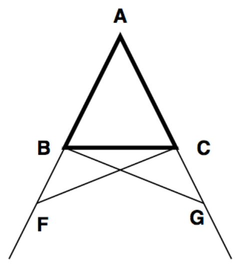
Meetkunde, meetkundes en groepen

door Gunther Cornelissen

1. Twee historische caveats

Voor een goed begrip van de geschiedkundige ontwikkeling van de meetkunde zou men zich eigenlijk moeten kunnen invoelen in de geest van haar historische beoefenaars. Hoe moeilijk dat wel niet kan zijn voor 21e eeuwse post-Riemannianen zoals wij wil ik duidelijk maken door twee gebruikelijke misvattingen te laten zien.

Poincaré beweerde dat “groepentheorie even oud is als de hele wiskunde”, want per slot van rekening gebruikt Euclides meetkundige transformaties. Dit is dubbel fout: wie transformaties samenstelt heeft daarom nog geen notie van (abstracte) groep, maar erger, Euclides zou nooit transformaties hebben gebruikt. Hij aanvaardde het begrip “beweging” in de meetkunde niet. Een voorbeeld: hoe zouden jij en ik bewijzen dat in een gelijkbenige driehoek de twee basishoeken gelijk zijn (propositie I.5 in de Elementen)? Ik denk door de driehoek op zichzelf af te beelden door een spiegeling om de as door de top en het middelpunt van de basis. Niets daarvan bij Euclides: voor hem is het correcte bewijs de beruchte *pons assinorum* (ezelsbrug): op de verlenging van de gelijke zijden AB en AC kies je twee punten (F en G respectievelijk) op gelijke afstand van de top. Dan zijn de hoeken ABG en ACF gelijk, en evenzo CBG en BCF. Voor de verschillen is dan $ABC = ABG - CBG = ACF - BCF = ACB$. Wat ingewikkeld! Enkel omdat Euclides niet wil spiegelen.



Figuur 1: De Ezelsbrug

Zoals je misschien weet stelt Euclides in zijn *Elementen* vijf axioma’s voor, die hij letterlijk $A\iota\tau\eta\mu\alpha\tau\alpha$, “voorstellen”, noemde. De eerste vier zijn eigenlijk een soort voorschriften over het toelaten van constructies van meetkundige objecten, zoals cirkels en rechte lijnen. Maar bij nummer vijf, het Parallellenpostulaat, werd in de loop der eeuwen steeds meer de wenkbrauwen gefronst. Het postulaat is equivalent met de bewering dat de som van de hoeken in een driehoek 180 graden is, of dat door een punt buiten een lijn precies één rechte gaat die evenwijdig is met de gegeven lijn. Al voor de Verlichting probeerden wiskundigen als Wallis en Saccheri dit postulaat als stelling uit de andere “voorstellen” af te leiden. Natuurlijk zonder succes, want Bolyai junior, Lobachevsky en Gauß ontdekten dat dit postulaat onafhankelijk is van de rest en consistent kan worden vervangen door een ander, zoals: door een punt buiten een rechte gaan méér dan één evenwijdige met de gegeven rechte. Dan is de som van de hoeken van een driehoek kleiner dan 180 graden. (Hoeveel kleiner? Proportioneel met de oppervlakte van de driehoek.) Waarom was dat in de 19e eeuw zo schokkend?

In zijn *Kritik der reinen Vernunft* (2e ed., 1787) is Kant heel duidelijk: er is *a priori* maar één ruimte, en maar één meetkunde, de driedimensionale meetkunde van Euclides. Voor ons 21e eeuwers is de draagwijdte van een dergelijke filosofische uitspraak makkelijk te onderschatten, maar het was bijvoorbeeld de hoofdreden waarom Gauß (1777–1855) zijn ontdekking van de niet-euclidische meetkunde geheim hield —- wie het waagde aan Kant te twijfelen had het hard te verduren.

