwisselingen van de hoekkubusjes. Vervolgens worden deze twee deelinvarianten weer opgeteld.

Bij alle berekeningen van invariant en wordt de rekenregel 1 + 1 = 1 gebruikt, maar hierop is één uitzondering. Wanneer er geen draaiingen zijn, wordt de invariant weer berekend met de formule op pagina 28. Hierbij geldt juist de rekenregel 1 + 1 = 0. Dit is nogal verwarrend.

Om de grootste verwarring te voorkomen, veranderen we de volgorde binnen de formule. Zo wordt het duidelijk wanneer je welke rekenregel moet gebruiken. We tellen in de nieuwe formule eerst beide verwisselingsinvarianten en op, en daarna beide draaiingsinvarianten. Daarna tellen we deze twee waarden weer op. De formule wordt dan:
P = p(p(σ (r)) + p(σ (h))) + p(p(σ (dr))+ p(|(idem – inv)| mod3))

Voor de totale verwisselingsinvariant geldt de rekenregel 1 + 1 = 0, voor de totale draaiingsinvariant geldt 1 + 1 = 1. Bij het optellen van de verwisselingsinvariant en de draaiingsinvariant geldt 1 + 1 = 1.

Met behulp van deze formule kan nu bij een willekeurige kubus bepaald worden of de kubus oplosbaar is. Alle invarianten kunnen ingevuld worden en als de uiteindelijke invariant dan 1 is, is kubus dus niet oplosbaar. Is de invariant echter 0, dan is de kubus wel op te lossen.
Ook is nu te bepalen hoeveel standen van de kubusjes voor een oplosbare puzzel zorgen, dus hoeveel standen er zijn waarbij de invariant 0 is.
De kubus is oplosbaar als óf alle vier de invarianten 0 zijn – want 0 + 0 + 0 + 0 levert 0 op - óf als de draaiingsinvarianten van de ribkubusjes en de hoekkubusjes allebei 0 zijn en de verwisselingsinvarianten van de hoekkubusjes en ribkubusjes allebei 1 zijn – want 1 + 0 + 1 + 0 levert ook 0 op.

Kans op oplosbare situaties
De kans dat alle vier de invarianten 0 zijn, is als volgt te berekenen:

- Bij draaiingen van hoekkubusjes is 1/3 van alle standen (door het modulo 3 rekenen: alleen als daar 0 uit komt) even en 2/3 is oneven, dus 1/3 van de standen is in principe oplosbaar.
- Bij verwisselingen van de hoekkubusjes is de helft even en de helft oneven, dus de helft is in principe oplosbaar.
- Bij draaiingen van de ribkubusjes is de helft van alle standen even en de helft oneven, zodat in principe de helft oplosbaar is.
- Voor verwisselingen van de hoekkubusjes geldt hetzelfde, zodat ook daarvan in principe de helft oplosbaar is.
- De kans dat alle vier de invarianten in een kubus 0 zijn, is dus:
  1/3 * ½ * ½ * ½ = 1/24.

De andere mogelijkheid voor een oplosbare kubus is wanneer de draaiingsinvarianten allebei 0 zijn en de verwisselingsinvarianten allebei 1. De kans hierop wordt op een zelfde manier berekend:

- De kans dat de draaiingsinvariant van de hoekkubusjes 0 is, is 1/3, zoals hierboven staat.

- Voor de verwisselingsinvariant van de hoekkubusjes was de kans op 1 even groot als de kans op 0, dus ½.
- De kans dat de draaiingsinvariant van de ribkubusjes 0 is, is ½, zoals hierboven staat.
- Voor de verwisselingsinvariant van de ribkubusjes gold dat de kans op 1 even groot was als de kans op 0, dus ½.
- De totale kans op deze combinatie van invarianten is dus: 1/3 * ½ * ½ * ½ = 1/24.

Van alle mogelijke standen van de kubusjes in een Rubiks kubus, levert dus 1/24 + 1/24 = 1/12 een oplosbare kubus.

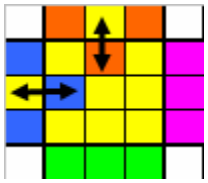
Bereikbaarheid van even situaties van de Rubiks kubus

Oneven draaiingen in de Rubiks kubus zijn, zoals in het vorige hoofdstuk is vastgesteld, niet mogelijk. De mogelijke, even draaiingen hebben in de formule voor de invariant dus altijd de waarde 0. De verwisselingen moeten dan nog ingevuld worden in de formule. Alleen de combinaties van verwisselingsinvarianten ‘0 en 0’ en ‘1 en 1’ geven, zoals we zagen, een oplosbare puzzel. Maar zijn wel al de waardes ‘0’ voor de draaiingen te bereiken? En zijn alle mogelijkheden voor die ‘0 en 0’ en ‘1 en 1’ van de verwisselingsinvarianten wel te bereiken? Oftewel, zijn alle even standen van de Rubiks kubus te bereiken?

Draaiingen
De draaiingen van de kubus moeten dus even zijn, zowel van de ribkubusjes als van de hoekkubusjes. Dat al deze even draaiingen mogelijk zijn, wordt duidelijk uit het volgende:

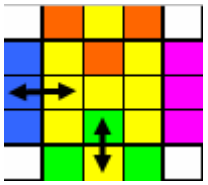
<u>Draaiingen ribkubusjes</u>

- Het is mogelijk om twee ribkubusjes die naast elkaar in hetzelfde vlak zitten te draaien. Hier is een algoritme voor, als de twee kubusjes in het Frontvlak zitten is dat: U’ F’ R’ F R U F’ U’ F’ U F D F’ U’ F U D’ F R L’ F’ L F R’ F’ L’ F L F D F2 D’ F’ D F’ D’ F’ D’ F2 D F D’ F D.



- In het plaatje hierboven is één vlak van de Rubiks kubus van bovenaf te zien, met haar buurvlakjes, met pijlen is aangegeven wat gedaan is om deze positie te bereiken vanuit de opgeloste positie.

- Als je op deze manier eerst twee kubusjes draait en dit daarna nog een keer doet in hetzelfde vlak, maar nu met één ander kubusje en één zelfde, is het resultaat het verwisselen van twee kubusje die tegenover elkaar liggen, zie het plaatje.



- Op deze manier kun je doorgaan totdat twee willekeurige kubusjes gedraaid zijn, ook als ze niet in hetzelfde vlak liggen.

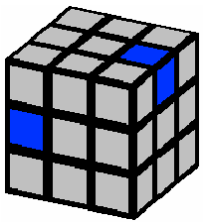
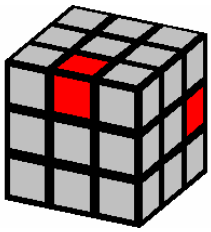
- Alle mogelijkheden van twee ribkubusjes draaien zijn dus mogelijk.

- Alle even aantal draaiingen, 2n draaiingen, van ribkubusjes, waarbij de invariant dus nul is, kunnen geschreven worden als *n* maal twee draaiingen. Deze zijn dus allemaal mogelijk.

Hierboven werd genoemd dat twee willekeurige kubusjes gedraaid kunnen worden door het meerdere malen uitvoeren van het algoritme. Hierop zullen wij nu iets dieper ingaan. Voor die posities van twee ribkubusjes ten opzichte van elkaar zijn namelijk vijf verschillende mogelijkheden:

1. Je draait twee ribkubusjes die recht tegenover elkaar in hetzelfde vlak liggen.
2. Je draait twee ribkubusjes die schuin tegenover elkaar in hetzelfde vlak liggen.

3. Je draait twee ribkubusjes die ‘twee vlakken verderop’ tegenover elkaar liggen, helemaal aan de andere kant van de kubus dus.
4. en 5. Je draait twee ribkubusjes die in een aangrenzend vlak, in een andere laag liggen. Dit kan óf aan de linkerkant (blauwe kubusjes) óf aan de rechterkant (rode kubusjes), zie de plaatjes.

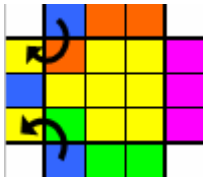
Als je uitgaat van het algoritme dat twee ribben, die schuin tegenover elkaar liggen, draait, kom je uit op de volgende tabel:

Mogelijkheid voor positie	**Oplossing**
1: Recht tegenover elkaar	Twee maal het algoritme toepassen, waarbij één ribkubusje heen en terug gedraaid wordt.
2: Schuin tegenover elkaar	Eenmaal het algoritme toepassen
3: Twee vlakken verderop	Viermaal het algoritme toepassen, waarbij drie ribkubusjes heen en terug gedraaid worden.
4 en 5: Aangrenzend vlak, en andere laag	Driemaal het algoritme toepassen, waarbij twee ribkubusjes heen en terug gedraaid worden.

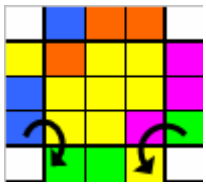
<u>Draaiingen hoekkubusjes</u>

Iets vergelijkbaars geldt voor de hoekkubusjes.

- Het is mogelijk om twee hoekkubusjes die naast elkaar zitten te draaien, de ene idem en de andere inverse, zie plaatje.
  Hiervoor is een algoritme, de gedraaide kubusjes zitten wederom in het Frontvlak: L’ B’ L B L’ B’ L F’ L’ B L B’ L’ B L F

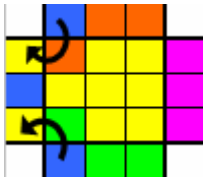
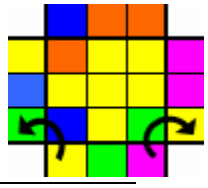


- Als je op deze manier eerst twee kubusjes draait en dit daarna nog een keer doet in hetzelfde vlak, maar nu met één ander kubusje en één zelfde, is het resultaat het verwisselen van twee kubusjes die tegenover elkaar liggen, weer de ene idem en de andere inverse, zie het plaatje.



- Op deze manier kun je doorgaan totdat de twee gewenste kubusjes gedraaid zijn, de ene idem en de andere inverse.

- Ook een situatie waarbij 3 kubusjes in dezelfde richting gedraaid zijn kan zo bereikt worden, namelijk op de volgende manier:
  - De eerste stap is dezelfde als de eerst stap hierboven.
  - De tweede stap is weer bijna hetzelfde als de tweede stap hierboven, maar nu worden de beide kubusjes in de tegengestelde richting, ten opzichte van hierboven, gedraaid. Het resultaat is weer zichtbaar in het onderste plaatje hiernaast.

- Dit kan zo ook met willekeurige hoekjes gedaan worden.

Op dezelfde manier als bij de ribkubusjes kan een tabel gemaakt worden voor het draaien van twee willekeurige hoekkubusjes. Voor de posities ten opzichte van elkaar van twee hoekjes zijn drie verschillende mogelijkheden:

1. Je draait twee hoekjes die naast elkaar in hetzelfde vlak liggen.
2. Je draait twee hoekjes die tegenover elkaar in hetzelfde vlak liggen.
3. Je draait twee hoekjes die helemaal aan de andere kant van de kubus liggen.

Maar ook het draaien van meerdere hoekjes op een andere manier, kan een even draaiing zijn, vanwege het rekenen in modulo 3.

