Gunther Cornelissen
Mathematisch Instituut
Universiteit Utrecht
Postbus 80010
3508 TA Utrecht
cornelis@math.uu.nl

Over Jean-Pierre Serre

Parti d'un exercice, on se retrouve avec une théorie

Op 3 juni 2003 kreeg Jean-Pierre Serre de eerste Abelprijs, een bedrag van € 750.000,–, voor het "spelen van een sleutelrol in het vormen van vele delen van de moderne wiskunde, zoals topologie, algebraïsche meetkunde en getaltheorie". In het stafcolloquium Wiskunde van de Universiteit Utrecht werd een middag gewijd aan leven en werk van deze invloedrijke wiskundige. Gunther Cornelissen vertelt over zijn persoonlijke ervaringen met Serre en wat er op die dag zoal is verteld.

Mijn eerste 'persoonlijke' ervaring met Serre gaat terug tot het jaar van mijn afstuderen. In 1993 ging ik met mijn afstudeerbegeleider Jan Van Geel naar de Journées Arithmétiques in Bordeaux, een getaltheoretische conferentie met wel driehonderd deelnemers. Ik begreep van precies vier voordrachten meer dan een fractie. De eerste had met mijn afstudeeronderwerp te maken, de tweede en derde werden door didactisch onderlegde Nederlandse collega's gehouden, en de vierde door Jean-Pierre Serre. Maar met die laatste was er toch een probleempje: *tijdens* de voordracht wist ik steeds waar het om ging, dacht vaak "aha" of "jawel", maar *achteraf* kreeg ik het verhaal niet meer coherent bij mekaar. *Voilà* lezingen van Serre zoals ik ze sindsdien altijd heb ervaren: over moeilijke thema's, maar helder, duidelijk, met voorbeelden gelardeerd (die vaak als opgaven op het publiek worden losgelaten, en waar venijnige addertjes onder het gras zitten), en bovenal slim, ja zelfs *sluw* opgebouwd en niet te reconstrueren.

Twee jaar later in een klein zaaltje van het Collège de France. Na een vermoeiende autorit met drie Gentse wiskundigen op de achterbank staat Jacques Tits voor ons aan het bord, en belooft eindelijk het circa twintigkoppig publiek een classificatiestelling uit te leggen waarvan hij al vele jaren beweerde "dat ze waar is, maar het bewijs alleen nog maar in zijn hoofd zit" (hierbij met de vinger een karakteristieke beweging makend). Na 10 minuten vraagt een collega wie toch dat vervelende oude mannetje is dat op de eerste rij zit en om de 30 seconden een vraag stelt. Inderdaad, Serre, met zijn tweede typische eigenschap: een hekel aan onduidelijkheid, een voorkeur voor heldere definities en bewijzen.

Het jaar daarop schreef ik mijn eerste artikeltje dat ik naar Serre stuurde voor publicatie in de *Comptes Rendus* van Parijs. Tot mijn grote verbazing kwam er binnen twee dagen een antwoord van drie regels: "*Cher* Cornelissen, bedankt voor uw artikel, pagina 1, regel 15: correctie ..., pagina 3, regel 6: correctie .... *Bien à vous*. J.P. Serre." Eigenschap drie: snel, correct en to-the-point.

Serre zelf aan het woord[1]

Serre werd geboren op 15 september 1926 te Bages in de Pyreneeën. Na studies aan de École Normale Supérieure te Parijs in de naoorlogse jaren werd hij onderzoeker aan het C.N.R.S., promoveerde in 1951, werkte korte tijd in Nancy, en werd in 1956 hoogleraar aan het Collège de France, waar hij in 1994 met emeritaat ging. Hij gaf in 1973 les in Utrecht: in ons gastenboek is zijn handtekening te vinden. Zijn wiskundige output bedraagt circa 180 artikelen en 12 boeken, hij kreeg ettelijke prijzen, waaronder een Fieldsmedaille als 28-jarige. Bovendien was hij sinds 1949 lid van 'Bourbaki', een groep wiskundigen die in de jaren zestig en zeventig een grote invloed hadden op het abstractieniveau van de wiskunde.[2]

Als je Serre vraagt wat wiskunde voor hem is, dan komt als antwoord dat wiskunde een

deel van de werkelijkheid is: niets is meer concreet dan een getal of een boloppervlak. Hij heeft een bijzondere voorkeur voor de toepassing van grote, abstracte theorieën op bijzondere gevallen, waar zij feilloos feiten kunnen voorspellen die anders niet te bewijzen zijn.