Figuur 2: János Bolyai

Figuur 3: Nikolai Lobachevsky

De onverlaten Bolyai (1802–1860) en Lobachevsky (1792–1856) dekten zich in door hun theorie "absolute", of zelfs "imaginaire" meetkunde te noemen. Maar toch zat de wiskunde er maar mee: in plaats van één plaatstalen, unieke meetkunde zaten we ineens met een hele boel verschilende meetkundes, euclidische, hyperbolische, elliptische, lijnenmeetkunde, inversiemeetkunde, projectieve meetkunde ....

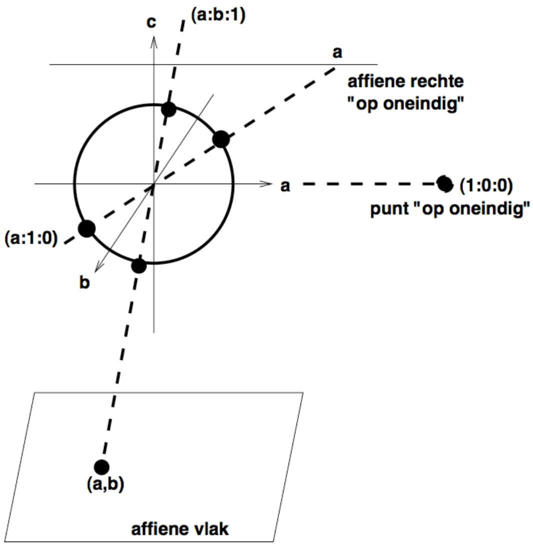
Het is trouwens interessant dat pas Hilbert in de 20e eeuw bewees dat men de meetkunde van Euclides uniek en consistent kan definiëren door *twintig* axioma's. Het lijkt alsof Euclides en zijn volgelingen wel héél veel voor waar namen. Maar de hele notie van theorie, axioma en consistentie werd tegelijk door Hilbert c.s. ontwikkeld om het probleem of het axiomastelsel volledig is überhaupt wiskundig te kunnen waarnemen en formuleren.

2. Een paar soorten meetkunde

Om de rest van dit betoog wiskundig te kunnen volgen, moet ik wat vertellen over projectieve meetkunde. Laat ik maar meteen een paar verschillende soorten meetkunde definiëren.

Vanuit axiomatisch standpunt zijn er o.a. volgende mogelijkheden. *Absolute meetkunde* houdt zich bezig met die eigenschappen die kunnen worden bewezen zonder aanname van het parallellenpostulaat of zijn ontkenning. In *euclidische meetkunde* komt het parallellellenpostulaat erbij, in de *hyperbolische meetkunde van Lobachevsky* gaat er méér dan één, in *sferische meetkunde* géén parallellen door een punt buiten een rechte. Elk van deze meetkundes hebben een "afstandsbegrip". Axiomatische *affiene* (afstandsloze) en *projectieve meetkunde* is weer wat anders.

