

Max-Planck-Institut für Mathematik

Bonn

Geschäftsführender Direktor

Prof. Dr. Yuri Manin (ab 1. 11. 1999)
Prof. Dr. Gerd Faltings (bis 31. 10. 1999)

Vivatsgasse 7
53111 Bonn
Telefon 02 28/40 22 71
Telefax 02 28/40 22 77
E-Mail: director@mpim-bonn.mpg.de
Internet: <http://www.mpim-bonn.mpg.de/>

Wissenschaftliche Mitglieder, Direktoren

Prof. Dr. Gerd Faltings · Prof. Dr. Günter Harder · Prof. Dr. Yuri I. Manin ·
Prof. Dr. Don B. Zagier

Mitarbeiter

Ende 1999 waren 17 Mitarbeiter (einschließlich der Drittmittelbeschäftigten) am Institut tätig, darunter 5 Wissenschaftler; dazu kamen im Berichtsjahr 292 Nachwuchs- und Gastwissenschaftler (= 68 Mannjahre).

Forschungsthemen im Überblick

Algebraische Gruppen und arithmetische Untergruppen, Darstellungstheorie. Zahlentheorie, arithmetische algebraische Geometrie, automorphe Formen. Algebraische Geometrie, Singularitäten. Komplexe Analysis. Algebraische Topologie, Homotopietheorie, Differentialtopologie. Differentialgeometrie, partielle Differentialgleichungen. Mathematische Physik, Stringtheorie.

Emeritiertes Wissenschaftliches Mitglied:

Prof. Dr. Friedrich Hirzebruch

Fachbeirat:

Prof. Dr. Arnaud Beauville, Paris

Prof. Dr. Bryan J. Birch, FRS, Oxford

Prof. Dr. Jean-Michel Bismut, Orsay

Prof. Dr. Joachim Cuntz, Münster

Prof. Dr. Tammo tom Dieck, Göttingen

Prof. Dr. Mikhael Gromov, Bures-sur-Yvette

Prof. Dr. Ib Madsen, Aarhus

Prof. Dr. Graeme Segal, FRS, Cambridge

Prof. Dr. Antonius van de Ven, Leiden

Prof. Dr. Julius Wess, München

Prof. Dr. Eberhard Zeidler, Leipzig

Institutsgeschichte

Das Max-Planck-Institut für Mathematik wurde 1981 gegründet. Sein Gründungsdirektor, Professor Dr. Friedrich Hirzebruch, baute es auf dem Sonderforschungsbereich „Theoretische Mathematik“ auf, der von 1969 bis 1985 an der Universität Bonn bestand. Aus diesem Ursprung rührt die enge Zusammenarbeit mit dem Mathematischen Institut der Universität her, die über all die Jahre hinweg und trotz der räumlichen Entfernung erhalten und lebendig geblieben ist.

Ähnlich wie andere renommierte mathematische Forschungsinstitute – etwa dem „Institute for Advanced Study“ in Princeton oder dem „Institut des Hautes Études Scientifiques“ in Bures-sur-Yvette bei Paris – ist das MPI für Mathematik als Gastforschungsinstitut organisiert. Mathematiker aus aller Welt sollen in der stimulierenden Atmosphäre des Instituts ihre Ideen austauschen, gemeinsame Forschungsprojekte vorantreiben oder abseits des täglichen Universitätsbetriebs eigene Vorhaben verfolgen. Einladungen werden für einen Zeitraum von bis zu zwei Jahren ausgesprochen und orientieren

sich an den gerade im Institut aktuellen Forschungsschwerpunkten. Um dem wissenschaftlichen Nachwuchs Möglichkeiten der Weiterbildung zu geben, werden immer wieder auch junge deutsche Mathematiker eingeladen, die die internationale Atmosphäre des Max-Planck-Instituts für Mathematik nutzen sollen.

Besondere technische Ausstattung

Das Institut unterhält eine Präsenzbibliothek mit über 10.000 Monographien und rund 200 Zeitschriftenreihen. Es ist mit ca. 55 SUN-Workstations und -Servern für den wissenschaftlichen und mit ca. 25 PCs für den nicht-wissenschaftlichen Betrieb ausgerüstet.

Aktuelle Forschungsschwerpunkte*Nichtarchimedische Geometrie*

Symmetrien. – Der Mechanismus der mathematischen Formalisierung, so besagt ein beliebiger Grundsatz, erlaubt die Rückführung so mancher Probleme auf „das Lösen von Gleichungen“. Ein aussagekräftiges Beispiel wird durch Polynomgleichungen in drei Variablen gegeben, etwa

$$(1) \quad x^3y + y^3z + z^3x = 0.$$

Für solche Gleichungen und deren Lösungen sucht man typischerweise nach einer geschickten geometrischen Darstellung: Man betrachtet z. B. alle reellen Lösungen (x, y, z) zu (1), indem man sich die Lösungskurve $(\frac{x}{z}, \frac{y}{z})$ in der projektiven Ebene aufmalt (**Abb. 1**). Noch besser ist es, sich die komplexzahligen Lösungen in der projektiven Ebene vorzustellen – sie bilden eine reelle zusammenhängende so genannte Riemannsche Fläche S (die man nicht mit obigem Bild ver-

wechseln sollte; **Abbildung 2** visualisiert die zu (1) passende Fläche nach einer Deformation). Bei genauerer Betrachtung solcher Bilder entdeckt man manchmal eine Art von Symmetrie, z. B. kann es Bewegungen des umgebenden Raumes geben, die das Gebilde unverändert lassen. Mit solchen Überlegungen kommt wahre Mathematik ins Spiel: gesucht wird nun eine Theorie der Struktur von Gleichungen und deren Riemannsche Flächen.