Zijn methode van onderzoek beschrijft hij zelf als volgt: eerst en vooral is de vraag naar belang niet relevant. Aan een intrigerend probleem wordt gewerkt, zelfs als het door anderen als een eenvoudige opgave wordt afgedaan. Men denkt na, vindt een methode, en plotseling blijkt die ook op andere terreinen toepasbaar te zijn. *Parti d'un exercice, on se retrouve avec une théorie.* Anderzijds bedenkt hij vaak een methode, waarvan nog niet duidelijk is waar ze goed voor is. De toepassing vind je dan later door rond te kijken in de wiskundige werkelijkheid. Serre vindt het minder leuk om bewust te gaan zitten en stap voor stap een groot programma uit te werken.

De explosie aan wiskundige kennis van de laatste jaren hoef je volgens Serre helemaal niet bij te houden. Als je een specifiek probleem wilt oplossen, is er waarschijnlijk bijzonder weinig relevant bestaand werk te vinden. Maar met een specifieke probleem in gedachten kan je vaak dingen veel beter oppikken. Je leert ook veel beter van je vrienden die iets uitleggen aan het bord dan uit een boekje.

Hij heeft wel een probleem met grote belangrijke stellingen met ingewikkelde bewijzen die niet te verifiëren zijn. Waarschijnlijk moeten we dit soort feiten dan maar aannemen, maar dat manoeuvreert ons wel in een oncomfortabele positie. Nog meer problemen ziet Serre in de differentiaaltopologie, waarbij je op basis van een 2-dimensionaal plaatje zomaar iets moet aannemen over de vijfdimensionale ruimte...

Serre beweert te zijn begonnen met wiskunde op een internaat in Nîmes, waar hij de pesterijen van ouderejaars wist af te houden door wiskundehuiswerk voor ze te maken. Hij vindt het heel belangrijk dat scholieren leren dat wiskunde *bestaat* en niet een doods onderwerp is. Er is een enorme neiging te denken dat er alleen in de natuurkunde of biologie nog open vragen zijn. Hij vindt het echt jammer dat in het traditionele wiskundeonderwijs deze open problemen niet worden vermeld, en dat men te veel angst heeft voor het vertellen van grote, nieuwere stellingen zonder bewijs. Hij doet de vreemde suggestie dat men niet hoeft te proberen jonge mensen voor de wiskunde te winnen: we hebben niet zo veel wiskundigen nodig, dus moeten we scholieren eerst *afraden* wiskunde te doen, maar als ze dan nog steeds willen, mogen ze wel ...(dit lijkt vanuit Nederlands perspectief een Frans luxe-probleem!).

Serre merkt trouwens op dat de beruchte slechte invloed van de abstracte Bourbakimethode op de middelbare school ("moderne wiskunde") voortkomt uit een misbruik van de Bourbaki-boeken, die helemaal niet bedoeld waren om er les uit te geven, niet aan de universiteit, en al helemaal niet op school.

Van Euler naar Serre via Ramanujan

Toen ik hoorde dat Serre de Abelprijs zou gaan krijgen, ben ik meteen aan de slag gegaan om een colloquium-namiddag op te zetten in Utrecht, waar iets over zijn leven en werk zou worden verteld. Ieke Moerdijk vertelde over het proefschrift van Serre en zijn baanbrekend werk in de topologie (berekening van homotopiegroepen van sferen), Frans Oort legde ons uit hoe Serre de algebraïsche meetkunde revolutionair veranderde door het invoeren van de schovencohomologische methode, en tenslotte mocht ikzelf wat tijd wijden aan het werk van Serre in de getaltheorie. We moesten flink schrappen: er is natuurlijk nog veel meer in de vier volumes van zijn *Œuvres (incomplètes!)*. Hieronder het getaltheoretisch verhaal, waarbij ik vrees de precisie van Serre niet te kunnen evenaren.

Euler publiceerde in 1727 (hij was toen 20) een heerlijk analysedictaat onder de titel *Introductio in Analysin Infinitorum, Liber Primus*', en daar vinden wij als lemma 323 de bewering dat

$$\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n q^{\frac{3n^2+n}{2}}.$$

Interessant, omdat de coëfficiënt van q^n aan de linkerkant gelijk is aan $\sum(-1)^\nu$,waarbij de som loopt over alle partities van n in ν ongelijke delen (dat wil zeggen manieren om n als som van ν verschillende natuurlijke getallen te schrijven). Euler heeft dus laten zien dat het aantal partities van een getal n in even ongelijke delen hetzelfde is als dat in oneven ongelijke delen, behalve als n van de vorm $k(3k\pm1)/2$ is (dan verschilt het $(-1)^k$). Zo zijn alle partities van 7 in ongelijke delen gegeven door

$$7=6+1=5+2=4+3=4+2+1.$$

Er zijn er 3 met een even aantal termen en 2 met een oneven aantal termen, en inderdaad is $7=2(3\cdot2+1)/2$.