Noem nu de stap waardoor twee hoekkubusjes, die naast elkaar liggen, gedraaid worden, de één idem en de ander inverse, stap a. Noem de stap waardoor drie hoekkubusjes, die in hetzelfde vlak liggen, dezelfde kant op gedraaid worden, stap b.
Voor de even draaiingen van hoekkubusjes kom je dan uit op de volgende tabel:

Mogelijkheid voor positie en aantal	**Oplossing**
1: Twee hoekkubusjes naast elkaar een andere kant op draaien	Eénmaal stap a uitvoeren
2: Twee hoekkubusjes tegenover elkaar een andere kant op draaien	Tweemaal stap a uitvoeren, waarbij één hoekkubusje heen en terug gedraaid wordt
3: Twee hoekkubusjes aan de andere kant van de kubus een andere kant op draaien	Driemaal stap a uitvoeren, waarbij twee hoekkubusjes heen en terug gedraaid worden
4: Drie hoekkubusjes dezelfde kant op draaien, idem of inverse	Eénmaal stap b uitvoeren
5: Vier hoekkubusjes draaien, 2 idem en 2 inverse	Tweemaal stap a uitvoeren, iedere keer met twee nieuwe hoekkubusjes
6: Vijf hoekkubusjes draaien, 4 idem en 1 inverse of 4 inverse en 1 idem	Eénmaal stap b uitvoeren en met twee nieuwe hoekkubusjes éénmaal stap a uitvoeren
7: Zes hoekkubusjes dezelfde kant op draaien, idem of inverse	Tweemaal stap b uitvoeren, iedere keer met drie nieuwe hoekkubusjes
8: Zeven hoekkubusjes draaien, 5 idem en 2 inverse of 5 inverse en 2 idem	Eénmaal stap b uitvoeren, dan met vier nieuwe hoekkubusjes tweemaal stap a uitvoeren
9: Acht hoekkubusjes draaien, 7 idem en 1 inverse of 7 inverse en 1 idem	Tweemaal stap b uitvoeren, steeds met drie nieuwe hoekkubusjes, dan éénmaal stap a met twee nieuwe hoekkubusjes

(Enzovoort..)

Vanaf de vierde mogelijkheid wordt geen rekening gehouden met de positie van de hoeken ten opzichte van elkaar, omdat met behulp van de eerste drie stappen altijd de goede hoekjes gedraaid kunnen worden en de ‘verkeerde’ hoekjes teruggedraaid kunnen worden.

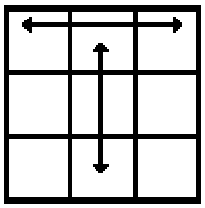
Met behulp van deze twee bewegingen kunnen alle mogelijke even draaiingen beschreven worden. Dit kan met behulp van het optellen van verschillende bewegingen. Alle even draaiingen van de ribkubusjes zijn dus mogelijk en alle even draaiingen van de hoekkubusjes zijn ook mogelijk. Als invarianten nul zijn, dus even zijn, kan de Rubiks kubus wat betreft de draaiingen opgelost worden. Dus onze vraag; 'zijn alle even draaiingen te bereiken?', is nu beantwoord, met ja.

Verwisselingen
De mogelijke combinaties van verwisselingsinvarianten zijn zoals gezegd "0+0" en "1+1".
De combinatie "0+0" betekent dat er zowel met de ribkubusjes als met de hoekkubusjes een even permutatie gedaan wordt, terwijl de combinatie "1+1" betekent dat er zowel met de ribkubusjes als met de hoekkubusjes een oneven permutatie gedaan wordt.

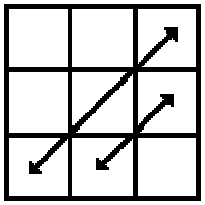
"0+0" kan een aantal verschillende dingen betekenen: je verwisselt geen enkel ribkubusje en geen enkel hoekkubusje, óf je doet een even groot (even) aantal ribkubusjesverwisselingen als hoekkubusjesverwisselingen, óf je doet een ander aantal (even) ribkubusjesverwisselingen dan hoekkubusjesverwisselingen. De eerste mogelijkheid, geen enkele verwisseling, is natuurlijk te bereiken. Maar bij de tweede en derde mogelijkheid ligt dat iets anders.
Ook "1+1" kan een aantal verschillende dingen betekenen: Je doet evenveel (oneven) ribkubusjesverwisselingen als hoekkubusjesverwisselingen, óf je doet een ander (oneven) aantal ribkubusjes verwisselingen dan hoekkubusjesverwisselingen.

<u>Evenveel ribkubusjes als hoekkubusjes</u>
Al deze even permutaties waarbij evenveel ribkubusjes als hoekkubusjes verwisseld worden, zijn te zien als een aantal keer twee hoekkubusjes én een aantal keer twee ribkubusjes verwisselen. Wij zullen hieronder bewijzen dat twee hoekkubusjes én twee ribkubusjes altijd te verwisselen zijn.
Daarvoor doen we een vergelijkbare stap als in de schuifpuzzel. Daarbij hadden we een basisalgoritme gevonden voor het verwisselen van drie hokjes, en alle even situaties konden geschreven worden als een aantal keer drie hokjes verwisselen, waardoor alle even situaties te bereiken waren. Zoiets kan ook in de Rubiks kubus gedaan worden.

Er zijn twee basisalgoritmen voor het verwisselen van twee hoekkubusjes en twee ribkubusjes[3]. Het eerste is:
R B U' B' U B U B² R' B U B U' B', dat twee hoekkubusjes naast elkaar en twee ribkubusjes tegenover elkaar verwisselt, zie de afbeelding hiernaast.



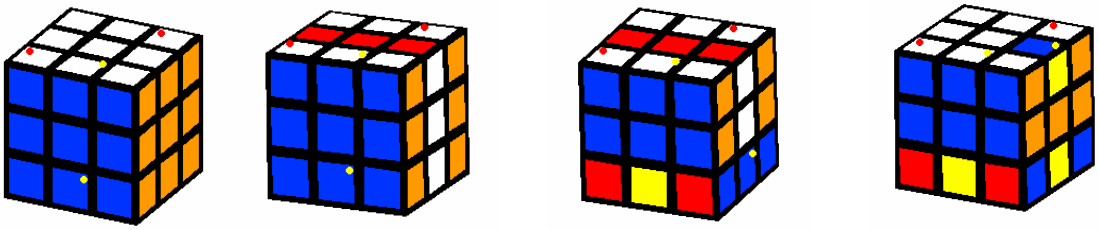
Het tweede is: L' U R U' L U L' U R' U' L U² R U² R'. Dit algoritme verwisselt twee hoekkubusjes tegenover elkaar en twee ribkubusjes schuin naast elkaar, zie de afbeelding hiernaast.



[3] http://www.ws.binghamton.edu/fridrich/Mike/permute.html

Er zijn nog meer algoritmen die als basis gebruikt kunnen worden, maar wij zullen ons beperken tot deze twee. Eigenlijk is één basisalgoritme al genoeg, maar met twee wordt het eenvoudiger, omdat er dan minder stappen gedaan hoeven worden om alle kubusjes in één vlak te krijgen.
Voor het verwisselen van twee hoekkubusjes en twee ribkubusjes zijn veel verschillende mogelijkheden, maar die zijn allemaal te herleiden tot een situatie zoals in de afbeeldingen, waarna één van de twee basisalgoritmen toegepast kan worden. De hoekkubusjes en ribkubusjes die verwisseld moeten worden, worden eerst naar één vlak bewogen, door eerst één laag uit dat vlak weg te draaien, daarna één (of meerdere) van de aangewezen hoekkubusjes of ribkubusjes in die laag te draaien, en dan de laag weer in het vlak terug te draaien. Na het uitvoeren van het algoritme, moeten deze stappen andersom uitgevoerd worden zodat de hoeken op de goede plek terechtkomen. Vergelijkbare stappen werden ook in de schuifpuzzel uitgevoerd.

Voorbeeld
We beginnen met een kubus in de beginsituatie, zie het eerste plaatje hieronder. Nu willen we het hoekje rechtsboven en het hoekje linksonder in het witte vlak (met een rode stip) verwisselen, en het ribkubusje in het witte vlak met de ribbe in het blauwe vlak (met een gele stip) verwisselen.
Er hoeft maar één kubusje naar het witte vlak verplaatst te worden om alle kubusjes in één vlak te krijgen. Om dit te doen, draaien we eerst het de middelste witte laag, zie het tweede plaatje.
Daarna draaien we de onderste laag een kwart, zodat het blauwe ribkubusje onder de twee witte kubusjes komt te staan, zie het derde plaatje.
Tenslotte draaien we deze witte laag weer terug, zodat ook het blauwe ribkubusje zich in het witte vlak bevindt, zie het vierde plaatje.
Het tweede basisalgoritme kan nu uitgevoerd worden, er moet wel rekening worden gehouden met de wat de voor en achterkant enzovoort zijn, in het algoritme. In de afbeelding is te zien dat de te verwisselen kubusjes in de rechter- en onderkant zitten. De kubus moet dus zo gedraaid worden dat de kubusjes die je wilt verwisselen ook in de rechter- en onderkant zitten. Op het vierde plaatje hieronder staat de kubus dus al goed. Als het hele algoritme gedaan is, zijn alleen deze vier kubusjes gewisseld, de rest van de puzzel is precies hetzelfde gebleven als in het laatste plaatje hieronder. We willen nu natuurlijk weer terug naar de oorspronkelijke toestand; het eerste plaatje, maar dan waarbij de aangewezen hoekjes verwisseld zijn. Deze toestand is eenvoudig te bereiken door de inverse van alle stappen die net gedaan zijn te doen.
Eerst wordt dus de middelste laag gedraaid, dan de onderste laag, en dan weer de middelste laag, maar alle bewegingen worden de andere kant op uitgevoerd.
Het uiteindelijke resultaat is de verwisseling van de gewenste hoek- en ribkubusjes.



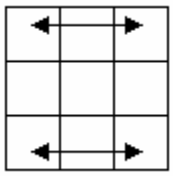
Met behulp van deze basisverwisselingen kunnen dus alle permutaties, waarbij twee hoekkubusjes en twee ribkubusjes verwisseld worden, uitgevoerd worden. Omdat alle even permutaties van de kubus waarbij evenveel hoekkubusjes als ribkubusjes verwisseld worden, uit zulke stappen opgebouwd zijn, zijn alle mogelijkheden van “0+0” en “1+1” te bereiken, als dit betekent dat evenveel hoekkubusjes als ribkubusjes verwisseld worden.

Een ongelijk aantal hoekkubusjes en ribkubusjes

Nu hebben we dus bewezen dat “0+0” en “1+1” te bereiken zijn als dit betekent dat er evenveel ribkubusjes als hoekkubusjes verwisseld worden. De laatste mogelijkheid, namelijk dat er meer ribkubusjes dan hoekkubusjes verwisseld worden of andersom, kan als volgt bekeken worden: Eerst worden er evenveel ribkubusjes als hoekkubusjes verwisseld en daarna wordt van één van de twee soorten kubusjes nog een even aantal kubusjes verwisseld, want er is altijd een even aantal verwisselingen van een soort méér. Neem bijvoorbeeld vier ribkubusjesverwisselingen en zes hoekkubusjesverwisselingen. Dit is dus een voorbeeld van “0+0” want beide permutaties zijn even. Je weet dat het mogelijk is om vier ribkubusjesverwisselingen met vier hoekkubusjesverwisselingen uit te voeren, maar daarna blijven er nog twee hoekkubusjesverwisselingen over.

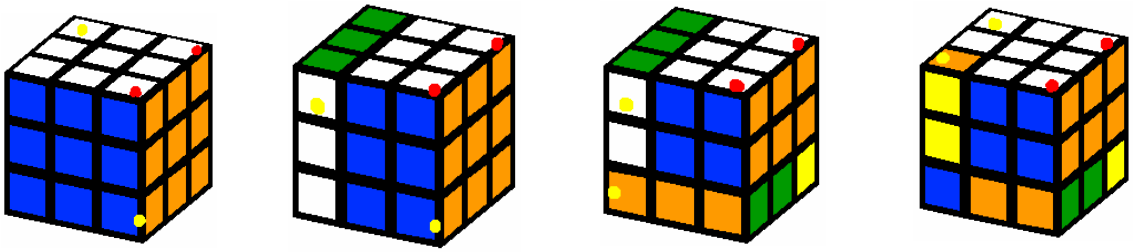
Om te bekijken of alle even ribkubusjesverwisselingen en hoekkubusjesverwisselingen mogelijk zijn, doen we weer een vergelijkbare stap als in de schuifpuzzel door een basisalgoritme te nemen en alle situaties te herleiden naar een situatie waarin het algoritme uitgevoerd kan worden. We kijken nu afzonderlijk naar de hoekkubusjes en de ribkubusjes:

Een even permutatie van hoekkubusjes is te zien als n keer twee verwisselingen. Om te bewijzen dat alle even permutaties kunnen, bewijzen we dat het altijd mogelijk is om twee verwisselingen van hoekkubusjes te doen. Voor twee verwisselingen van de hoekkubusjes is het basisalgoritme L U' R D² R' U R L' U' L D² L' U R', waardoor vier hoeken tegenover elkaar verwisseld worden, zoals in de afbeelding hiernaast.