Die Menge aller Symmetrien einer Riemannschen Fläche bildet ein mathematisches Objekt, das die *Automorphismengruppe* der Gleichung genannt wird („Gruppe“ weil Symmetrien miteinander verknüpft werden können). Man fragt typischerweise, welche Gruppen so entstehen können, oder wie viel Elemente sie enthalten können. So formuliert macht die Frage noch keinen Sinn, denn für jede Zahl n gibt es eine Riemannsche Fläche mit n Automorphismen, und die Kugel hat sogar unendlich viele. Dennoch entdeckte A. Hurwitz 1893, dass eine Riemannsche Fläche S höchstens $84(g-1)$ Automorphismen besitzt, wenn $g > 1$ gilt. Dabei ist das *Geschlecht* g eine Zahl, die man sofort vom geometrischen Gebilde S ablesen kann: es ist „die Anzahl der Löcher in S “. Die Kurve (1) z. B. hat Geschlecht $g = 3$ und genau $84(g-1) = 168$ Automorphismen. Aber gewöhnlich tritt so etwas nicht auf: in einem gewissen, mathematisch wohldefinierten Sinne haben die „meisten“ Kurven keine Automorphismen wenn $g > 2$ gilt; Kurven mit Automorphismen bilden singuläre Punkte im „Modulraum aller Kurven von gegebenem Geschlecht“.

Uniformisierung. – Im Bereich der oben erwähnten Abbildungen spielen auch zwei mächtige analytische Theorien mit: die der lokalen und die der globalen Uniformisierung. Lokale Uniformisierung ist vergleichbar mit

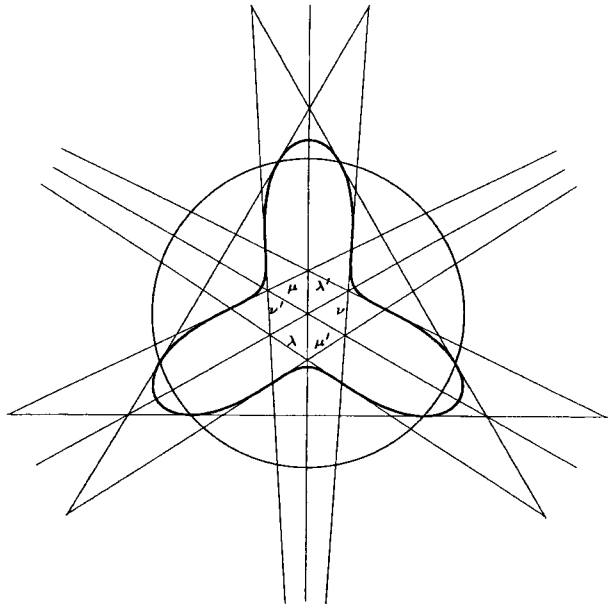


Abb. 1: Die Kurve (1) in der reellen Ebene (nach Felix Klein, 1879).

der Herstellung eines Atlases der Fläche, indem man in jedem hinreichend kleinen Teil der Fläche Koordinaten einführt, die eine genügend „treue“ Darstellung erlauben. Solche Karten sollten biholomorph sein. Als typisches Beispiel seien hier die Projektionen vom Nord- und Südpol aus erwähnt, die zusammen eine flächendeckende Karte der Kugel ergeben.

Das wahre Rätsel der Riemannschen Fläche liegt jedoch in dem Vorhandensein einer globalen Uniformisierung. Betrachten wir zuerst eine völlig andere Konstruktion: Die Menge aller 2×2 -Matrizen $\gamma = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ mit a, b, c und d reelle Zahlen, so dass $ad - bc = 1$ gilt, bilden die Gruppe $SL(2, \mathbb{R})$. Diese operiert auf der Menge H der komplexen Zahlen $z = x + iy$ mit $y > 0$ durch Möbiustransformationen

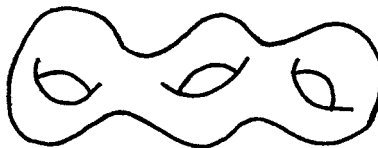


Abb. 2: Eine Riemannsche Fläche des Geschlechts 3.

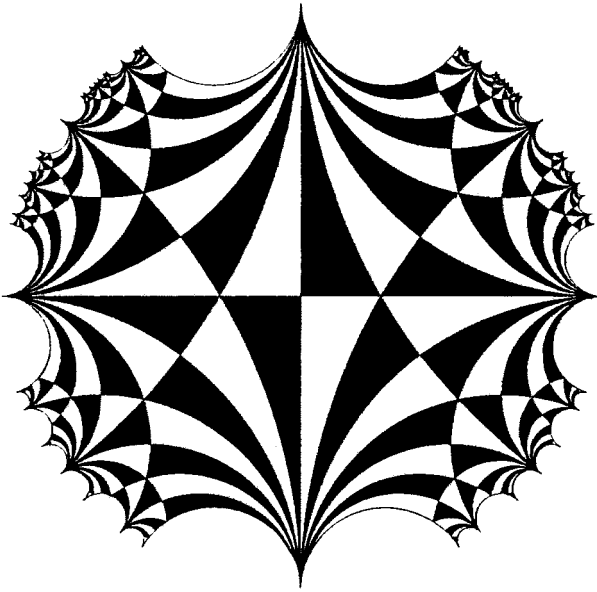


Abb. 3: $X(7)$ als Vereinigung von 168 hyperbolischen Dreiecken.