In het algemeen kan je vragen welke coëfficiënten $p_r(n)$ nul zijn in de reeks

$$\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)^r = \sum_{n=0}^{+\infty} p_r(n)q^n. \qquad (1)$$

Omdat dit zo een moeilijke vraag blijkt te zijn, vragen we liever voor welke r geldt dat $p_r(n) = 0$ voor *bijna alle* n, dat wil zeggen dat de fractie van $n \leq x$ met $p_r(n) \neq 0$ te verwaarlozen is als x groot wordt:

$$\delta_r := \lim_{x\to+\infty} \frac{\#\{n \leq x : p_r(n) \neq 0\}}{\#\{n \leq x\}} = 0.$$

We zeggen dan dat r *lacunair* is, of dat de *dichtheid* δ_r nul is. Of r lacunair is of niet heeft weer allerlei implicaties in de theorie van partities. Laat ons even stilstaan bij de vraag: de linkerkant is gewoon de r-de macht van de reeks van Euler. Kan je niet gewoon de r-de macht van de rechterkant van zijn formule berekenen? Als je dit probeert wordt vrij snel duidelijk dat op een oncontroleerbare manier termen kunnen wegvallen.

Je kan er ook over nadenken of dit een vraag in de combinatoriek is of in de getaltheorie, algebra of analyse. Maak nu misschien een keuze en kijk wat er verder komt.

Wat is bekend? Euler leert ons dat $p_1(n)=0$ tenzij n ongeveer een kwadraat is, dus de dichtheid δ_1 is $\lim \sqrt{x}/x = 0$; dus blijkt 1 lacunair te zijn. In de eerste helft van de 19e eeuw bewees Jacobi dat 3 lacunair is. Er wordt vermoed dat geen enkele oneven $n \geq 5$ lacunair is. Ramanujan bewees rond 1900 dat $2, 4, 6, 8, 10, 14$ en 26 lacunair zijn. Serre bewees in 1985 dat geen enkele andere even r lacunair is.[3]

Such questions are just mathematics

Hoe doet Serre dat? Eerst maak je van het linkerlid in (1) een echte functie van een complexe veranderlijke z door $q = e^{2\pi iz}$ te substitueren. Dan blijkt dit (bijna) een modulaire vorm te zijn, dat is een holomorfe functie die aan oneindig veel symmetriebetrekkingen voldoet.[4] Daardoor blijkt ze in een eindig-dimensionale vectorruimte te zitten. Daarin zit een deelruimte van *CM-vormen*. Die laatste werden door Ribet bestudeerd in 1977 en hij bewees dat voor een CM-vorm $f = \sum a_n q^n$ het al dan niet nul zijn van een coëfficiënt a_p voor p een priemgetal afhangt van een eigenschap van p en een enkel berekenbaar geheel getal d_f dat van f afhangt.[5] Met een stelling van Chebotarëv uit 1922 kan je zien dat aan die eigenschap voor precies de helft van alle priemgetallen is voldaan. Serre merkt op dat dit precies past bij het resultaat van Ramanujan; voor $r = 2, \ldots, 26$ is de geassocieerde modulaire vorm een CM-vorm.

Nu bewijst Serre vrij makkelijk dat voor even r niet op de lijst van Ramanujan de geassocieerde modulaire vorm geen CM-vorm is. Dan komt het moeilijke stuk: in 1981 bewees Serre dat voor een niet CM-vorm, $f = \sum a_n q^n$, de dichtheid van het aantal *priemen*, waarvoor $a_p = 0$, nul is. Hieruit volgt dan ook dat $\delta_r = 0$. Daarvoor transformeert hij eerst het probleem naar iets meetkundigs (via een stelling van hemzelf en Deligne uit 1974), namelijk een bewering over elliptische krommen en veralgemeningen daarvan.[6] Uiteindelijk komt er de theorie van voorstellingen van groepen aan te pas die laat zien dat $a_p = 0$ voor oneindig veel p equivalent is met de bewering dat oneindig veel 2×2-matrices allemaal spoor nul hebben. Serre had zelf rond 1970 al laten zien dat dit niet het geval is als f geen CM-vorm is.[7] Einde bewijs.

Je ziet aan dit voorbeeld precies wat Serre bedoelt met de transformatie van een specifiek (historisch) probleem naar een vraag binnen een grote moderne theorie.