Vanuit de cartesiaanse theorie van coördinaten zijn er ook verschillende meetkundes mogelijk, dit zijn dan modellen voor bovenstaande axiomasystemen. In lineaire algebra leer je de tweedimensionale vectorruimte kennen als model voor een vlak voorzien van een oorsprong. Zonder de oorsprong een bijzondere functie te geven, kan je dan $\mathbf{R}^2$ zien als het *affiene* vlak. Er is echter ook het *projectieve vlak*, waarvan de punten gegeven zijn door drietallen $(a:b:c) \neq (0:0:0)$, waarbij de dubbelpunt i.p.v. komma aangeeft dat de projectieve punten $(a:b:c)$ en $(\lambda a:\lambda b:\lambda c)$ voor alle $\lambda \neq 0$ gelijk zijn (je kan dus punten in het projectieve vlak zien als "richtingen in de ruimte"). De punten waarvoor $c \neq 0$ kunnen we normaliseren als $(a:b:1)$, en dit levert ons een kopie $\{(a,b) \in \mathbf{R}^2\}$ van het affiene vlak in het projectieve vlak. Maar voor $c = 0$ liggen in het projectieve vlak nog de "punten op oneindig" $(a:b:0)$. Als $b \neq 0$, normalizeren we tot $(a:1:0)$, en dit is gewoon een affiene rechte, en als $b = 0$, dan vinden we nog één extra punt $(1:0:0)$. In de projectieve meetkunde is dus de affiene meetkunde "bevat" — zelfs op meerdere manieren, omdat $c \neq 0$ ook maar een keuze is. Dit kan je meetkundig nog zo zien: in de driedimensionale (a,b,c)-ruimte teken je een sfeer met centrum in $(0,0,0)$. Twee antipodale punten identificeer je met een projectief punt (= richting) $(a:b:c)$. Als $c \neq 0$ kan je deze punten eenduidig vanuit de oorsprong projecteren op een vlak evenwijdig met het $c = 0$-vlak, en dat is onze kopie van het affiene vlak. De punten in het vlak $c = 0$ met $b \neq 0$ kan je eenduidig projecteren op een rechte evenwijdig met de a-as in het $c = 0$-vlak, en dit is een kopie van een affiene rechte. Tenslotte blijft er nog een punt in de richting van de a-as over.



Figuur 4: het projectieve vlak

Een lijn in het affiene vlak is de oplossing van een lineaire vergelijking $Ax+By+C=0$ in twee veranderlijken. In het projectieve vlak wordt dat een homogene vergelijking in drie veranderlijken: $Ax+By+Cz=0$. Dit is zinvol, want als $(x:y:z)$ een oplossing is, dan ook $(\lambda x:\lambda y:\lambda z)$.

In het projectieve vlak bestaan geen evenwijdige lijnen: alle lijnen snijden mekaar. Twee lijnen die evenwijdig zijn in de gekozen kopie van het affiene vlak binnen het projectieve vlak (bijvoorbeeld $y=x$ en $y=x+1$) zullen mekaar "op oneindig" snijden in het projectieve vlak ($\{(x:y:z)\ :\ y=x \text{ en } y=x+z\}=\{(1:1:0)\}$). Nu begrijp je misschien de terminologie: in een perspectieftekening projecteer je de driedimensionale ruimte ook zo, dat evenwijdige lijnen zich achter de horizon in het vluchtpunt snijden.

In het affiene vlak is een kegelsnede bij definitie de oplossing van een vergelijking van graad twee in twee veranderlijken. In het projectieve vlak is het de oplossing van een homogene vergelijking van graad twee in drie veranderlijken, bijvoorbeeld $\{(x:y:z)\ :\ x^2+y^2=z^2\}$.

3. De crisis in de meetkunde van de 19e eeuw

Hoe konden al deze meetkundes worden verenigd onder één noemer? Was er een eenvoudige definitie van wat *een meetkunde* is, die dan alle bijzondere gevallen omvat? Dit was het jeugdwerk van Felix Klein (1849–1925).

Figuur 5: Felix Klein

Zijn eerste uitgangspunt was een (nu vergeten) theorie van Cayley (1821–1895), de zogenaamde *Theory of Quantics*. Cayley was erin geslaagd de vlakke euclidische meetkunde in de projectieve meetkunde in te bedden (min of meer zoals hierboven), maar nog belangrijker: dit te interpreteren als een bijzonder geval van een algemene constructie van een afstandsfunctie op delen van het projectieve vlak. Klein zag in dat het net zo kan met de meetkunde van Bolyai en Lobachevsky. Dit werkt als volgt: neem een reële kegelsnede in het projectieve vlak. Definieer een afstand tussen twee punten P en Q in het binnenste van de kegelsnede als de logaritme van de dubbelverhouding van P en Q met de twee snijpunten van de rechte door P en Q met de kegelsnede: dit levert precies een meetkunde met afstand op die isomorf is met de hyperbolische meetkunde van Lobachevsky. Op dezelfde manier (door een niet-reële kegelsnede te kiezen) kan de meetkunde van Euclides, en de sferische meetkunde in de projectieve meetkunde worden ingebed. Zo was er tenminste al wat structuur in de meetkundige dierentuin gebracht.