nen $z \mapsto \gamma \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$. Falls jetzt Γ eine geeignete unendliche Teilgruppe von $SL(2, \mathbb{R})$ ist, so kann man einen sinnvollen Quotienten $\Gamma \backslash H$ bilden, indem man alle $\gamma \cdot z$ für $\gamma \in \Gamma$ miteinander identifiziert. Überraschenderweise bekommt man so eine Riemannsche Fläche, und darüber hinaus lässt sich für jede Gleichung und Riemannsche Fläche S vom Geschlecht $g > 1$ eine Gruppe Γ angeben, so dass $S = \Gamma \backslash H$. Für Beispiel (1) wird eine solche Gruppe $\Gamma(7)$ genannt; sie besteht aus Matrizen γ wie oben, wobei a, b, c, d ganze Zahlen sind, für die $a-1, b, c, d-1$ teilbar sind durch 7 (genau genommen fehlen ein paar Punkte von S in $\Gamma(7) \backslash H$; wir bezeichnen Letzteres ab jetzt mit $Y(7)$). **Abbildung 3** zeigt 168 Dreiecke in H (wobei H als Kreisscheibe dargestellt wird), die zusammen $Y(7)$ bilden.

Die Existenz einer globalen Uniformisierung führte Hermann Weyl zur Aussage „in dem Symbol des zweidimensionalen nicht-Euklidischen Kristalls wird das Urbild der Riemannschen Flächen selbst, rein und befreit von allen Verdunkelun-

gen, erschaubar“. Die Moral ist, dass alle Informationen über die ursprüngliche Gleichung in einer unendlichen Teilgruppe der $SL(2, \mathbb{R})$ enthalten sind. Insbesondere kann man die Automorphismen von S bestimmen, indem man nur Γ betrachtet. Für die Eingeweichten: Die Automorphismengruppe ist N/Γ , wobei N der Normalisator von Γ ist. Für unser Beispiel (1) ist $N = SL(2, \mathbb{Z})$ und die Automorphismengruppe also $N/\Gamma = PSL(2, 7)$.

Da H mit einer hyperbolischen Metrik versehen werden kann (analog der Raum-Zeit), ist es sinnvoll, das hyperbolische Volumen von $\Gamma \backslash H$ zu betrachten. Dabei stellt sich heraus, dass der Hurwitzsche Satz genau besagt, dass $\pi/21$ eine untere Schranke für dieses Volumen ist.

Nichtarchimedische Strukturen. – Wenn man eine Bruchzahl in Potenzen von 10 schreibt, so erscheint ein „sich wiederholender Dezimalzahlteil“ (z. B. wiederholt sich die 3 in $7/12 = 0,5833333\dots$ endlos). Erlaubt man dagegen beliebige Nachkommastellen (nicht nur sich wiederholende), so bekommt man alle reellen Zahlen (z. B. $\pi = 3,1415926\dots$). Kurt Hensel bemerkte, dass man jede rationale Zahl ebenso in Potenzen einer festen Primzahl entwickeln kann, so z. B. das aktuelle Jahr

$$\begin{aligned} 2000 &= 2^4 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10} \\ &= 2 + 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^5 + 2 \cdot 3^6 \\ &= 5^3 + 3 \cdot 5^4 \end{aligned}$$

in Potenzen von 2, 3 oder 5. Genau so, wie man alle reellen Zahlen bekommt, indem man beliebige Dezimalteile erlaubt, bekommt man die sogenannten „ p -adischen Zahlen“, indem man in solchen Entwicklungen unendlich viele Potenzen von p erlaubt. Und für die Zahlentheorie ist es sogar notwendig, *alle* solche Strukturen (d. h. für alle p) paritätisch zu behandeln.

Einer der Vorzüge p -adischer Zahlen ist, dass sie es gestatten, Teilbar-

keit „metrisch“ oder „analytisch“ zu kontrollieren. So wie der normale Abstand $|x-y|$ zwischen reellen Zahlen x und y , gibt es auch eine Metrik für p -adische Zahlen: für eine solche Zahl x ist $|x|_p$ die Inverse der niedrigsten Potenz von p , die in der Entwicklung von x auftritt (also z. B. $|2000|_2 = 2^{-4}$, $|2000|_3 = 1$, $|2000|_5 = 5^{-3}$). Jedoch verhält sich diese Metrik geometrisch seltsam; während für reelle Zahlen x und y stets $|x+y| \leq |x|+|y|$ gilt, so ist hier

$$(2) \quad |x+y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}.$$

Diese Gleichung sieht vielleicht weniger fremd aus, wenn klar wird, dass eigentlich jeder „Maße“ kennt, die solche Eigenschaften besitzen: Wir messen die Größe eines Polynoms $F(X)$ durch den Grad. Das „Maß“ $|F| = 2^{\deg(F)}$ verhält sich genau so, wie von Gleichung (2) vorgeschrieben wird: Der Grad der Summe zweier Polynome F und G ist gleich dem Maximum der Grade von F und G , es sei denn, F und G haben den gleichen Grad und inverse führende Koeffizienten. Jedes „Maß“ $x \mapsto |x|$ das (2) erfüllt, wird ein *nicht-archimedisches* Maß genannt. Um 1970 bestand ein erhebliches Interesse an einer geometrischen Theorie (so wie die oben skizzierte Theorie der Riemannschen Flächen), die in der nichtarchimedischen Situation gelten sollte. Mit ihrer Hilfe könnte man klassische Probleme der Zahlentheorie geometrisch oder analytisch behandeln. Die Existenz einer solchen Theorie ist wegen des abweichenden Verhaltens des nicht-archimedischen Maßes nicht offensichtlich, aber neue Ideen der algebraischen Geometrie führten letzten Endes doch zum Ziel.