Om tenslotte op de vraag terug te komen wat dit voor wiskunde is: combinatoriek (partitieleer), getaltheorie (vergelijkingen oplossen modulo priemen), meetkunde (elliptische krommen) of analyse (modulaire vormen)? Serre heeft zelf ooit in een interview gezegd dat zulke vragen “geen groepentheorie, topologie of getaltheorie zijn, maar gewoon wiskunde”. Het is onder andere dit brede perspectief wat hem tot een zo groot wiskundige maakt.

Noten

1 gebaseerd op informatie uit *Wolf Prize in Mathematics*, Vol. 2 (p. 523–551), eds. S.S. Chern en F. Hirzebruch, World Scientific Publishing, 2001 en *An Interview With Jean-Pierre Serre* (C.T. Chong en Y.K. Leong), in: J.P. Serre, *Œuvres. Collected papers. IV.* 1985–1998, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

2 lees meer hierover in het uitstekend geschreven werk *Bourbaki — Une société secrète de mathématiciens* door M. Mashaal, Belin, Paris, 2002.

3 *Sur la lacunarité des puissances de η*. Glasgow Math. J. 27 (1985), 203–221.

4 Een gehele even macht η^r van

$$\eta = q^{\frac{1}{24}} \prod (1-q^m)$$

voor $q = e^{2\pi iz}$ is een modulaire vorm op het complexe bovenhalfvlak $\{\mathrm{Im}(z) > 0\}$: hij is holomorf, en voldoet aan oneindig veel symmetrievergelijkingen:

$$f\left(\frac{az+b}{144cz+d}\right) = (-1)^{\frac{1-d}{2}}(cz+d)^{\frac{r}{2}} f(z),$$
$$\forall\ a,b,c,d \in \mathbf{Z} : ad - 144bc = 1.$$

Daarom zit η^r in de heel bijzondere vectorruimte S van alle holomorfe functies die aan deze oneindig veel symmetrievergelijkingen voldoen (plus nog een kleine technische conditie), de zogenaamde spitsenvormen van gewicht $r/2$. Die ruimte blijkt *eindig-dimensionaal* te zijn.

5 Ribet bewees dat er in S een ‘getaltheoretisch’ stukje S_{CM} zit, en dat als $f = \sum a_n q^n \in S_{CM}$, er een berekenbaar geheel getal d_f is zodat voor priemgetallen p geldt: $a_p = 0$ precies als er geen gehele x bestaat met p een deler van $x^2 - d_f$.

6 Voor de iets makkelijkere modulaire vorm $g = \eta^2(z)\eta^2(11z) = q - 2q^2 - 2q^3 + 2q^4 + q^5 + \ldots$ is dat meetkundige object de elliptische kromme $E = \{(x,y)\ :\ y^2 - y = x^3 - x^2\}$, en dan geldt voor $p \neq 2, 3, 11$ het merkwaardige feit dat $p - a_p$ het aantal oplossingen van $y^2 - y = x^3 - x^2$ modulo p is. Inderdaad zijn er bijvoorbeeld precies $5 - 1 = 4$ oplossingen modulo 5, namelijk $(0,0), (0,1), (1,0)$ en $(1,1)$. Op de laatste foto bij het interview met Serre in dit volume zie je hem voor een bord staan met daarop de reële punten van zo een elliptische kromme getekend.

7 De complexe punten van zo een elliptische kromme (=oplossingen (x,y) in het vlak van zulke vergelijkingen) worden een groep als je definieert dat drie punten som nul hebben precies als ze op een rechte lijn liggen (en je een symbool o voor “nul” invoert). Die groep heeft dan ook elementen van eindige orde n, dat wil zeggen punten P zodat $nP = 0$. Er blijken voor elke n twee punten P_n en Q_n te bestaan zodat elke P van orde n een lineaire combinatie $P = a_n P_n + b_n Q_n$ is. Serre bewees tussen 1968 en 1972 dat voor voldoende grote, goed gekozen n (en $f \notin S_{CM}$) een willekeurige lineaire transformatie van die basis P_n, Q_n óók door de actie van een element in de absolute Galoisgroep van de rationale getallen kan worden gegeven. Die Galoisgroep is voortgebracht door elementen waarvan het spoor van de matrix die hun actie op P_n, Q_n beschrijft precies gelijk is aan p min het aantal oplossingen van E modulo p (voor bijna alle p). En dat is precies a_p volgens wat we boven zagen. Maar als bijna alle a_p nul zijn, dan kan je alleen lineaire transformaties met spoor nul krijgen. Dit spreekt dan weer de stelling van Serre uit 1968–1972 tegen. Voor de modulaire vorm g kan je zelfs expliciet bewijzen dat ongeveer 84%van zijn coëfficiënten niet verdwijnen.