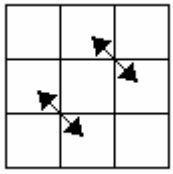


Voor een even permutatie van hoekkubusjes zijn veel verschillende mogelijkheden, maar die zijn allemaal te herleiden tot de situatie zoals in de afbeelding, waarna het algoritme toegepast kan worden. De hoeken die verwisseld moeten worden, worden eerst naar één vlak bewogen, door eerst één laag uit dat vlak weg te draaien, daarna één (of twee) hoekjes in die laag te draaien, en dan de laag weer in het vlak terug te draaien. Na het uitvoeren van het algoritme, moeten deze stappen andersom uitgevoerd worden zodat de hoeken op de goede plek terechtkomen. Vergelijkbare stappen werden ook in de schuifpuzzel uitgevoerd. Dit werkt dus eigenlijk op dezelfde manier als bij het verwisselen van twee hoekkubusjes én twee ribkubusjes.

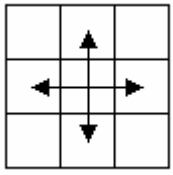
Voorbeeld
We beginnen met een kubus in de beginsituatie, zie het eerste plaatje hieronder. Nu willen we de twee wit-oranje hoekjes in het witte vlak verwisselen (met een rode stip) en het hoekje rechtsboven in het witte vlak met het blauw-oranje hoekje in het blauwe vlak verwisselen (met een gele stip).
Er hoeft maar één kubusje naar het witte vlak verplaatst te worden om alle kubusjes in één vlak te krijgen. Om dit te doen draaien we eerst het achtervlak een kwart, zie het tweede plaatje.
Daarna draaien we de onderkant ook een kwart, zodat het blauw-oranje hoekje onder het andere hoekje met de gele stip komt te staan, zie het derde plaatje.
Nu draaien we het achtervlak weer terug naar het witte vlak en dan zitten alle kubusjes die we willen draaien in het zelfde vlak, zoals in het laatste plaatje te zien is.
Het algoritme kan nu uitgevoerd worden. Als het hele algoritme gedaan is, zijn alleen deze vier hoekkubusjes gewisseld, de rest van de puzzel is precies hetzelfde gebleven als in het laatste plaatje hieronder. We willen nu natuurlijk weer terug naar de oorspronkelijke toestand; het eerste plaatje, maar dan waarbij de aangewezen hoekjes verwisseld zijn. Deze toestand is eenvoudig te bereiken door de inverse van alle stappen die net gedaan zijn te doen.
Eerst wordt de achterkant dus gedraaid, daarna de onderkant en als laatste weer de achterkant, maar nu in de andere richting. Het uiteindelijke resultaat is de verwisseling van de gewenste hoekjes.



Voor de even permutatie van de ribkubusjes zijn er twee basisalgoritmes. Het eerste is: R^2 L^2 D L^2 F^2 R^2 L^2 B^2 R^2 D' R^2 L^2. Dit algoritme zorgt ervoor dat twee keer twee schuin naast elkaar liggende ribkubusjes omgewisseld worden, zie de afbeelding hiernaast.



Het andere basisalgoritme dat gebruikt kan worden is B^2 R^2 L^2 F^2 D' F^2 R^2 L^2 B^2 U. Dit algoritme wisselt twee keer twee tegenoverliggende ribkubusjes om, zie de afbeelding hiernaast.



Eigenlijk is één algoritme genoeg om alle posities te bereiken, maar met een tweede erbij wordt het wel eenvoudiger; er hoeven dan namelijk minder stappen gedaan te worden om alle kubusjes op de juiste manier in één vlak te krijgen.

Voor een even permutatie van ribkubusjes zijn nog meer mogelijkheden dan voor de hoekkubusjes, omdat er meer ribkubusjes dan hoekkubusjes zijn. Ook al deze

verschillende permutaties zijn echter te herleiden tot een situatie waarin één van de twee algoritmes uitgevoerd kan worden, op een vergelijkbare manier als dat bij de hoekkubusjes gebeurde: Door eerst één laag uit het vlak waarin je het algoritme wilt toepassen weg te draaien, daarna een ribkubusje in dat vlak te draaien, en dan de laag weer in het vlak terug te draaien. Na het uitvoeren van het algoritme, moeten deze stappen andersom uitgevoerd worden zodat de ribkubusjes op de goede plek terechtkomen.

Met behulp van deze basisverwisselingen kunnen dus weer alle mogelijke combinaties bereikt worden.
Alle even hoekkubusjesverwisselingen én alle even ribkubusjesverwisselingen zijn dus mogelijk. Nu is duidelijk dat de laatste mogelijkheid van "0 + 0" of "1 + 1", waarbij meer hoekkubusjes dan ribkubusjes worden verwisseld of andersom, ook altijd oplosbaar is.

Conclusie
In dit hoofdstuk hebben wij aangetoond dat alle even standen van de Rubiks kubus te bereiken zijn. Dit is zo omdat:

- De invariant van de draaiingen altijd 0 is bij een oplosbare kubus. Er is een algoritme om twee ribkubusjes te draaien; met behulp hiervan kunnen alle even draaiingen van ribkubusjes bereikt worden. Ook is er een algoritme om twee hoekkubusjes te draaien, de een idem en de ander inverse; met behulp hiervan kunnen alle even draaiingen van hoekkubusjes bereikt worden.
- De invarianten van de verwisselingen 0 en 0 moeten zijn, óf 1 en 1. Dit kan verschillende dingen inhouden:

1. Niets verwisselen, wat uiteraard mogelijk is.
2. Evenveel hoekkubusjes als ribkubusjes verwisselen, wat mogelijk is omdat alle situaties te herleiden zijn naar een situatie waarin één van de gevonden basisalgoritmen te gebruiken zijn, zodat alle even situaties op te lossen zijn.
3. Meer hoekkubusjes dan ribkubusjes verwisselen of andersom, wat mogelijk is omdat het aantal verwisselingen dat van één soort meer is, altijd even is. Voor deze 'extra' verwisselingen kunnen basisalgoritmen gebruikt worden, eventueel nadat eerst alle benodigde hoekkubusjes of ribkubusjes in het goede vlak gedraaid zijn (wat weer ongedaan gemaakt wordt na het uitvoeren van het algoritme).

Andere Rubiks kubussen

We hebben nu de 3 bij 3 bij 3 Rubiks kubus bekeken. Er zijn echter nog varianten op deze kubus. De invulling van het vlak en de grootte en vorm van de kubus kunnen bijvoorbeeld variëren. We zullen twee voorbeelden bekijken; de 2 bij 2 bij 2 kubus, ofwel minikubus en de sudokukubus of de Rubiks kubus met tekening.

Minikubus

Omdat de Minikubus maar vier kubusjes per vlak bevat (zie figuur), zijn er geen ribkubusjes en bestaat de hele puzzel uit hoekkubusjes. Het lijkt logisch om uit de bestaande formule voor de invariant van de 3 bij 3 bij 3 Rubiks kubus gewoon de deelinvarianten die over ribkubusjes gaan weg te laten. De nieuwe formule voor de invariant wordt dan:
$P = p(\sigma(h)) + p(|idem - inverse|mod3)$
Hierin is $p(\sigma(h))$ de invariant van de permutatie die de (hoek)kubusjes verwisselt, en $p(|idem - inverse|mod3)$ is de invariant van de draaiingen van de (hoek)kubusjes.

Het grote verschil tussen de Minikubus en de 3 bij 3 bij 3 Rubiks kubus, is dat de Minikubus zowel even als oneven kan zijn, terwijl de 3 bij 3 bij 3 Rubiks kubus altijd even blijft. Dit komt doordat één zet, het draaien van één vlak dus, weergegeven kan worden als een 4-cykel van de vier gepermuteerde (hoek)kubusjes. Een 4-cykel is oneven, dus één zet is te beschouwen als oneven. De puzzel verandert dus van even bij nul zetten, naar oneven bij één zet, naar even bij twee zetten, enzovoort.

Het is dus weer zaak om onze rekenregels aan te passen. Immers, $p(\sigma(h))$ kan nu ook oneven zijn en toch een oplosbare puzzel opleveren. De waarde van $p(\sigma(h))$ stellen we daarom op 0, ongeacht de uitgevoerde permutatie. Doordat we $p(\sigma(h))$ op 0 stellen, heeft hij eigenlijk geen waarde meer in de formule, en kunnen we dit onderdeel weglaten. De formule voor de invariant wordt dan uiteindelijk:

$P = (|idem - inverse|mod3)$

De puzzel is alleen oplosbaar als de invariant nul is. Deze is nul als $(|idem - inverse|mod3)$ ook nul is, en in alle andere gevallen niet. Door het rekenen in modulo 3 is de kans dat $(|idem - inverse|mod3)$ nul is, gelijk aan 1/3. In totaal geeft dus 1/3 van alle standen een oplosbare kubus.

Sudokukubus of kubus met tekening

Een kubus met een tekening erop, lijkt erg op een gewone kubus, maar verschilt op één punt: de puzzel verandert als de middenvlakjes om hun as gedraaid worden. De sudokukubus die hier naast is afgebeeld is een voorbeeld van zo'n kubus. Als de 5 op het middenvlakje gedraaid wordt is de puzzel niet meer opgelost. Dit in tegenstelling tot de gewone Rubiks kubus, waarbij een middenvlakje gedraaid kan worden zonder dat dat te zien is. De puzzel is dan nog steeds opgelost. Het probleem bij deze kubus is echter dat sommige kubusjes meerdere keren voorkomen. Daarom gebruiken wij in dit hoofdstuk een Rubiks kubus waar een teken op staat, zodat het zichtbaar is als het middelste vlakje gedraaid wordt. Zie de foto hiernaast.

Voor deze kubus hoeft geen nieuwe formule voor de invariant gemaakt te worden; we kunnen aan de oude formule een nieuw onderdeel toevoegen, waarin rekening gehouden wordt met de middenkubusjes, dan wordt de formule de volgende:

$P = p(p(\sigma(r)) + p(p(\sigma(h))) + p(\sigma(dr)) + p(|(idem(h) - inv(h))| \bmod 3)) + p(|(idem(m) - inv(m))| \bmod 4)$

Het eerste deel van de formule is de al bekende. Er is nu een nieuw stukje toegevoegd voor de draaiingen van het middenkubusje. Dit kubusje kan in vier standen staan en twee kanten op draaien. We moeten net als bij de permutatie van de hoekkubusjes de bewegingen met de klok mee (idem) en tegen de klok in (inverse) van elkaar aftrekken. Het verschil moet nu echter niet in modulo 3 omgezet worden, maar in modulo 4! Dit is zo omdat er vier standen zijn. Als de hele puzzel hetzelfde blijft en een middenkubusje vier keer idem wordt gedraaid, staat het weer in dezelfde positie. Deze stand is te bereiken, het verschil tussen het aantal idem en inverse draaiingen is 4 (4 – 0 = 4). In modulo 4 geldt: 4 = 0. De permutatie van de rest van de puzzel is ook 0, er is niets veranderd. De totale permutatie is nog steeds 0 (0 + 0 = 0), de situatie is dus volgens de formule inderdaad te bereiken.

De kans op een oplosbare situatie is bij deze formule weer te berekenen. Bij de draaiingen van de middenkubusjes is ¼ van de mogelijkheden oplosbaar. Dit komt door de modulo 4, één van de vier uitkomsten, 0, zorgt voor een oplosbare puzzel. Voor het eerste deel van de formule hadden we twee keer 1/24 kans op een oplosbare puzzel, namelijk één keer bij de mogelijkheid 0 + 0 + 0 + 0 en één keer bij de mogelijkheid 1 + 0 + 1 + 0. Die moeten we dus vermenigvuldigen met die ¼:

1/24 * ¼ = 1/96

1/24 * ¼ = 1/96

Als we dit optellen, krijgen we: 1/96 + 1/96 = 1/48

Bij deze kubus is dus maar 1/48 van de situaties oplosbaar.