Die beiden MPI-Direktoren Yuri Manin und Gerd Faltings haben zu diesem immer noch aktuellen Arbeitsfeld wichtige Beiträge geliefert,

und verschiedene Gastforscher am MPI sind auf dieses Gebiet spezialisiert. So konstruierte Takeshi Saito während seines Aufenthalts 1999 eine Theorie der höheren Verzweigungsgruppen mit Hilfe von nicht-archimedischer Analysis: diese bilden eine Kette von einfachen Gruppen, die aber geometrisch möglicherweise sehr kompliziert verzweigte Gebilde beschreiben. Während ihres Aufenthalts 1998 benutzte Annette Werner nichtarchimedische Konzepte in ihren Studien zu lokalen Höhen, z. B. die p -adische „Nähe“ von Mengen von Punkten (Divisoren) auf Kurven. Gleichzeitig entwickelte Jiandong Guo am MPI eine Theorie der höherdimensionalen p -adischen periodischen Funktionen (dessen reelles Gegenstück seit Fouriers Arbeiten über Schwingungen wohlbekannt ist).

Nichtarchimedische Uniformisierung. – Nachdem John Tate die lokale Uniformisierung nichtarchimedischer Kurven (d. h. die Lösungsmenge von Gleichungen wie (1) in nichtarchimedischen Strukturen) entdeckte, erkannte David Mumford um 1975, dass *nicht* jeder solche Raum eine sinnvolle globale Uniformisierung erlaubt. Kurven, für die so etwas möglich ist (Mumford-Kurven genannt) kann man folgendermaßen charakterisieren. Die nicht-archimedische Welt besitzt eine Besonderheit, die es in der realen/reellen Welt nicht gibt, nämlich den Prozess der *Reduktion*. Dieser bildet z. B. eine p -adische Zahl auf den p -Koeffizienten ihrer Entwicklung ab (2000 reduziert also zu 0 bzw. 2 in der 2-adischen bzw. 3-adischen Welt). Wenn man nun eine Mumford-Kurve reduziert, dann bekommt man ein Gebilde, das aus lauter Geraden besteht. Zu jeder Mumford-Kurve gehört eine geeignete Matrixengruppe, die auf einem universionalen Geraden-Konstrukt operiert, das man den Bruhat-Tits Baum nennt

(er spielt die gleiche Rolle wie H oben).

Ein Beispiel: Es sei $R = \mathbb{F}_{41}[T]$ der Polynomring in einer Variablen T über dem Körper \mathbb{F}_{41} , d. h. wir addieren und multiplizieren Koeffizienten modulo 41 (also ist $23 + 40 = 22$, $23 \times 40 = 18$ und $a^{41} = a$ für jedes a). Eine typische Kurve, für deren Lösungen in R man sich interessiert, ist

$$(3) \quad (x^{41} - x)(y^{41} - y) = T^{-1}.$$

Das nichtarchimedische Maß ist in diesem Fall, so wie schon im letzten Paragraphen, durch $|F| = 41^{\deg(F)}$ gegeben für $F \in R$. Durch Reduktion wird T^{-1} gleich 0, und man bekommt das Geraden-„Schachbrett“ aus **Abbildung 4**. Man bemerke, dass es genau $g = (41-1)^2 = 1600$ Löcher im Brett gibt.

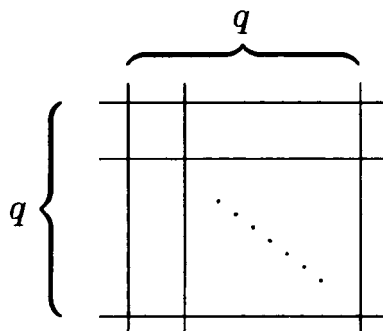
Abermals kann man sich fragen, wieviele Symmetrien eine solche nichtarchimedische Kurve besitzen kann (als Funktion ihres Geschlechts). Wir sehen an Beispiel (3), dass das Gebilde unverändert bleibt, wenn man die Geraden vertikal bzw. horizontal verschiebt, oder das ganze Quadrat spiegelt. Diese Symmetrien sind gegeben durch $x \mapsto x + a$, $y \mapsto y + b$ für $a, b \in \mathbb{F}_{41}$ und Vertauschung von x und y . Eine weitere Symmetrie ist gegeben durch $x \mapsto cx$, $y \mapsto c^{-1}y$ für $c \neq 0$. Die Gesamtzahl der Automorphismen beträgt $41 \times 41 \times 2 \times 40 = 134480$, oder besser:

$2\sqrt{16000}(\sqrt{1600} + 1)^2$. Das Sonderbare ist, dass diese Zahl viel größer ist als die Hurwitz-Schranke für die Automorphismenzahl Riemannscher Flächen vom Geschlecht $g = 1600$, nämlich $84(g-1) = 3360$.