Klein schrijft wat later zijn *Erlangen programma*, waarin hij nu alle meetkunde wil ordenen door groepentheorie. Let op: er was historisch gezien op dat moment alleen de theorie van permutatiegroepen, op zijn hoogtepunt in het werk van Jordan, dat Klein goed kende. Expliciet was er nog geen begrip van transformatiegroep, laat staan abstracte groep. Dit gingen Klein (en Lie) dus mee ontwikkelen.

In moderne terminologie zie je volgende transformatiegroepen opduiken. Het affiene vlak heeft als transformatiegroep de inverteerbare matrices $\mathrm{GL}(2)$ (= automorfismen van de tweedimensionale vectorruimte, die dus de oorsprong vasthouden) samen met de translaties (die de oorsprong verplaatsen). Dit levert de zgn. *affiene groep* op, een semidirect product van $\mathrm{GL}(2)$ met $\mathbf{R}^2$. In $\mathrm{GL}(2)$ zit de ondergroep der orthogonale matrices $\mathrm{O}(2)$: dit zijn alle matrices waarvan het inverse het getransponeerde is. Precies deze transformaties behouden (samen met translaties) de begrippen (euclidische) afstand en hoek en het semi-directe product van $\mathrm{O}(2)$ (rotaties en spiegelingen) met $\mathbf{R}^2$ (translaties) heet de *euclidische groep*. Het projectieve vlak heeft als transformatiegroep de zgn. *projectieve groep* $\mathrm{PGL}(3)$ der inverteerbare 3×3 matrices modulo zijn centrum (dat bestaat uit de scalaire matrices die niks doen, want $(a : b : c)$ naar $(\lambda a : \lambda b : \lambda c)$ sturen).

In $\mathrm{PGL}(3)$ is de stabilisator van een gekozen affiene vlak binnen het projectieve vlak isomorf met een affiene groep, en daarin is dan weer de euclidische groep bevat: als je uitrekent welke 3×3-matrices vectoren $(x, y, 0)$ naar $(\lambda x, \lambda y, 0)$ sturen voor zekere $\lambda \neq 0$ dan zijn dit precies (op het centrum na) matrices van de vorm

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

met $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ een matrix in $GL(2)$ en (c, f) een vector (=translatie) in $\mathbf{R}^2$. En het vermenigvuldigen van zulke matrices gebeurt precies op de manier van het semi-directe product van de affiene groep. Ook bij hyperbolische Lobachevsky-meetkunde hoort een transformatiegroep, de zgn. Lorentzgroep L, die een hoofdrol zou gaan spelen in de ontwikkeling van de speciale relativiteitstheorie. Op een andere manier zit in $\mathrm{PGL}(3)$ ook die Lorentzgroep bevat, en dat heeft te maken met het feit dat L de kegelsnede uit de constructie à la Cayley in het model van Klein invariant laat.

Klein's idee: "euclidische, maar ook hyperbolische, meetkunde is bevat in affiene meetkunde is bevat in projectieve meetkunde" wordt hier uitgedrukt door een inclusie van transformatiegroepen, schematisch:

euclidisch	$\subset$	affien	$\subset$	projectief	$\supset$	hyperbolisch
$\mathrm{O}(2)$	$\subset$	$\mathbf{R}^2 \rtimes \mathrm{GL}(2)$	$\subset$	$\mathrm{PGL}(3)$	$\supset$	L

Het principe van het Erlangen programma draait de klassieke situatie (gegeven definities van invarianten met axioma's, dan is er een model en een transformatiegroep) in zekere zin om: *bij elke meetkunde hoort een transformatiegroep, en de interessante begrippen in een meetkunde zijn precies de uitdrukkingen die invariant zijn onder die transformatiegroep.* Zo is bijvoorbeeld afstand interessant in een meetkunde die bij $\mathrm{O}(2)$ hoort, want invariant, maar niet in gewone affiene meetkunde, want er zijn lineaire transformaties die afstand niet bewaren. Zo is de dubbelverhouding van vier punten invariant onder $\mathrm{PGL}(3)$, dus interessant in de projectieve meetkunde. Het wordt een algebraïsche opgave te bepalen wat de invarianten van een gegeven groep zijn.