Conclusie

We hebben verschillende puzzels onderzocht. Dit deden we aan de hand van de onderzoeksvraag: “Wat is het verband tussen de theorie van permutatiegroepen en de (on)oplosbaarheid van schuifpuzzels in verschillende dimensies en Rubiks puzzels?”

Voor het bepalen van de oplosbaarheid van de schuifpuzzel en Rubiks kubus was één begrip cruciaal; de pariteit. Pariteit geeft aan of bepaalde gegevens, zoals in ons geval permutaties en draaiingen, even of oneven zijn door daar het teken 0 respectievelijk 1 aan te geven. De pariteit vloeit voort uit de theorie van de permutatiegroepen. Dit is de belangrijkste link tussen de theorie van de permutatiegroepen en de (on)oplosbaarheid van de puzzels.

Als eerste hebben we schuifpuzzels onderzocht. Hierbij kon de pariteit bepaald worden met behulp van de formule: $P = p(\sigma) + p(\Delta x + \Delta y)$. De pariteit was afhankelijk van de permutatie van de vakjes en de positie van het lege vakje ten opzichte van de beginsituatie. Bij legale zetten bleef de pariteit altijd gelijk. We konden met behulp van deze formule en dit gegeven verklaren waarom de 14-15 puzzel niet oplosbaar is. De pariteit wordt bij deze situatie namelijk oneven.
Met een kleine aanpassing is deze formule ook te gebruiken voor meerdere dimensies, in drie dimensies wordt de formule: $P = p(\sigma) + p(\Delta x + \Delta y + \Delta z)$. Het lege vakje kan nu namelijk ook in de derde richting verplaatst worden. Bij beide schuifpuzzels en ook bij andere schuifpuzzels, is de kans op een oplosbare puzzel ½ . Dit betekent dat als je de puzzel op een willekeurige manier in elkaar zet, de kans ½ is dat de puzzel werkelijk oplosbaar is met behulp van legale zetten.

Nadat we de schuifpuzzel grondig hadden onderzocht, richtten we ons op de Rubiks kubus. We hebben hiermee erg veel geëxperimenteerd. Zo kwamen we uiteindelijk ook bij deze puzzel tot een formule voor de pariteit: $P = p(p(\sigma (r)) + p(\sigma (h))) + p(p(\sigma (dr))+ p(|(idem – inv)| \mod 3))$. Hierin worden de pariteit van de verwisselingen van de ribkubusjes en de hoekkubusjes en de pariteiten van de draaiingen van de ribkubusjes en de hoekkubusjes opgeteld.
Met behulp van deze formule kunnen we bepalen of een situatie van de Rubiks kubus oplosbaar is. Hier geldt net als bij de schuifpuzzel het principe dat bij legale zetten de pariteit altijd gelijk blijft, namelijk even.
De kans op een oplosbare kubus, als je de kubus op een willekeurige manier in elkaar zet, is wel heel anders, deze is namelijk $^1/_{12}$. Er bestaan in de Rubiks kubus dus meer families dan twee, daarom is het wiskundig gezien correcter om ‘invariant’ te gebruiken in plaats van ‘pariteit’.
Naast de gewone (3 bij 3 bij 3) Rubiks kubus hebben we ook de minikubus en de kubus met tekening onderzocht. Hierbij konden we ook weer formules opstellen voor de pariteit, waardoor we achter de (on)oplosbaarheid van een situatie konden komen. Voor de minikubus: $P = (|\text{idem-inverse}| \mod 3)$ en voor de kubus met tekening: $P = p(p(\sigma(r)) + p(\sigma(dr))) + p(p(\sigma(h)) + p(|(idem(h) – inv(h))| \mod 3)) + p(|(idem(m) – inv(m))| \mod 4)$. Bij deze laatste formule is er een component toegevoegd voor de mogelijke draaiing van de middenkubusjes. Deze komt bij de Rubiks kubus ook voor maar beïnvloedt dan niet de

oplosbaarheid. De kans op een oplosbare puzzel is bij de minikubus $^1/_3$ en bij de kubus met teken $^1/_{48}$.

Het verband tussen de theorie van de permutatie en de oplosbaarheid van puzzels ligt dus in het begrip pariteit. Met de formules die wij opgesteld hebben voor de pariteit kan worden aangegeven of een puzzel oplosbaar is. We hebben formules voor de schuifpuzzel, van willekeurige grootte en in willekeurige dimensie, en voor de Rubiks kubus, 2 bij 2 bij 2, 3 bij 3 bij 3 en met een tekening er op. We hebben ook de verschillende kansen op een oplosbare situatie berekend. Dit alles hebben we gedaan met behulp van experimenteren, theorie en de geweldige hulp van onze begeleider, Gunther Cornelissen.

Reflectie en suggesties voor vervolgonderzoek

Het doel van dit onderzoek was de (on)oplosbaarheid van verschillende soorten (schuif)puzzels te onderzoeken om hier een wiskundige beschrijving van te geven. Dit hebben wij gedaan in de vorm van formules voor pariteit van een puzzel, omdat dat een belangrijke eigenschap bleek te zijn. De formule voor schuifpuzzels was nog (deels) van de literatuur afgeleid, maar de formule voor de Rubiks kubus hebben wij geheel zelf bepaald na verschillende experimenten.
Het probleem hierbij bleef in alle gevallen wel dat pariteit een definitie is, die je in zekere mate willekeurig kunt kiezen. Zo bleek het voor onze definitie nodig een essentiële rekenregel te veranderen in '1 + 1 = 1'. Maar het is in de wiskunde natuurlijk niet de bedoeling dat je regels verandert zodat ze voor jouw theorie beter uitkomen, zodat we vermoeden dat we dit probleem beter hadden kunnen oplossen.

Door dit onderzoek wilden wij een zo eenvoudig mogelijke voorstelling van zaken geven over de (on)oplosbaarheid van schuifpuzzels. In onze ogen is dit vrij goed gelukt. De formules die wij geformuleerd hebben, zijn zo duidelijk mogelijk uitgelegd en makkelijk te hanteren. Met onze formule voor de Rubiks kubus, die we nergens anders in de theorie terugvonden, hebben wij misschien zelfs een nieuwe bijdrage geleverd wat betreft de pariteit van Rubiks kubussen.
Onze motivatie is gedurende het hele onderzoek onverminderd gebleven, als hij niet toegenomen is. Met het toenemen van het begrip, werd ook de belangstelling voor de puzzels groter, zodat we deze thesis met veel enthousiasme en plezier geschreven hebben. Dit had er deels mee te maken dat hoe meer wij vonden, hoe meer er nog te ontdekken bleek zodat onze interesse voortdurend gevoed werd met nieuwe theorieën.

Zoals wij merkten bij het schrijven van deze thesis, is er nog veel meer te onderzoeken aan puzzels dan wij helaas door tijdgebrek konden doen. Enkele suggesties voor vervolgonderzoek zijn:

1. Andere soorten van de Rubiks kubus bekijken, zoals de 'Rubik's Revenge' (de 4 bij 4 bij 4 Rubiks kubus), of de 'Professor's Cube', (de 5 bij 5 bij 5 Rubiks kubus). Andere wellicht interessante puzzels zijn de tonvormige of piramidevormige Rubiks kubussen. Hoe bepaal je de pariteit van zo'n puzzel, wat zijn de verschillen met de standaard Rubiks kubus?
2. Het blijkt dat eigenschappen van een schuifpuzzel zoals zijn oplosbaarheid te maken hebben met de graaf die je van die schuifpuzzel kunt maken. De graaf van de 14- 15 puzzel is een vier bij vier graaf die bipartiet genoemd wordt. Hoe werkt dit? En hoe kan de pariteit bepaald worden als de graaf niet bipartiet is?
3. We hebben nu wel gekeken naar oplosbare en niet-oplosbare puzzels, maar weten nog niet hoe je op de meest efficiënte manier een puzzel op kunt lossen! Wat is bijvoorbeeld de kortste weg van een bepaalde beginpositie van een schuifpuzzel naar de eindpositie? Het bleek dat dit een zogenaamd 'NP compleet' probleem is, wat het voor scholieren erg lastig maakt hier een oplossing voor te vinden. Anders gezegd, een grote uitdaging voor een andere keer.
4. In dit onderzoek zijn verschillende puzzels voorbijgekomen die allemaal anders in elkaar zaten. Maar welke puzzel is nu moeilijker dan de andere? Dat hangt van

een aantal dingen af, en een objectieve standaard voor moeilijkheid is er niet, maar hier een hypothese over opstellen, of een functie voor bepalen, is een interessant idee.

Begrippenlijst

14-15 puzzel. Dit is een schuifpuzzel van 4 bij 4 vakjes, die op de volgende manier genummerd zijn:

0	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	5	6	7	8
3	9	10	11	12
4	13	15	14	16

Hierbij is het vakje 16 (rechtsonder, oranje gekleurd) het lege vakje. Boven de puzzel staan de x en y coördinaten. Vakje 7 heeft als coördinaten dus (3,2)

2-cykel, 3-cykel… Een cykel met zoveel getallen binnen de haakjes. Een cykel met x getallen binnen de haakjes wordt dus een x-cykel.

Associatief. Dit wil zeggen dat $(\alpha * \beta) * \gamma = \alpha * (\beta * \gamma)$ waarbij de Griekse letters staan voor getallen, of voor permutaties. Er wordt mee bedoeld dat het niet uitmaakt in welke volgorde de berekening uitgevoerd wordt.

Commuterend. Dit wil zeggen dat het niet uitmaakt in welke volgorde je twee permutaties uitvoert. Cykels (zie cykel-notatie) zijn bijvoorbeeld commuterend als iedere cykel geen elementen uit een andere cykel bevat.

Cykel-notatie. Een manier om een permutatie op te schrijven. Je schrijft de vakjes die je met elkaar omwisselt op, met haakjes eromheen. Dit wil zeggen dat het *eerste* getal dat genoemd wordt, naar de plek gaat van het *tweede* getal dat genoemd wordt. Het *tweede* getal gaat dan naar de plek van het *derde* getal dat genoemd wordt, enzovoort. Het *laatste* getal dat genoemd wordt, gaat naar de plek van het *eerste* getal.
Als je een cykel wil opschrijven, is het eerste getal dat je opschrijft het laagste getal dat naar een echt nieuwe plek verwezen wordt. Het volgende getal dat je opschrijft is dan het getal op de plek waar het eerste getal naartoe moet. Dus als *1* naar de plek van *6* moet, ziet het begin van de cykel er zo uit: (1 6). Het derde getal is dan weer het getal op de plek waar het tweede getal heen moet. Het laatste getal is het getal dat naar de plek van het eerste getal toe moet.

Element. Iets, vaak beschreven als zijnde onderdeel van een verzameling of groep. Bijvoorbeeld een getal, maar ook een permutatie.

Groep. Een verzameling elementen die voldoen aan bepaalde eisen, zie pagina 6.

Hoekkubusje. Bij de Rubiks kubus zijn dit de kubusjes die op de hoeken van de grotere kubus zitten. Er zijn er acht van. Zij zitten vast aan drie vlakken en tonen dan ook 3 kleuren.

Identiteit. Een bepaalde permutatie ε die, als hij uitgevoerd wordt, geen enkel element in een verzameling van plaats doet veranderen.

Inverse. Het omgekeerde van een bepaalde actie, die die actie ongedaan maakt (opheft). Als α een bepaalde actie is, wordt zijn inverse beschreven als α^{-1}.

Invariant. Een eigenschap van een object, die niet verandert als je het object verandert. Het object is in ons geval de Rubiks kubus en de invariant is de oplossingsformule, want de uitkomst daarvan blijft bij legale zetten altijd nul.

Legale zet (schuifpuzzel). Elke zet die is toegestaan in een schuifpuzzel. Een zet is toegestaan als je een vakje dat naast of boven het lege vakje ligt, verwisselt met dat vakje. In de 14-15 puzzel (zie aldaar) zijn de 2 mogelijke, legale zetten dus '12 omwisselen met 16' en '14 omwisselen met 16'.

Legale zet (Rubiks kubus). Het draaien van 1 vlak van de Rubiks kubus met de klok mee, of tegen de klok in. Hierbij mogen geen kubussen loskomen.