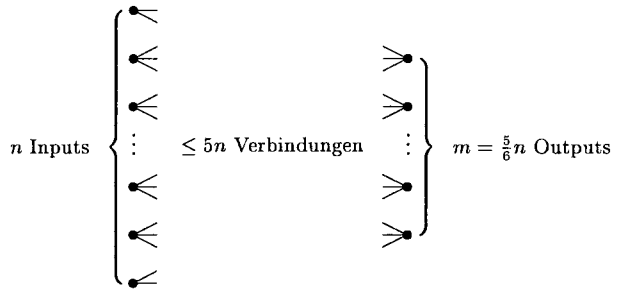
Vor Kurzem wurde dieses Phänomen am MPI von Gunther Cornelissen, Fumiharu Kato und Aristeides Kontogeorgis näher untersucht, und es stellte sich heraus, dass das Beispiel als Leitbild der allgemeinen Theorie gelten kann: *Jede Mumford-Kurve vom Geschlecht $g \geq 9$ hat höchstens $2\sqrt{g}(\sqrt{g} + 1)^2$ Automorphismen, und diese obere Schranke wird für beliebig große Werte von g erreicht.* Viele Kurven und höherdimensionale geometrische Objekte von besonderer Bedeutung für Fragen der Zahlentheorie besitzen in der Tat eine nichtarchimedische Uniformisierung. Eine Klasse solcher Gebilde, die dem oben erwähnten $Y(7)$ ähneln, werden „Shimura-Varietäten“ genannt, und wurden 1998–99 am MPI von Gerd Faltings und Tom Haines untersucht. Sie ermittelten allgemeingültige Vorgehensweisen zur vereinfachten Darstellung der Uniformisierung und Reduktion dieser Varietäten. Gleichzeitig zeigte Fumiharu Kato, dass eine dieser Varietäten eigenartigerweise eine „falsche Fläche“ ist: sie besitzt zwar alle wesentlichen topologischen Eigenschaften der gewöhnlichen Ebene, lässt sich jedoch nicht in eine solche deformieren.

Eine weitere Klasse solcher Kurven bilden die „Drinfeldschen Modulkurven“, denen am MPI in den letzten Jahren Douglas Ulmer und Gunther Cornelissen ihre Aufmerksamkeit zugewandt haben. Sie weisen Charakteristika sowohl von $Y(7)$ als auch von der Kurve (3) auf und vereinigen so die Vorzüge beider Welten. Zum einen besitzen sie viel mehr als $84(g-1)$ Automorphismen (wo g ihr Geschlecht ist), auch liefert ihre Reduktion die besten (bisher bekann-

Abb. 4: Analytische Reduktion von (3).



ten) natürlich beschränkten Konzentratoren. Dies bedeutet das Folgende: Zeichnet man in der Ebene einen Punkt für jede Gerade in der Reduktion einer solchen Kurve und verbindet man zwei solcher Punkte jeweils dann, wenn die dazu gehörigen Geraden einander schneiden, dann hat der entstandene Graph optimale Transmissionseigenschaften (so wie es z. B. für Schaltkreise erforderlich ist – siehe Abb. 5).



Eigenschaft: jede Menge von $m/2$ Inputs ist verbunden mit mehr als $m/2$ Outputs

Die angeführten Resultate und Beweistechniken sind Teil eines viel größeren Projekts, dessen Ziel es ist, nichtarchimedische Verfahren so in der algebraischen Geometrie zu verankern, wie es für die komplexe Analysis schon immer der Fall war. Die dahinterstehende Philosophie scheint zu sein, den primitiven menschlichen Akt des Messens so abwechslungsreich wie möglich zu gestalten, da jeder Blickwinkel neue Ergebnisse zeigt. Dass sich dabei insbesondere die „diskreten“ Aspekte der nicht-archimedischen Theorie sofort im Bereich der Anwendungen niederschlagen, sollte in unseren vernetzten Zeiten keine Überraschung sein (*Cornelissen*).

Klassifikation exotischer Holonomien

Jedermann kennt unseren gewöhnlichen dreidimensionalen euklidischen Raum und seine gewöhnliche Abstandsfunktion, aber bereits das Beispiel der Minkowskischen Raum-Zeit zeigt, dass andere Metriken ebenso „real“ sein können; in der Tat existieren viele weitere Räume, die in zunehmendem Maße eine wichtige Rolle in der Physik spielen. Diese Räume sind typischerweise durch eine lokale Beschreibung gegeben – man denke hierbei an Atlanten –, und ihr Aussehen ist durch eine „Metrik“ bestimmt (was zu Konzepten wie einer „Krümmung“ führt).

Ein mathematisches Konzept, das allgemeiner und flexibler als eine Metrik ist, aber immer noch die Untersuchung solcher geometrischer Probleme erlaubt, ist der Begriff des *Zusammenhangs*. Er beschreibt, was es bedeutet „einen Tangentialvektor entlang einer gegebenen Kurve parallel zu bewegen“. Grob gesprochen bedeutet dies, dass es gestattet, analytische Berechnungen von einem Punkt in einen anderen hinüberzutransportieren und dabei Auskünfte über den Einfluss der metrischen Änderungen auf dem Verbindungsweg gibt.

Abb. 5: Beschränkte Konzentration aus Drinfeldschen Modul-kurven.

Etwas technischer ausgedrückt, assoziiert er zu jedem festen Vektorfeld X auf einer Mannigfaltigkeit M einen Operator ∇_X auf dem Raum aller Vektorfelder, der sich wie eine Derivation verhält, d. h. die Leibniz-Regel erfüllt. Wenn man sich nur für die lokalen Eigenschaften von M interessiert, kann man annehmen, dass M der gewöhnliche n -dimensionale reelle Raum \mathbb{R}^n ist. Vektorfelder sind dann Linearkombinationen der üblichen partiellen Ableitungen ∂_i bezüglich der i -ten Koordinate x^i auf \mathbb{R}^n , und ein Zusammenhang ist vollständig festgelegt durch die Vorgabe von n^3 Funktionen in n Variablen (der so genannten Christoffel-Symbole) Γ_{ij}^k , so dass

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k.$$

Man nimmt jetzt an, dass ∇ torsionsfrei ist, d. h. $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. Ohne diese Einschränkung werden die Verhältnisse zu allgemein; außerdem ist dieser Fall – aufgrund von Einsteins Relativitätstheorie und ihrer verschiedenen Verallgemeinerungen – für Physiker am interessantesten.