4. Latere ontwikkelingen

Formeel is de definitie van een Kleinse meetkunde gewoon dit: een Liegroep (de "hoofdgroep") G die transitief en glad werkt op een samenhangende gladde variëteit X. Door transitiviteit wordt X een zgn. *homogene ruimte voor* G: X is als verzameling te schrijven als G/H met H de stabilisator van een gekozen punt in X, en de actie van G op G/H is door linkse vermenigvuldiging. Zinvolle meetkundigen uitspraken betreffen precies invarianten voor de actie van de hoofdgroep of zijn ondergroepen (bijvoorbeeld de projectieve groep, die werkt op het projectieve vlak, of zijn ondergroepen de affiene en euclidische groep).

Men krijgt vaak de indruk dat de nadruk in het Erlangen programma zo sterk op de groep ligt, dat de ruimte vergeten wordt. Er zijn echter niet-isomorfe meetkundes met dezelfde hoofdgroep, bijvoorbeeld driedimensionale anti-de Sitter-ruimte en twee-dimensionale Lorentz-conforme ruimte. Door natuurkundigen als Maldaceña is voor deze ruimten een wonderlijke dualiteit ontdenkt die samenhangt met het holografisch principe van 't Hooft.

De algemene meetkunde van Riemannse variëteiten met variabele metrische tensor overstijgt en vervangt in onze tijd de theorieën van Cayley en Klein, waarin de kromming constant is. Hun blijvend belang ligt vooral in hun immense historische invloed op de ontwikkeling van het concept "abstracte groep" en het "oplossen" van de crisis in de meetkunde.

Tenslotte kan het ook allemaal over andere lichamen dan de reële getallen. Er bestaat bijvoorbeeld een projectief vlak over het lichaam met twee elementen; die heeft dan weer een (eindige!) transformatiegroep. Omgekeerd hoort bij elke eindige groep in de geest van het Erlangen-programma misschien wel een soort "meetkunde", die dan kan worden bestudeerd om informatie over de groep te bekomen. Dit idee staat blijkbaar in het tweede-generatie bewijs voor de classificatie van eindige enkelvoudige groepen erg op de voorgrond.

Is het niet wonderlijk hoe al deze theorieën, waarmee geniale figuren bijna een eeuw lang hebben geworsteld, ondertussen in het standaardcurriculum van de doorsnee wis- en natuurkundestudent voorkomen, en dat we het allemaal (met wat moeite;)) kunnen snappen? Klein schreef zelf tijdens zijn verblijf in Parijs in 1870 samen met Lie, dat het boek van Jordan over permutatiegroepen voor hem *Ein Buch mit sieben Siegeln* was — wij kunnen dit nu allemaal in jaar 2, blok 1.

Referenties

[1] S.V. Duzhin en B.D. Chebotarevsky, Transformation Groups for Beginners, Student Mathematical Library vol. 25, American Mathematical Society, Providence, 2004 (een leuk boek op het niveau van het eerste jaar).

[2] H. Wussing, Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffes, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1969 (dit boek is dé authoriteit op het gebied van de geschiedenis van de groepentheorie).

[3] Sesam Atlas van de wiskunde, deel 1: Grondbeginselen, Algebra en meetkunde, Bosch & Keuning, Baarn, 1977.

[4] Klein Geometry, Erlangen Program, in : Wikipedia (`en.wikipedia.org`).

[5] R. Torretti, Nineteenth Century Geometry, in: Stanford Encyclopedia of Philosophy (`plato.stanford.edu`, 2003).

Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht, Postbus 80.010, 3508 TA Utrecht, Nederland,
email: `cornelis@math.uu.nl`