Middenkubusje. Bij de Rubiks kubus zijn dit de kubusjes die in het midden van elk vlak (van 3 bij 3 kubusjes) zitten. Er zijn er 6 van, die elk een andere kleur tonen. Zij kunnen niet van plaats veranderen, wel kunnen zij op hun plek draaien.

Minikubus. (Ook wel Pocket cube). Een variant op de Rubiks kubus, die echter bestaat uit 2 bij 2 bij 2 kubusjes. De Minikubus kan bekeken worden als bestaande uit de hoeken van de Rubiks kubus.

Modulo (x). Een bepaalde beperking die opgelegd wordt aan het aantal gebruikte cijfers. Een Moldulo x groep bestaat uit x getallen, waarbij 0 als eerste getal geldt. Het laatste getal is dus x-1. Als een waarde p boven de maximumwaarde x uitstijgt, deel je p door zoveel mogelijk 'hele' keren door x, en neem je dan de rest als waarde. Voor verdere uitleg en een voorbeeld zie pagina 10.

Paarverwisseling. Het verwisselen van twee elementen in een groep. Kan beschreven worden met een 2-cykel. NB. Ook wel transpositie genoemd.

Pariteit. Het even of oneven zijn van (onder andere) een permutatie, vakjes in de schuifpuzzel of de Rubiks kubus. Wordt weergegeven als 0 (even) en 1 (oneven) of als 1 (even) en -1 (oneven). Zie ook teken.

Permutatie. Een verwisseling van elementen in een verzameling. Elk element in de verzameling krijgt een nieuwe plaats toegewezen. Let op: dit kan ook dezelfde plaats zijn! Permutaties kun je opschrijven met behulp van cykel-notatie. (zie aldaar)

Peter's Black hole. Een driedimensionale, kubusvormige schuifpuzzel met zijdes van 3 kubussen. Elke afzonderlijke kubus binnenin de puzzel heeft een uniek patroon van

sterren op de zijkant staan. Het doel is zo snel mogelijk alle kanten ‘zwart’ te laten worden.

Polynoom Een eindige som van monomen. Een monoom is een uitdrukking bestaande uit een getal vermenigvuldigd met een product van (eventueel meerdere) variabelen, die door letters worden aangegeven. Bijvoorbeeld $4x^2 + 5y$.

Ribkubusje. In de Rubiks kubus zijn dit de kleine kubusjes die in het midden tussen twee hoeken inzitten. Er zijn er twaalf van. Zij zitten aan twee vlakken vast en tonen dan ook twee kleuren.

Rubiks kubus. Een driedimensionale puzzel bestaande uit 3 bij 3 bij 3 kubusjes. Het doel is elke kant egaal van kleur te maken. Zie hoofdstuk ‘Rubiks kubus.’

Schuifpuzzel. Een puzzel met 2 zijdes van *m* en *n* lengte. Het aantal vakjes is gelijk aan *m* * *n*. Er is één leeg vakje: dit kan men gebruiken om een vakje dat horizontaal of verticaal naast het lege vakje ligt te verplaatsen. Deze twee vakjes (1 vol en 1 ‘leeg’) wisselen dan van plaats. De 14-15 puzzel is hier een speciale schuifpuzzel. Er zijn ook driedimensionale schuifpuzzels, met zijden van m, n en o lengte. Deze hebben m * n * o vakjes. Een voorbeeld hiervan is Peters Black Hole. (zie aldaar)

Sudokukubus. Een variant van de Rubiks kubus waarbij de bedoeling is dat op elke kant de getallen 1 t/m 9 komen te staan (op volgorde), net zoals bij de originele sudoku’s. Zie ook pagina 45

Teken. Het teken van een permutatie, die zegt of die permutatie even of oneven is. Dit wordt weergegeven met + (even) en – (oneven). Het teken wordt berekend met behulp van een polynoom, voor de volledige berekening en uitleg zie pag. 12.

Transpositie. Een verwisseling van twee elementen in een verzameling, ook wel 2-cykel. In een schuifpuzzel komt dit neer op de verwisseling van twee vakjes. NB. Ook wel paarverwisseling genoemd.

Bronnenlijst

Internetsites
http://home.hetnet.nl/~rubik/kubus.htm, een computerversie van de Rubiks kubus
http://www.ai.univ-paris8.fr/~bh/cube/, een pagina met algoritmes voor de Rubiks kubus
http://www.ws.binghamton.edu/fridrich/Mike/permute.html, een pagina met algoritmes voor de Rubiks kubus

Boeken
Armstrong M.A. (1987). *Groups and symmetry.* Springer, Undergraduate Texts in Mathematics, p. 26-31

Artikelen
Waalewijn W. (2003). *Schuifpuzzels.* NAW 5/4 nr. 3, p. 240-241
Van der Kallen W. (?). *Rubik's Kubus, Invarianten en bijna commuteren.* p. 1-8

Logboeken

Logboek Bruno van Albada

Datum + tijd	Wat gedaan/is er gebeurd?	Resultaat
dinsdag 19 september 9.00 – 12.15	Inleiding op de thesis door Ton. Groep gevormd met Brigitte en Valentijn, informatie opgezocht en de begeleider (Gunther Cornelissen) bezocht. Naar de universiteitsbibliotheek	Onderwerp voor de thesis Contact met de begeleider Boekje over de Rubik's kubus Formulier 1
woensdag 20 september 17.30 – 1800 20.00 – 2200	Gemaild met Gunther, Valentijn en Brigitte Zelf wat geprobeerd voor de schuifpuzzel adhv suggesties van Gunther	Aanpassingen van Formulier 1 Een paar ideeën gekregen over de schuifpuzzel
Vrijdag 22 september 20.00 – 21.30	Mailen met groepsleden, nog langer kijken naar de puzzel	Hypotheses over waarom de puzzel niet kan opgesteld en rondgemaild
Zondag 24 september tot zondag 1 oktober Ong. 3 uur totaal	Nog meer ideeën opdoen en rondmailen, afspraak gemaakt met ajo. (Vincent vd Noort)	Tot een hypothese gekomen, afspraak met ajo Vincent.
maandag 2 oktober 9.00 – 12.45	Met Vincent v/d Noort gesproken over theorie	Veel gehad over notatiemethoden, veel kennis over wiskundige achtergrond opgedaan
dinsdag 3 oktober 12.30- 12.45	Formulier I opgestuurd	Formulier I ingeleverd
zondag 8 oktober 10.00 – 14.00	Mailen met groepsleden, Poging tot het zelf maken van een 14-15 puzzel uit hout.	Afspraak met Gunther, conclusie dat zelf een schuifpuzzel maken niet meevalt.
Maandag 9 oktober 9:00-12.15	Puzzel bestudeerd met oog op nieuwe theoretische kennis, gesprek met JCU begeleider (Philip van Egmond), mailcontact met UU begeleider	Begin van een bewijs Afspraak met UU begeleider van die middag verzet naar 16 oktober vanwege symposium
maandag 16 oktober 9.00 –12.45	Gepraat met JCU en UU begeleider, gewerkt aan Formulier 2	Nieuwe theoretische kennis, Formulier 2
Woensdag 18 oktober 19.30 – 20.00	Contact met groepsleden over aanpassingen aan Formulier 2 na suggesties Gunther Gemaild over een afspraak met de UU begeleider	Nieuw formulier 2 Afspraak met Uu begeleider op 6 november om ongeveer 2 uur
Maandag 30 oktober tot zondag 5 november	Mailcontact met groepsleden over geschreven stuk theorie	Hoofdstuk theorie en commentaar hierop, afspraak

Ongeveer 2 uur	en de afspraak met de UU begeleider	met de UU begeleider verzet naar half 2, zelfde dag.
maandag 6 november 11.15 – 12.15 13.30 – 15.30 15.30-16.30	Hoofdstuk theorie doorgesproken en gewijzigd adhv commentaar Afspraak met beide begeleiders, gepraat over de voortgang en over theorie Gepraat over een bewijs met groepsleden	Gewijzigd hoofdstuk theorie Opdracht voor volgende keer: vind een bewijs voor de 2 *2 puzzel, of kijk hoever je komt en leg dit volgende week uit. Opzet voor een bewijs
Maandag 13 november 13.15 – 16.30	Uitwerking van het bewijs voor de 14-15 puzzel, gekeken naar Peter's Black Hole. Hierop het bewijs aangepast.	Een bewijs voor de 14-15 puzzel in x dimensies (!) Een tevreden gevoel
Dinsdag 14 november 13.15 – 16.30	Afspraak met UU begeleider Bewijs uitgelegd, commentaar en suggesties ontvangen, gewerkt aan 'nieuwe uitdagingen'	Mogelijke nieuwe onderzoeksvragen
Maandag 20 november 9.00 – 12.15 13.15 – 16.30	Zelf gewerkt aan de thesis met groepsleden	Nieuw stuk over Rubik's kubus en bewijzen opgeschreven
Maandag 27 november 9.00 – 12.15 13.15 – 16.30	Gewerkt aan de thesis met groepsleden. Opnieuw schrijven stuk van vorige week, omdat het kwijt is.	Opnieuw schrijven van stuk. Huidige stukken 'opgemaakt' met wiskundige notatie
Dinsdag 28 november 15.00 – 16.30	Gewerkt aan theorie Rubiks kubus.	Betere ideeën over pariteit etc. van Rubiks kubus
Maandag 4 december 9.00 – 12.15	Wederom gewerkt aan theorie Rubiks kubus	Stuk over pariteit van de hoek – en rib-kubussen
Maandag 11 december 9.00 – 12.15	Afspraak met begeleider (was er niet), stukken over Rubik's kubus verbeterd, 2*2*2 kubus behandeld	Stuk over 2*2*2 kubus, verbeterde stukken over de pariteit van de kubusjes, alle 'even' posities bereikbaar?
Woensdag 13 december Ongeveer 1 uur totaal	Gewerkt aan begrippenlijst en gecontoleerd of bepaalde posities op de kubus wel/niet konden	Tabel met wel/niet standen compleet ingevuld, begrippenlijst 'geupdate'
Donderdag 14 december 16.00 – 18.00	Gewerkt aan stukken over Rubiks kubus	Vordering gemaakt bij stukken over Rubiks kubus
Zaterdag 16 december 16.00 – 18.00	Gewerkt aan stukken over Rubik's kubus. Concept verslag van commentaar voorzien.	Commentaar op concept verslag, stukken over Rubiks kubus af.
Zondag 17 december 20.30 – 22.00	Gewerkt aan begrippenlijst, mailcontact met groepsleden over het verslag	Begrippenlijst af.
Maandag 18 december	Afspraak met begeleiders,	Nieuwe afspraak met

9.00 – 12.45	gepraat over het (concept) verslag, verbeteringen besproken. Begrippenlijst verder uitgebreid.	begeleiders op 15 januari om 3 uur, uitgebreidere begrippenlijst. Samenvatting (gedaan door Brigitte en Valentijn) Commentaar op stuk over Rubiks kubus
Dinsdag 19 december 9.00 – 12.15	Gewerkt aan opzet presentatie, algoritme verzonnen voor het draaien van 2 ribkubusjes	
Donderdag 5 januari 13.00 – 14.00	Controleren van algoritme voor draaien van 2 ribkubusjes	Conclusie: het algoritme klopt.
Zondag 7 januari 22.15 – 22.45	Commentaar geschreven op stuk over bereikbaarheid even situaties Rubiks kubus	Commentaar op het stuk van Valentijn en Brigitte
Maandag 8 januari 9.00 – 12.15	Met groepsleden commentaar van begeleiders verwerkt, taken voor de presentatie verdeeld	Verdeling presentatie, verbeterd verslag.
Vrijdag 12 januari 15.30 – 17.30	Gewerkt aan mijn deel van de presentatie	Mijn deel van de presentatie
Zondag 14 januari 15.30 – 19.00	Commentaar geschreven op thesis ‘dimensies’	Commentaar op de thesis dimensies, online gezet
Maandag 15 januari 9.00 – 10.30	Thesis elkaar presentatie proefgelezen, dingen gewijzigd.	Verbeterde ppt.
Maandag 15 januari 15.00 – 16.30	Afspraak met UU begeleider, gepraat over de presentatie en over het verslag	Tips over wat wel/niet vertellen bij de presentatie
Vrijdag 19 januari 20.30 – 23.00	Gewerkt aan taken in het verslag.	Stukje dat een schuifpuzzel beschrijft, terminologie verbeterd.
Zaterdag 20 januari 8.30 – 11.00	Gewerkt aan de verbetering van de terminologie in het hoofdstuk Rubiks kubus. Sheet ‘vervolgonderzoek’ gemaakt.	Verbeterd stuk. Naar Valentijn gestuurd. Sheet vervolgonderzoek