Wenn man M bereits mit einer (Riemannschen) Metrik versehen hat, hat man einen Begriff von *Paralleltransport* zur Verfügung, und die Christoffel-Symbole werden von der Metrik festgelegt. In einer allgemeineren Situation und für einen beliebigen Zusammenhang ∇ definiert man den folgenden Begriff des Paralleltransports. Man betrachte einen festen Punkt x_0 auf M und irgendeinen stückweise glatten geschlossenen Weg mit Basispunkt x_0 , d. h. eine Einbettung γ des Einheitsintervalls $[0, 1]$ in M , für die $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$ gilt. Ein Vektorfeld V heißt parallel längs γ falls $\nabla_{\dot{\gamma}} V = 0$ (dies stellt eine wohldefinierte Differentialgleichung dar, die von V erfüllt wird). Wenn V die einzige Lösung dieser Gleichung ist mit der Eigenschaft, dass $V(0)$ ein gegebener Tangentialvektor V_0 in x_0 an M ist, dann kann man den Vektor $P_{\gamma}(V_0) := V_1$ betrachten, und dieser wird „Paralleltransport des Tangentialvektors V_0 längs des geschlossenen Wegs γ “ genannt.

Der entscheidende Punkt hierbei ist, dass – falls der Zusammenhang nichttrivial ist – das Resultat des Paralleltransports eines Tangentialvektors in einem Punkt entlang eines geschlossenen Weges (der also zu diesem Punkt zurückkehrt) *nicht notwendigerweise derselbe Tangentialvektor zu sein braucht wie derjenige, mit dem man gestartet war*. Man beachte, dass alle linearen Transformationen des Tangentialraums in x_0 , die diesen Tangentialraum in sich überführen, eine Gruppe bilden. Für $M = \mathbb{R}^n$ ist der Tangentialraum in einem Punkt gerade isomorph zu M selbst,

daher besteht diese Gruppe aus allen invertierbaren $n \times n$ -Matrizen $GL(n, \mathbb{R})$.

Alle solchen P_{γ} für verschiedene geschlossene Wege γ , die an einem festen Punkt x_0 starten, bilden eine Untergruppe dieser Automorphismengruppe $GL(n, \mathbb{R})$ des Tangentialraums in x_0 , dessen abstrakte Struktur unabhängig von x_0 ist, falls M zusammenhängend ist. Sie wird die *Holonomiegruppe* von (M, ∇) genannt.

Die Holonomiegruppe ist eine der wichtigsten und informativsten Charakteristiken des Raumes, sowohl lokal als auch global. Sie sorgt dafür, dass man, wenn man um die Mannigfaltigkeit mit einer passend gewählten Größe lang genug herumläuft und beobachtet, wie sich die Größe ändert, wenn sie zum Ausgangspunkt zurückkommt, eine ziemlich gute Idee davon bekommt, wie der Raum aussieht. Nehmen wir beispielsweise an, dass diese Größe die Feuchtigkeit Ihres Hemdes ist und der Ausgangspunkt das MPI für Mathematik in Bonn. Wenn Sie den Rhein hin- und zurück schwimmen, können Sie aus der Tatsache, dass Ihr Hemd nass ist, schließen, dass es in Bonn Wasser gibt – es sei denn, Ihr Weg führt an so vielen sonnigen Cafés vorbei, dass Ihr Hemd schon wieder trocken ist, wenn Sie beim Institut erscheinen.

Manchmal kann man diese Holonomiegruppe verwenden, um eine Art Zerlegung einer gegebenen „geometrischen“ Mannigfaltigkeit M in irreduzible Komponenten zu erreichen, entsprechend der Zerlegung der Holonomiegruppe in irreduzible lineare Untergruppen. Intuitiv bedeutet dies, dass man die Geometrie der Ausgangsmannigfaltigkeit in ihre „Elementarteilchen“ zerlegt, welche Riemannsch, Kählersch, quaternional, quaternional-Kählersch, hyper-Kählersch usw. sein können, wobei jede dieser Geometrien durch ihre Holonomiegruppe spezifiziert ist und jede

Group G	Representation space	Group G	Representation space
$SO(p, q)$	$\mathbb{R}^{p+q}, p + q \geq 3$	G_2	\mathbb{R}^7
$SO(n, \mathbb{C})$	$\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}, n \geq 3$	G_2'	\mathbb{R}^7
$U(p, q)$	$\mathbb{C}^{p+q} \simeq \mathbb{R}^{2(p+q)}, p + q \geq 2$	$G_2^{\mathbb{C}}$	\mathbb{R}^{14}
$SU(p, q)$	$\mathbb{C}^{p+q} \simeq \mathbb{R}^{2(p+q)}, \begin{cases} p + q \geq 2 \\ (p, q) \neq (1, 1) \end{cases}$	$Spin(7)$	\mathbb{R}^8
$Sp(p, q) \cdot Sp(1)$	$\mathbb{H}^{p+q} \simeq \mathbb{R}^{4(p+q)}, p + q \geq 2$	$Spin(4, 3)$	\mathbb{R}^8
$Sp(p, q)$	$\mathbb{H}^{p+q} \simeq \mathbb{R}^{4(p+q)}, p + q \geq 2$	$Spin(7, \mathbb{C})$	\mathbb{R}^{16}
$Sp(n, \mathbb{R}) \cdot SL(2, \mathbb{R})$	$\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^{2n} \simeq \mathbb{R}^{4n}, n \geq 2$		
$Sp(n, \mathbb{C}) \cdot SL(2, \mathbb{C})$	$\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^{2n} \simeq \mathbb{R}^{8n}, n \geq 2$		

Tab. 1: Vollständige Liste der metrischen Holonomien.

von ihnen spezielle Eigenschaften hat, die aus dieser Gruppe hergeleitet werden können.