Totaal t/m 20 januari: 79.5 uur

Logboek Valentijn Karemaker

Datum en tijd	*Activiteit*	*Resultaat*
di 19-9: 9.00 – 12.15	Inleiding door Ton v/d Valk Informatie zoeken op internet Contact opnemen met dhr. Cornelissen (UU-begeleider), onderzoeksopzet besproken Naar de wiskundebibliotheek	Bruikbare informatie Eerste onderzoeksvoorstel ‘Notes on Rubik’s Cube’
di 19-9: 13.00 – 14.00	Naar gemeentebibliotheek	‘De Hongaarse kubus’ ‘ “ “ “ draait door’
wo 19-9: 10.30 – 14.45	Mailcontact begeleider Mailcontact groepsleden Schuifpuzzel onderzocht (zelf uitproberen)	Eerste opzet formulier I Formulier I etc. besproken Eerste ideeën gehad en sommige verworpen
do 20-9: 11.05 – 11.20	Mailcontact groepsleden Mailcontact begeleider	Ideeën+formulier besproken Formulier I gewijzigd
zo 1-10: 13.15-13.45	Schuifpuzzel onderzocht Mailcontact groepsleden over ideeën	Soort hypothese opgesteld
ma 2-10: 9.00- 12.45 en 18.30- 19.15	Met Vincent v/d Noort gesproken over theorie	Grondige theoretische achtergrond, ‘zoekmethoden’
di 3-10: 12.30- 12.45	Formulier I opgestuurd	Formulier I ingeleverd
zo 8-10: 13.00-13.15	Mailcontact groepsleden en JCU-begeleider	Afspraak met JCUbegeleider
zo 8-10: 15.30-16.15	Materiaal groepen, permutaties en invarianten bestudeerd	
ma 9-10 9:00-12.15	Puzzel bestudeerd a.d.h.v. theorie Vincent v.d. Noort, gesprek JCU-begeleider, afspraak met UU-begeleider verzet	Eerste opzet bewijs Voortgang besproken Afspraak naar 16-10 (10.00)
ma 16-10 9.00 –12.45	Afspraak voorbesproken met groepsleden, afspraak met begeleiders, resultaten tot nu toe, formulier I en theorie besproken, nieuwe theorie ontvangen, formulier II gemaakt en naar begeleiders opgestuurd	Nieuwe theorie, Formulier II ingeleverd

za 28-10 9.45-12.15	Theorie bestudeerd en samengevat, mailcontact met groepsleden	Samenvatting theorie
ma 30-10 10.45-12.15	Stuk theorie geschreven en opgestuurd naar groepje.	Stuk theorie (versie 1)
zo 5-11 13.00-13.30	Mailcontact met Brigitte Stuk theorie aangepast Afspraak begeleider verzet	Stuk theorie (versie 2) Afspraak naar 6-10 (13.30)
ma 6-11 11.15- 12.30	Stuk theorie doorgesproken en gewijzigd samen met groepsleden	Stuk theorie (versie 3)
ma 6-11 13.30- 15.30	Afspraak met begeleiders, voortgang besproken, stuk theorie besproken	'Opdracht' voor volgende keer gekregen
zo 12-11 14.30- 18.30	Theorie bestudeerd, bewijs 2x2-puzzel en 2x3-puzzel genoteerd, begin van bewijs 14-15puzzel genoteerd, permutatienotaties in twee dimensies bestudeerd	Uitwerking van de 'opdracht'
ma 13-11 13.15- 16.30	Met groepsleden uitwerking besproken en aangepast, Peter's Black Hole onderzocht en begin van bewijs genoteerd, Permutatie in twee dimensies bestudeerd	Uitwerking bijgewerkt
ma 13-11 17.15- 17.45	Presentatie begeleider op internet over grafen gelezen	
di 14-11 13.15-16.30	Afspraak UU-begeleider, stuk theorie doorgesproken, bewijs uitgelegd+aangepast, voortgang besproken, nieuwe afspraken gemaakt, met groepsleden verder onderzoek gedaan	
wo 15-11 17.00-17.15	Mailcontact JCU-begeleider, mailcontact groepsleden, mailcontact UU-begeleider	Logboek doorgestuurd, nieuwe versie 'theorie', bronnen voor onderzoek
do 16-11 16.30-17.00	Artikel Rubiks Kubus gelezen, moeilijkheid Rubiks Kubus onderzocht	
za 18-11 13.15-14.45	Artikel grafen gelezen, algoritme onderzocht,	

	NP-compleet onderzocht, mailcontact groepsleden, permutaties Rubiks Kubus onderzocht	
ma 20-11 9.00-16.30	Bewijzen opgeschreven, begeleider om hulp gemaild, Rubiks kubus onderzocht	Bewijzen bijna af
di 21-11 7.15-7.45	Bruno's stukken over de Rubiks kubus en de begrippenlijst becommentarieerd, begeleider geantwoord, mailcontact met Brigitte en Bruno	Gewijzigde stukken Bruno
vr 24-11 8.00- 9.30	Bewijs even schuifpuzzels geschreven (een groot deel), naar Brigitte opgestuurd	Groot deel van bewijs even schuifpuzzels
vr 24-11 14.00-14.30	Bewijs even schuifpuzzels afgemaakt, naar Brigitte opgestuurd	Versie 1 van bewijs even schuifpuzzels
zo 26-11 9.15-9.45	Commentaar Brigitte ontvangen en verwerkt, naar haar opgestuurd, mailcontact met UU begeleider	Versie 2 van bewijs even schuifpuzzels
ma 27-11 9.00-15.30	Verloren document zoeken, bewijs herschrijven en uitbreiden, Rubiks kubus onderzocht, elkaars stukken gelezen en beoordeeld, mailcontact met Gunther, kort overleg met Philip	Bewijs opgestuud naar Gunther
di 28-11 15.00-16.30	Eerste opzet verslag, aan hoofdstukken gewerkt	Eerste opzet verslag
do 30-11 19.30-20.15	Stuk Bruno beoordeeld, mailcontact met groepsleden	Nieuwe versie Bruno's stuk
vr 1-12 14.30-15.30	Rubiks kubus onderzocht	Nieuwe ideeën, verworpen
ma 4-12 9.00-12.15	Rubiks kubus onderzocht, mailcontact met Gunther	Afspraak op 11 december
do en vr, in totaal ca. 15 min.	Mailcontact met Brigitte	Ideeën uitgewisseld
za 9-12 11.00-13.00	Brigittes stuk bekeken, wijzigingen gemaakt en doorgemaild, oplossingsschema's gemaakt en nieuwe ideeën	Nieuwe versie stuk 'pariteit van de Rubiks kubus'

	bedacht en naar Brigitte gemaild	
zo 10-12 verschillende momenten, ongeveer 1,5 uur in totaal	Mailcontact met Brigitte, stuk gewijzigd, aangevuld, geprint&naar Bruno gemaild, mailcontact met Philip	Nieuwe versie stuk 'pariteit van de Rubiks kubus'
ma 11-12 9.00-12.30	Met Brigitte overlegd, voortgangsgeprek met Philip, onderzoek naar varianten op de Rubiks kubus, taakverdeling voor verslag, mailcontact met Gunther	Nieuwe afspraak met Gunther, resultaten onderzoek, taakverdeling voor 't verslag
wo 13-12 16.00-17.30	Inleiding verslag schrijven, reflectie en suggesties voor follow-up verslag schrijven, 'varianten van de Rubiks kubus' schrijven, beginnen aan 'even standen van de Rubiks kubus', stukken naar Brigitte en Bruno opsturen	Eerste versie 'inleiding', 'reflectie en suggesties voor follow-up', 'varianten van de Rubiks kubus' en 'even standen van de Rubiks kubus'.
do 14-12 13.30 – 15.15	Afbeeldingen verslag maken, bronnenlijst maken, bewijs 'even standen van de Rubiks kubus' aangevuld, stuk 'varianten van de Rubiks kubus' aangepast aan Brigittes commentaar, mailcontact met Gunther, stukken naar B&B gestuurd	Afbeeldingen verslag, Bronnenlijst versie 1, 'even standen van de Rubiks kubus' versie 2, 'varianten van de Rubiks kubus' versie 2
vr 15-12 7.15-7.45	Brigittes stukken gelezen en commentaar teruggestuurd, mailcontact met Brigitte	Bijgewerkte stukken voor verslag
za 16-12 13.00-14.15	Brigittes stukken gelezen en commentaar teruggestuurd, commentaar van Brigitte op mijn stukken verwerkt, met Brigitte overlegd over opmaak en planning etc.	Bijgewerkte stukken voor verslag
zo 17-12 10.45-11.00, 13.30-13.45, 17.45-18.00, 18.30-19.15	Mailcontact met Bruno en Brigitte, nieuwe versie verslag gelezen en commentaar naar Brigitte gestuurd,	Versie 3 van het conceptverslag

	commentaar van Brigitte ontvangen en verwerkt, mailcontact met Bruno	
ma 18-12 7.30-7.45, 9.00-12.45, 19.45-20.00	Mailcontact met Brigitte en Philip, afspraak met Gunther en Philip, stukken doorgesproken en nieuwe afspraak gemaakt (15-1), conceptverslag afgemaakt en ingeleverd, mailcontact met Brigitte	Conceptverslag ingeleverd, nieuwe afspraak (15-1),
Tussen 18-12 en 30-12, ongeveer 0.5 uur	Mailcontact met Brigitte, overleg over thesisverslag en beoordeling van anderen	
za 30-12 10.45-12.30	Commentaar van Gunther ontvangen en verwerkt, mailcontact met Brigitte, commentaar op Brigittes stukken geschreven	Nieuwe versie verslag
zo 31-12 8.45-9.00	Mailcontact met Gunther, mailcontact met Brigitte	
ma 1-1 14.15-15.30, 15.45 – 16.00,17.45-18.00	Mailcontact met Brigitte, mailcontact met Philip, mailcontact met Bruno, verslag anderen gelezen en commentaar opgeschreven, even situaties Rubiks kubus onderzocht	Commentaar thesisverslag Anne-Lotte, Roderik en Jesse, afspraken met Brigitte en Bruno, nieuwe inzichten Rubiks kubus
di 2-1 10.30-10.45, 17.30-19.30, 20.30-21.00	Mailcontact met Brigitte en Philip, even situaties Rubiks kubus onderzocht, Bellen met Brigitte	Toevoegingen voor verslag over even situaties Rubiks kubus, nieuwe ideeën voor bewijs.
wo 3-1 10.00-11.30	Mailcontact met Philip, commentaar ontvangen, even situaties onderzocht, stuk herschreven, mailcontact met Brigitte, stuk opgestuurd	Nieuwe versie ‘even situaties Rubiks kubus’, commentaar voor het verslag
do 4-1 9.25-11.10, 13.15-13.30, 21.00-21.30	Mailcontact met Brigitte, stuk herschreven en uitgebreid, naar Brigitte opgestuurd, mailcontact met Brigitte, stuk gecorrigeerd	Nieuwe versie ‘even situaties Rubiks kubus’

za 6-1 verspreid over de dag ongeveer 15 minuten	Mailcontact met Brigitte, mailcontact met Bruno	'Even situaties Rubiks kubus' naar Bruno opgestuurd
zo 7-1 9.15-10.30	Commentaar andere thesis geschreven, naar Brigitte opgestuurd	Commentaar thesis andere groepje af
ma 8-1 9.00-12.15	Commentaar Philip verwerkt, stuk even situaties aangepast, samenvatting geschreven, opzet presentatie gemaakt	Nieuwe versie verslag, samenvatting voor symposium, opzet presentatie
di 9-1 13.00-13.15, 21.40-21.55	Overlegd met Philip, mailcontact met Brigitte en Bruno	
do 11-1 21.00-21.15	Mailcontact met Brigitte en Bruno over presentatie	Nieuwe opzet (bestand verloren)
zo 14-1 11.45-12.30, 14.00-16.15, 18.15-18.40	Werken aan presentatie, mailcontact met Brigitte, haar stukken nagekeken, stukken samengevoegd, mailcontact met Bruno, afspraak met Gunther voorbereid	Eerste opzet presentatie
ma 15-1 9.00-10.45, 15.00-16.30	Thesisverslag verbeterd, aan de presentatie gewerkt, samenvatting afgemaakt, afspraak met Gunther, presentatie en verslag besproken	Samenvatting ingestuurd, nieuwe versie presentatie, bijgewerkt verslag
di 16-1 12.30-12.45	Met Bruno aan presentatie gewerkt	Achtergrond voor presentatie
wo 17-1 14.15-14.30	Mailcontact met Brigitte, mailcontact met Simon, commentaar op onze thesis bekeken	
do 18-1 7.15-7.30, 16.15-16.30, 19.15-19.30	Mailcontact met Brigitte en Bruno over commentaar verslag en presentatie	Afspraken en planning
vr 19-1 15.30-17.45	Samenvatting herschreven, mailcontact met Brigitte en Bruno, verslag gecontroleerd en verbeterd	Nieuwe versie verslag, nieuwe samenvatting
za 20-1 9.00-12.30 14.30-15.30	Verslag afgemaakt en geprint, mailcontact met Brigitte en Bruno,	Verslag af, Nieuwe versie presentatie

	presentatie voorbereid	
zo 21-1: verspreid over de dag ongeveer 3 uur	Presentatie voorbereiden	
ma 22-1 13.15-16.30	Oefenen thesispresentaties	
di 23-1 13.00-17.30	Laatste voorbereidingen en thesissymposium	

Totaal: 122 uur

Logboek Brigitte Sprenger

datum	tijdstip	tijd (min)	tijd	activiteit
di 5 sept	19.00-19.15	15	15 min	gemaild met Valentijn over onderwerp keuze thesis -> ik ga samen met Valentijn de 14-15 puzzel doen
woe 6 sept	9.00-9.30	30	30 min	gemaild met Valentijn en Barbara over onderwerp en groepje -> we hebben nog een derde persoon nodig
di 19 sept	9.00-10.00	60	1 uur	inleiding op Thesis door Ton, groepsvorming -> Bruno komt bij ons groepje
di 19 sept	10.00-12.15	135	2.15 uur	emails gestuurd naar begeleiders, naar meneer Cornelissen en de bibliotheek -> boeken gevonden op internet en in de bibliotheek, formulier wordt ingevuld
woe 20 sept	12.30-13.30	60	1 uur	e-mails lezen en sturen, met commentaar op formulier 1 en over afspraken veel gepuzzeld en geprobeerd zinnige conclusies te kunnen trekken uit wat ik zag
ma 2 okt	9.00-12.15	195	3.15 uur	naar Vincent, hij heeft van alles uitgelegt over permutaties en groepen en wat oefeningen gegeven
di 3 okt	12.15-12.30	15	15 min	nog enkele wijzigingen op formulier 1 gemaild naar de begeleiders
ma 9 okt	9.00-12.00	180	3 uur	op het JCU gewerkt aan de problemen van Vincent over permutaties -> we liepen tegen een paar problemen op
ma 16 okt	9.00-12.00	180	3 uur	eerst een afspraak met Gunter, formulier 2 gemaakt -> een deel van de problemen is nu opgelost, een stuk tekst over permutaties -> zelf ook over schrijven.
woe 25 okt		120	2 uur	nagedacht over peter's black hole, geprobeert snelle(re) oplossingen te vinden -> ik heb nu wel wat ideeen over snelle oplossingen, dit zijn een soort trucjes
do 26 okt	14.00-15.00	60	1 uur	hoofdstuk permutaties gelezen, vragen gemaild naar Valentijn, antwoorden teruggekregen, verder/opnieuw gelezen
za 28 okt	13.30-14.30	60	1 uur	verder gelezen -> ik begrijp het nu vrijwel helemaal
zo 5 nov	10.30-12.00	90	1.30 uur	het hoofdstuk permutaties van Valentijn goed gelezen en van veel commentaar voorzien, daarna gemaild
	13.30-16.50	20	20 min	mailtje van Valentijn teruggekregen, gelezen en weer terug gemaild
ma 6 nov	11.15-12.30	75	1.15 uur	wijzigingen aangebracht in het hoofdstuk permutaties
	13.30-15.15	105	1.45 uur	afspraak met Gunter, daarna geprobeerd een bewijs te vinden voor de 2 bij 2 puzzel
ma 13 nov	13.15-16.30	195	3.15 uur	bewijs uitgedacht en opgeschreven van 2x2 behoud van pariteit en 14-15puzzel, en meerdere dimensies
di 14 nov	13.15-16.30	195	3.15 uur	afspraak met Gunter, bewijs verteld en verdere problemen ontdekt en besproken, daarna nagedacht over nieuwe

				problemen
woe 15 nov	7.30-9.00	90	1.30 uur	nagedacht over peter's black hole, 3 blokjes wisselen, 5 blokjes wisselen, ook nagedacht over rubiks verwisselingen en verbeteren hdst permutaties
	12.15-13.25	70	1.10 uur	gemaild over kubus en ontwikkelingen, verder getypt
	18.45-19.20	35	35 min	nieuwe verbeteringen in het hoofdstuk getypt, nog wat gemaild
do 16 nov	12.30-13.10	40	40 min	rubix programma opgezocht en een aantal varianten uitgeprobeerd -> nieuwe hypothese/theorie geprobeerd te bedenken
	20.20-20.40	20	20 min	gemaild over mogelijke theorieën
ma 20 nov	9.00-16.30	420	7 uur	samen met Valentijn bewijzen uitgetypt, en sommige nog geformuleerd, gemaild naar Gunter
	19.00-20.00	60	1 uur	Bruno's stuk over rubik's kubus gelezen, van commentaar voorzien en doorgemaild
	20.40-21.00	20	20 min	mail van Gunter gelezen, er over nagedacht en nog wat naar Valentijn gemaild, zij heeft weer een nieuwe mail gestuurd
di 21 nov	19.30-20.00	30	30 min	Valentijns commentaar op Bruno's stuk gelezen, erover gemaild en weer verbeterd
woe 22 nov	7.45-8.05	20	20 min	Bruno's stukken over rubik's kubus en de begrippenlijst terug gemaild, na het commentaar nog even te bekijken
vrij 24 nov	21.30-22.30	60	60 min	het stuk dan Valentijn gemaild en gemaakt heeft, verbeterd en van commentaar voorzien
ma 27 nov	9.00-15.30	360	6 uur	een heel stuk overnieuw getypt, gemaild, elkaars stukken doorgelzen, naar rubik's kubus gekeken
di 28 nov	15.00-16.30	90	1.30 uur	alles samengevoegd, gekeken naar de algemene planning, verder met rubik's kubus
do 30 nov	16.30-17.30	60	1 uur	theorie rubik's kubus nog een keer veranderd/verbeterd
	20.30-21.30	60	1 uur	met/naar Valentijn gemaild over permutatie stuk en onze rubiks verbeteringen, ook Valentijns stukken gelezen
za 2 dec	16.00-17.30	90	1.30 uur	gezocht naar rubiks theorie m.b.v. programma van internet, ben nu bezig met een tabel
zo 3 dec	16.30-17.30	60	1 uur	de resultaten van de tabel geprobeerd te interpreteren en geprobeerd formules te maken
ma 4 dec	9.00-12.15	195	3.15 uur	gemaild met Gunter, gewerkt aan de rubiks kubus; tabel uitgebreidt en gezocht naar formule -> gevonden!
do 7 dec	16.00-17.30	90	1.30 uur	gemaild met Valentijn, een stuk geschreven over de oplosbaarheid van de rubiks kubus en de formules daarbij, ribkubus deel
	20.30-21.30	60	1 uur	weer gemaild met Valentijn en het deel over hoekkubusjes en het geheel getypt :)
za 9 dec	9.30-10.00	30	30 min	twee kubussen uitgeprobeerd, met 1 + 1 in het geheel, gemaild..
zo 10 dec	12.30-13.00	30	30 min	oplossing gevonden voor kansprobleem en 1,0,1,0-probleem!
	14.00-15.00	60	1 uur	hoofdstuk rubiks verbeterd mbv Valentijns commentaar en de nieuwe oplossingen
	16.45-18.30	45	45 min	weer verbeterd en Valentijns stukje gelezen en weer gemaild
	19.00-19.30	30	30 min	stuk over Rubiks kubus gelzen -> ik begreep er heel weinig van
ma 11	9.00-	240	4 uur	overleg met Valentijn, met Philip aantal praktische zaken

dec	13.00			besproken, bewijzen uitgedacht nieuwe formules, extra formules bedacht, taakverdeling gemaakt
woe 13 dec	19.00-20.00	60	1 uur	commentaar op Bruno's stuk samenvoegd en naar hem gestuurd, Valentijns stukjes gelezen en commentaar gestuurd
do 14 dec	16.45-17.30	45	45 min	voorkant gemaakt
	20.30-22.30	120	2 uur	voorkant verder gemaakt, hele verslag zo veel mogelijk in elkaar gepuzzeld, stuk over sudokukubus geschreven, naar Valentijn gemaild
vrij 15 dec	9.00-9.40	40	40 min	sudoku verbeterd aan de hand van Valentijns commentaar, commentaar gegeven op stukken van Valentijn en nieuwe onderdelen ingevoegd
	16.45-17.30	45	45 min	commentaar op de rest van Valentijns stukken gegeven, en foto van een kubus gemaakt
	19.00-20.00	60	1 uur	naar Valentijn gemaild, plaatjes ingevoegd, conclusie begonnen
	21.30-22.15	45	45 min	conclusie afgemaakt en naar Valentijn gemaild
za 16 dec	12.00-14.-00	120	2 uur	de foto bewerkt en in het verslag gezet, naar Valentijn gemaild, de opmaak bestudeerd, inhoudsopgave gemaakt en gemaild
zo 17 dec	11.00-12.00	60	1 uur	weer nieuw commentaar verwerkt en met Valentijn gemaild
	16.30-17.15	45	45 min	naar Valentijn gemaild, nog een stuk aangepast en twee versie gemaakt
	19.45-21.30	105	1.45 uur	weer commentaar op rubiks kubus, verwerkt en naar Gunther gemaild, naar/met de anderen gemaild, gunthers commentaar op eerder stuk gelezen en verwerkt
ma 18 dec	9.00-12.30	210	3.30 uur	afspraak met Gunther, bewijzen over schuifpuzzel besproken, rubiks kubus uitgelegd, opmaak verslag geperfectioneerd en verslag gemaild
	19.00-19.45	45	45 min	verslag in word helemaal vernieuwd -> was fout gegaan… :s
di 19 dec	9.00-12.00	180	3 uur	commentaar verwerkt, bewijs even situaties rubiks kubus bijna helemaal geschreven, stuk van Valentijn over pariteit gelezen,(geholpen) en wat commentaar gegeven
woe 27 dec	11.00-12.30	90	1.30 uur	de thesis van de anderen gelezen en commentaar gegeven
do 28 dec	9.20-10.30	70	1.10 uur	gewerkt aan het bewijs van de bereikbaarheid van de even situaties van de Rubiks kubus, ook een aantal algoritmes gecontroleerd en gemaild naar Valentijn
	11.00-12.30	90	1.30 uur	zie hierboven
zo 31 dec	9.00-9.30	30	30 min	met Valentijn gemaild
	16.00-17.40	100	1.40 uur	Valentijns verbeteringen weer bekeken en nog een keer gemaild en de Rubiks kubus verder verbeterd
woe 3 jan	13.30-15.15	105	1.45 uur	weer commentaar op even rubiks kubus van valentijn, een voorbeeld voor daarin geschreven en plaatjes daarvoor gemaakt, gemaild
	19.30-20.00	30	30 min	naar Valentijn gemaild en nagedacht over bewijs even groot aantal verwisselingen
do 4 jan	11.00-11.30	30	30 min	naar Valentijn gemaild en gelezen wat zij mailde
	13.00-14.15	75	1.15 uur	weer de even rubiks kubus bekeken en commentaar bijgezet en weer met Valentijn gemaild