Man beachte das „usw.“ in der obigen Liste irreduzibler Komponenten von M . Man kann sich nämlich fragen, welche anderen Geometrien (wenn überhaupt) hier auftreten

könnten. Mathematisch gesprochen ist dies die Frage nach der Beschreibung aller irreduzibler Holonomiegruppen von torsionsfreien affinen Zusammenhängen.

Diese Frage kann in zwei Teile zerlegt werden: Sie ist leichter zu beantworten für lokalsymmetrische

group G	representation V
$T_{\mathbb{R}} \cdot SL(n, \mathbb{R})$	\mathbb{R}^n $\odot^2 \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ $\Lambda^2 \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^{n(n-1)/2}$
$T_{\mathbb{C}} \cdot SL(n, \mathbb{C})$	$\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ $\odot^2 \mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{n(n+1)}$ $\Lambda^2 \mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{n(n-1)}$
$T_{\mathbb{R}} \cdot SL(n, \mathbb{C})$	$\{A \in M_n(\mathbb{C}) : A = A^*\} \simeq \mathbb{R}^{n^2}$
$T_{\mathbb{R}} \cdot SL(n, \mathbb{H})$	$\mathbb{H}^n \simeq \mathbb{R}^{4n}$ $\{A \in M_n(\mathbb{H}) : A = -A^*\} \simeq \mathbb{R}^{n(2n+1)}$ $\{A \in M_n(\mathbb{H}) : A = A^*\} \simeq \mathbb{R}^{n(2n-1)}$
$Sp(n, \mathbb{R})$ $Sp(n, \mathbb{C})$	\mathbb{R}^{2n} $\mathbb{C}^{2n} \simeq \mathbb{R}^{4n}$
$\mathbb{R}^* \cdot SO(p, q)$ $T_{\mathbb{C}} \cdot SO(n, \mathbb{C}), T_{\mathbb{C}} \neq 0$	\mathbb{R}^{p+q} $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$
$T_{\mathbb{R}} \cdot SL(m, \mathbb{R}) \cdot SL(n, \mathbb{R})$ $T_{\mathbb{C}} \cdot SL(m, \mathbb{C}) \cdot SL(n, \mathbb{C})$ $T_{\mathbb{R}} \cdot SL(m, \mathbb{H}) \cdot SL(n, \mathbb{H})$	$\mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^{mn}$ $\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2mn}$ $\mathbb{H}^m \otimes \mathbb{H}^n \simeq \mathbb{R}^{4mn}$
Notations: $T_{\mathbb{F}}$ denotes any connected Lie subgroup of \mathbb{F}^* , $M_n(\mathbb{F})$ denotes the algebra of $n \times n$ matrices with entries in \mathbb{F} .	

Tab. 2: Bergers Liste der nicht-metrischen Holonomien.

group G	representation V
$T_{\mathbb{R}} \cdot \text{Spin}(5, 5)$	\mathbb{R}^{16}
$T_{\mathbb{R}} \cdot \text{Spin}(1, 9)$	\mathbb{R}^{16}
$T_{\mathbb{C}} \cdot \text{Spin}(10, \mathbb{C})$	$\mathbb{C}^{16} \simeq \mathbb{R}^{32}$
$T_{\mathbb{R}} \cdot E_6^1$	\mathbb{R}^{27}
$T_{\mathbb{R}} \cdot E_6^4$	\mathbb{R}^{27}
$T_{\mathbb{C}} \cdot E_6^{\mathbb{C}}$	$\mathbb{C}^{27} \simeq \mathbb{R}^{54}$
$T_{\mathbb{R}} \cdot \text{SL}(2, \mathbb{R})$	$\odot^3 \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}^4$
$\text{SL}(2, \mathbb{C})$	$\odot^3 \mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^8$
$\mathbb{C}^* \cdot \text{SL}(2, \mathbb{C})$	$\odot^3 \mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^8$
$\mathbb{R}^* \cdot \text{Sp}(2, \mathbb{R})$	\mathbb{R}^4
$\mathbb{C}^* \cdot \text{Sp}(2, \mathbb{C})$	$\mathbb{C}^4 \simeq \mathbb{R}^8$
$\mathbb{R}^* \cdot \text{SO}(2) \cdot \text{SL}(2, \mathbb{R})$	$\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}^4$
$\mathbb{C}^* \cdot \text{SU}(2)$	$\mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^4$
$H_{\lambda} \cdot \text{SU}(2)$	$\mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^4$
$H_{\lambda} \cdot \text{SU}(1, 1)$	$\mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^4$
$\text{SL}(2, \mathbb{R}) \cdot \text{SO}(p, q)$	$\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^{p+q} \simeq \mathbb{R}^{2(p+q)}$
$\text{Sp}(1) \cdot \text{SO}(n, \mathbb{H})$	$\mathbb{H}^n \simeq \mathbb{R}^{4n}$
$\text{SL}(2, \mathbb{C}) \cdot \text{SO}(n, \mathbb{C})$	$\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{4n}$
E_7^5	\mathbb{R}^{56}
E_7^7	\mathbb{R}^{56}
$E_7^{\mathbb{C}}$	$\mathbb{R}^{112} \simeq \mathbb{C}^{56}$
$\text{Sp}(3, \mathbb{R})$	$\mathbb{R}^{14} \subset \Lambda^3 \mathbb{R}^6$
$\text{Sp}(3, \mathbb{C})$	$\mathbb{R}^{28} \simeq \mathbb{C}^{14} \subset \Lambda^3 \mathbb{C}^6$
$\text{SL}(6, \mathbb{R})$	$\mathbb{R}^{20} \simeq \Lambda^3 \mathbb{R}^6$
$\text{SU}(1, 5)$	\mathbb{R}^{20}
$\text{SU}(3, 3)$	\mathbb{R}^{20}
$\text{SL}(6, \mathbb{C})$	$\mathbb{R}^{40} \simeq \Lambda^3 \mathbb{C}^6$
$\text{Spin}(2, 10)$	\mathbb{R}^{32}
$\text{Spin}(6, 6)$	\mathbb{R}^{32}
$\text{Spin}(6, \mathbb{H})$	\mathbb{R}^{32}
$\text{Spin}(12, \mathbb{C})$	$\mathbb{C}^{32} \simeq \mathbb{R}^{64}$