vrij 5 jan	13.00-13.15	15	15 min	naar Valentijn gemaild en haar stuk nog even doorgekeken
za 6 jan	13.00-14.30	90	1.30 uur	andere thesis gelezen en commentaar gegeven
	16.00-17.30	90	1.30 uur	andere thesis gelezen en commentaar gegeven
	18.00-19.00	60	1 uur	andere thesis gelezen en commentaar gegeven
ma 8 jan	9.00-12.30	210	3.30 uur	even situaties Rubiks commentaar Bruno verwerkt en gestuurd naar begeleiders, stuk in verslag, indeling gemaakt voor de presentatie, samenvatting geschreven
do 11 jan		30	30 min	een paar keer naar Valentijn gemaild
vrij 12 jan	15.30-16.15	45	45 min	de laatste dingen aan het commentaar voor de anderen gedaan en op internet gezet
za 13 jan	19.00-20.15	75	75 min	aan de presentatie gewerkt: stuk theorie geschreven en Peter's black hole geschreven
ma 15 jan	9.00-10.40	100	1.40 uur	de opmaak van de samenvatting aangepast, de presentatie samengevoegd en opmaak bekeken, het hele verslag doorgekeken.
	15.15-16.30	75	1.15 uur	afspraak met Gunther, bewijzen over rubiks kubus besproken, presentatie doorgesproken
woe 17 jan	12.30-13.30	60	1 uur	het commentaar van medeleerlingen gelezen en daarover gemaild naar de anderen, zodat we kunnen bepalen wat we ermee gaan doen
do 18 jan	15.00-16.00	60	1 uur	commentaar van Simon gelezen, daarover en over de rest naar de anderen gemaild, conclusie verbeterd
	21.00-21.45	45	45 min	weer gemaild met Valentijn en logboek aangepast voor in verslag
za 20 jan	9.00-12.00	180	3 uur	heel veel gemaild, alle laatste dingen veranderd en nagekeken en van commentaar voorzien
	14.00-15.00	60	1 uur	aan de presentatie gewerkt, valentijns samenvoeging bekeken-> commentaar en geleerd
zo 21 jan	10.30-11.00	90	1.30 uur	geoefend voor de presentatie, gemaild
ma 22 jan	9.00-12.15	195	3.15 uur	geoefend voor de presentatie met andere groepjes
di 23 jan	13.00-15.00	120	2 uur	de laatste oefening
		7555	minuten	
	de totale tijd:	125,9	uur	

Commentaar van medeleerlingen

Commentaar van Koen Haest, V6B

Algemeen
Het verslag ziet er netjes en verzorgd uit, ik heb geen typefouten kunnen ontdekken. Het is wel veel tekst en weinig afbeeldingen, al kunnen jullie daar misschien niet zoveel aan doen gezien de wiskundige aard van het onderwerp. Gelukkig brengen de tabellen enige kleur in het verslag.
Het onderwerp is niet erg toegankelijk, je moet echt van dergelijke wiskundige puzzels houden. Dat is ook te merken tijdens het lezen; elke zin moet nauwkeurig gelezen worden en de inhoud ervan ook daadwerkelijk begrepen worden. Het is dus geen verslag dat makkelijk te lezen is. Daarbij moet wel gezegd worden dat vooral het onderwerp daar de oorzaak van is, jullie geven zelf al in de inleiding aan dat jullie een zo eenvoudige mogelijke voorstelling willen weergeven. Daarin zijn jullie denk ik aardig geslaagd, als je er even goed voor gaat zitten is alles goed te volgen, mede door de (erg nuttige en goede!) voorbeelden die consequent gegeven worden. De begrippenlijst is ook handig om snel iets op te zoeken wat je vergeten bent.

Samenvatting
Kan misschien iets uitgebreider. welke puzzels hebben jullie precies onderzocht, in het kort de werkwijze, misschien net iets uitgebreidere conclusie. Als men het verslag niet helemaal gelezen heeft weet de lezer niet echt waar de formules (en in mindere mate de kansen) op slaan.

Het onderzoek zelf
Niet zoveel op aan te merken. Zoals hierboven al geschreven vrij pittig om te lezen, ik moet eerlijk bekennen dat ik niet het hele verslag nauwkeurig heb doorgelezen, al ben ik wel een eind gekomen. De opbouw naar de bewijzen toe is helder, het blijft allemaal goed te volgen. Wel zou ik de (overigens duidelijke) conclusies bij elke puzzel ook even apart in de inhoudsopgave vermelden.

Conclusie
Duidelijk, niet te lang niet te kort. Aan het einde nog even een samenvatting van de conclusie, ook goed. In de laatste zin verwijzen jullie heel even naar hoe jullie te werk zijn gegaan, maar een duidelijk stukje daarover mis ik eigenlijk een beetje. Dus bij deze; hoe zijn jullie eigenlijk precies te werk gegaan, wat hebben jullie allemaal gedaan in welke volgorde?

Reflectie
Niet erg veel discussie, maar dat komt natuurlijk ook door jullie onderwerp, meetfouten en dergelijke zijn hier niet van toepassing. De zelfkritiek die jullie geven is wel duidelijk. Wat me verder nog opviel was het ‘zeer redelijk’. Ik snap wat jullie bedoelen, het is misschien wat bescheidenheid, maar het blijft een rare combinatie (heel erg gemiddeld!?). Laat dat ‘zeer’ maar weg of (en laat eventueel ‘zeer’ dan ook weg anders staat het wel een beetje arrogant) vervang redelijk door goed. Wat mij betreft dat laatste!

Respect voor jullie motivatie (als het echt waar is wat jullie schrijven), ik had het niet gekund!
De suggesties voor vervolgonderzoek zijn duidelijk en sommigen lijken me erg interessant. Jullie hebben hier goed over na gedacht.

Kortom
Een net verslag dat heel duidelijk en gestructureerd in elkaar zit, met een helder antwoord op de onderzoeksvraag. Jullie wekken de indruk dat jullie de stof goed beheersen; de manier waarop jullie alles gestructureerd uitleggen is daar wat mij betreft het bewijs van. Natuurlijk enkele puntjes tot verbetering, maar dat zijn voor het grootste deel details. Belangrijkste verbeterpunten vind ik de samenvatting en de beschrijving van de uitvoering van het onderzoek.

Commentaar van Zhu Zhou, V6B

Algemeen
Ik zie dat Koen zijn commentaar al heeft bijgezet. Ik zal proberen niet al te veel dingen te herhalen. Verder zeg ik er ook bij dat ik niet elk bewijs nadrukkelijk heb gevolgd. Ik heb het wel begrepen, maar niet echt goed over nagedacht of er bepaalde dingen zouden kunnen missen.

Inleiding
De inleiding is echt goed! Het is pakkend, en het lokt je echt om verder te lezen. Verder doen jullie er goed aan om erbij te vermelden dat de bestaande literatuur over de puzzels (nodeloos) ingewikkeld is, want dat is inderdaad zo. En ik wil wel de theorie over de puzzels (vooral de rubiks puzzels) een keer begrijpen. Dat geeft wel een meerwaarde aan jullie verslag.

Samenvatting
De samenvatting is wel goed maar ik zou het wat anders doen. Ik zou meer bijzetten wat jullie hebben gedaan en welke puzzels er onder andere besproken zijn. Dus jullie werkwijze in het kort. De formules zou ik er niet bijdoen. Als lezer heb ik geen idee waar al die variabelen voor staan. Idem??? Mod??? Inv??? Ik zou die weglaten. Hetzelfde geldt voor de kansen. Ik heb geen idee waar die kans op slaat. Die zou ik ook weglaten. Dat lees je wel in de bijbehorende stukken.

Theorie van permutaties
Een heel erg belangrijk stuk van jullie verslag. Het is goed dat jullie dit helder hebben uitgelegd. Het is immers de basis van al die puzzels. Het is best wel veel tekst, maar dat kan ook niet anders. Dus eigelijk niet zo heel veel om aan te merken.

Schuifpuzzel
Leuk stukje. Een goed voorbeeld om in te komen in het hele pariteit theorie. Duidelijke illustraties bij het verhaal. Misschien kun je een foto/afbeelding van een schuifpuzzel erbij doen. Verder nog de vraag: Waarom leg je niet uit wat een schuifpuzzel is? Bij de kubus doen jullie dat wel.

Pagina 14. **Figuur: De denkbeeldige rechthoek bevat vakjes 1, 2, 5, 6, 9, 10, a en 14. Je beweegt het lege vakje nu d.m.v. deze twee stappen tot binnen deze rechthoek.**
Je kunt deze onderschrift msschien verduidelijken door de rechthoek te markeren. De randen dikker maken of iets dergelijks. Het was wel even zoeken waar die rechthoek zat. Er zijn namelijk meerdere vakjes 1, en 2.

0	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	5	6	7	c
3	9	10	b	12
4	a	14	16	15

Zoiets misschien

1	2	3	4
5	6	7	c
9	10	b	12
a	14	16	15

Deze schuifpuzzel is een puzzel van 16 stukjes. 4 * 4. Is het echt nodig om daar 5 * 5 van te maken? Het ziet er volgens mij overzichtelijker uit als het 4 * 4 is. (zie rechts) Dus als jullie die 0-4 / 0-4 verwijderen.

Een ander mogeljkheid is om een wegel wit te laten (zie links). Dat maakt het iets overzichtelijker.

1	2	3	4
5	6	7	c
9	10	b	12
a	14	16	15

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	5	6	7	c
3	9	10	b	12
4	a	14	15	16

Overig theorie
Meer aanmerkingen heb ik eigenlijk niet over de theorie.

Conclusie
Tja, Koen haalt me de woorden uit de mond. Ik heb niet echt iets nieuws om bij te voegen.
Wel 1 ding. De kansen die jullie momenteel bij de samenvatting hebben toegevoegd kunnen misschien hier neergezet worden.

Commentaar van Simon de Jonge, V6A

Ik denk dat het meeste al weg gezegd is door Koen en Zhu. Ik zal me beperken tot wat kleine punten van verbetering.

Permutaties
- Jullie hebben duidelijk je best gedaan deze theorie duidelijk te vertellen, met veel voorbeelden etc. Maar toch had ik best veel moeite om er ‘doorheen te komen’ en het

allemaal te snappen. Zal deels ook wel komen doordat ik niet zo goed in wiskunde ben. Het is een hele klomp theorie, wat misschien niet zo uitnodigend is voor lezers. Maar ik denk niet dat jullie hier echt iets aan kunnen doen omdat het bij het onderwerp hoort. Overal voorbeelden bij is in ieder geval al een stuk makkelijker om het te begrijpen.
- Een kopje 'theorie' boven het stuk over permutaties, en een kopje 'resultaten' (of zoiets) voordat de puzzels komen maakt het denk ik wat duidelijker.

Schuifpuzzel
Een andere mogelijkheid om de schuifpuzzel te verduidelijken is het cursief maken van de coördinaten.

14-15 puzzel
Bij de 14-15 puzzel trekken jullie een conclusie over de (on)oplosbaarheid. Die was voor mij echter niet meteen duidelijk. Ik denk dat het duidelijker is om eerst alles te bewijzen, en dan een kleine conclusie te geven, ongeveer in zo'n vorm:

- Bij de opgeloste situatie zijn 14 en 15 omgewisseld
- Dit is een oneven situatie
- De beginsituatie is even
- Beginsituatie kan echter niet veranderen, dus is de puzzel onoplosbaar

Oftewel een kopje 'conclusie' bij elke puzzel zou ik wel prettig vinden.

Ik heb in tegenstelling tot Koen wel een klein typfoutje kunnen ontdekken, op blz 27 staat in het tweede stukje een spatie teveel :P
Zonder gekheid, het verslag is heel netjes geschreven en alles ziet er verzorgd uit.