Notations: $T_{\mathbb{F}}$ denotes any connected Lie subgroup of \mathbb{F}^* ,
 $H_{\lambda} = \{e^{(2\pi i + \lambda)t} \mid t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C}^*$, $\lambda > 0$.

Tab. 3: Liste der exotischen Holonomien.

Räume, für die die Krümmung R parallel ist (d. h. $\nabla R = 0$). Sie hat eine lange Geschichte, beginnend mit Cartan, der in den zwanziger Jahren lokalsymmetrische Riemannsche Mannigfaltigkeiten klassifiziert hat.

In den fünfziger Jahren klassifizierte Berger dann alle möglichen Holonomien lokalsymmetrischer torsionsfreier affiner Zusammenhänge, und er schlug eine vollständige Liste für den nichtsymmetrischen Fall vor, wobei er zeigte, dass sie ziemlich beschränkt sein müsste. Berger präsentierte seine Klassifikationsliste aller möglicher Kandidaten irreduzibler Holonomien in zwei Teilen – der erste Teil sollte alle möglichen Gruppen enthalten, welche eine nicht-ausgearbeitete symmetrische Bilinearform erhalten (Tab. 1), während der zweite Teil alle vermuteten restlichen, bis auf eine endliche Anzahl fehlender Einträge, enthalten sollte. Diese restlichen nennt man nach Bryant *exotische Holonomien* (Tab. 2).

Allerdings entsprechen Tabelle 1 und 2 nicht genau Bergers Artikel. Die Originaltabellen enthielten einige überflüssige Einträge, von denen später gezeigt wurde, dass sie nicht auftreten können. Der Schlusspunkt für die Klassifikation der Liste aller Metriken wurde erst 1987 gesetzt, als Bryant bewies, dass G_2 und $\text{Spin}(7)$ wirklich als Holonomien vorkommen können.

Auf diese Weise war Ende der achtziger Jahre das Holonomieproblem auf die Suche nach exotischen Holonomien reduziert worden. Die erste (endliche) Serie exotischer Holonomien wurde von Bryant gefunden. Diese sind $T_{\mathbb{C}} \cdot \text{SL}(2, \mathbb{C})$, $T_{\mathbb{C}} \cdot \text{Spin}(10, \mathbb{C})$ und $T_{\mathbb{C}} \cdot E_6^{\mathbb{C}}$ sowie einige ihrer reellen Varianten (obere fünfzehn Einträge in Tabelle 3). Die erste *unendliche* Serie exotischer Holonomien, $\text{SL}(2, \mathbb{C}) \cdot \text{SO}(n, \mathbb{C})$ und ihre reellen Varianten (siehe die folgenden drei Einträge in Tabelle 3) wurden von Chi, Merkulov und Schwachhöfer gefunden. In allerjüngster Zeit fanden die letzteren beiden Autoren den ganzen Rest (Tab. 3), womit das Holonomieproblem nun vollständig gelöst ist. Dabei entdeckten sie auf

dem Wege zu seiner Lösung alle drei Tabellen auf eine neue – und ziemlich unerwartete Weise – wieder.

Ihr Beweis beginnt mit der Bemerkung, dass die Holonomiegruppe eine Liegruppe ist, so dass man ebensogut ihre assoziierte Liealgebra studieren kann. Zu dieser ist der so genannte *Krümmungsraum* assoziiert, welcher der Nullraum sein muss, wenn die Ausgangsgruppe als torsionsfreie affine Holonomie auftritt. Für jede mögliche Holonomiegruppe G kann man diesen Krümmungsraum auf geometrische Weise nach dem Borel-Weil-Paradigma studieren, und die resultierenden Twistorformeln legen den Grundstein zur Lösung des Holonomieproblems. Insbesondere

kann der Krümmungsraum in Termen geometrischer Daten beschrieben werden, die zum Darstellungsraum von G assoziiert sind. Ein Argument, das komplexe Kontaktgeometrie verwendet, führt zur Reduktion auf den Fall von Deformationen der sehr speziellen Unterklasse von Mannigfaltigkeiten, die aus der Darstellungstheorie herkommen (so genannte „verallgemeinerte Flaggenmannigfaltigkeiten“); ein sorgfältiges Studium dieser Unterklasse enthüllt die Resultate der Tabellen 1–3 und erlaubt zu beweisen, dass keine anderen Gruppen als Holonomie nicht-lokaler symmetrischer torsionsfreier affiner Zusammenhänge vorkommen können (*Merkulov*).