Math. Z. (2006) 254: 239–255
DOI 10.1007/s00209-006-0944-8

Mathematische Zeitschrift

Gunther Cornelissen · Ariane Mézard

Relèvements des revêtements de courbes faiblement ramifiés

Received: 9 December 2004 / Accepted: 14 November 2005 / Published online: 25 May 2006

Abstract Let X be a smooth projective curve over a perfect field of characteristic $p > 0$ and G a finite group of automorphism of X. Let $\nu(X, G)$ be the characteristic of the versal equivariant deformation ring $R(X, G)$ of (X, G). When the ramification is weak (i.e., all second ramification groups are trivial), we prove that $\nu(X, G) \in \{0, p\}$ and we compute $R(X, G)$.

Résumé Soit X une courbe projective lisse sur un corps parfait de caractéristique $p > 0$ et G un groupe fini d'automorphismes de X. Nous considérons la caractéristique $\nu(X, G)$ de l'anneau versel $R(X, G)$ de déformations équivariantes de (X, G). Dans le cas d'une ramification faible (où tous les seconds groupes de ramification sont triviaux), nous démontrons que $\nu(X, G) \in \{0, p\}$ et nous calculons $R(X, G)$.

1 Introduction

Soit X une courbe algébrique projective lisse de genre g sur un corps parfait k de caractéristique $p > 0$ munie de l'action d'un groupe fini d'automorphismes $G \subset \mathrm{Aut}_k X$. Soit $W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt de k et $\widehat{\mathscr{C}_k}$ la catégorie des $W(k)$-algèbres locales noethériennes complètes de corps résiduel k. Soit R un objet de $\widehat{\mathscr{C}_k}$. Un relèvement équivariant du couple (X, G) à R est une courbe $\tilde{X}$ propre et lisse sur R telle que $G \subset \mathrm{Aut}_R \tilde{X}$ et telle que l'isomorphisme $\tilde{X} \times_R k \simeq X$ soit G-équivariant. Si la ramification est modérée, il existe un relèvement de (X, G) à

G. Cornelissen
Universiteit Utrecht, Mathematisch Instituut, Postbus 80.010, 3508 TA Utrecht, Nederland
E-mail: cornelis@math.uu.nl

A. Mézard (✉)
Université Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex, France
E-mail: ariane.mezard@math.u-psud.fr

un anneau de $\widehat{\mathscr{C}_k}$ de caractéristique zéro ([Gr]). Lorsque la ramification est sauvage, la situation est beaucoup plus mystérieuse : il n'existe pas forcément de relèvement de (X, G) en caractéristique zéro.

Exemple Supposons $p \geq 3$. Considérons la courbe X sur $k = \overline{\mathbf{F}}_p$ normalisée de la courbe d'équation $(x^p - x)(y^p - y) = 1$. La courbe X a pour genre $g = (p-1)^2$. Soit $G = (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^2 \rtimes D_{p-1}$ où D_n désigne le groupe diédral d'ordre $2n$. Nous avons $G \subset \mathrm{Aut}_k X$. Un relèvement $(\tilde{X}, G)$ de (X, G) en caractéristique zéro aurait donc au moins $|G|$ automorphismes. Ceci est exclu pour $p \geq 41$ car, d'après la borne de Hurwitz, $|\mathrm{Aut}\, \tilde{X}| \leq 84(g-1)$. Matignon a démontré dans [Ma] que (X, G) se relève en caractéristique zéro seulement pour $p = 2, 3$.

Une question naturelle se pose alors : le couple (X, G) se relève-t-il à un objet de $\widehat{\mathscr{C}_k}$ de caractéristique p^2 ? Plus généralement, quelle est la plus grande puissance p^n de p pour laquelle il existe un relèvement de (X, G) à un objet R de $\widehat{\mathscr{C}_k}$ de caractéristique p^n ? Traduisons ces questions dans le formalisme de la théorie des déformations : soit $R(X, G)$ l'anneau versel de déformations équivariantes de (X, G). Si $W(k) \subset R(X, G)$, nous posons $\nu(X, G) = 0$. Sinon nous posons $\nu(X, G) = p^{n+1}$ où $n \in \mathbf{N}$ est le plus grand entier tel que $p^n \neq 0$ dans $R(X, G)$. Il s'agit donc de calculer $\nu(X, G)$.

Remarque 1.1 L'entier $\nu(X, G)$ est la caractéristique de $R(X, G)$ au sens suivant: un anneau A non nul d'unité 1 a pour caractéristique $n \in \mathbf{N}$ si n est un générateur positif du noyau de l'unique homomorphisme $\mathbf{Z} \to A : 1 \mapsto 1$ (voir [Bo] §8, no. 8).

L'objet de cet article est le calcul de $\nu(X, G)$ pour une action faiblement ramifiée au sens suivant : soit P un point de ramification de la courbe X. Soit G_P le stabilisateur de P d'uniformisante x. Les groupes de ramification de G_P sont notés

$$G_{P,0} = G_P = \{\sigma \in G, \sigma P = P\},\ G_{P,i} = \{\sigma \in G, \mathrm{ord}_x(\sigma x - x) > i\},\ i > 0.$$

L'action de G sur X est dite *faiblement ramifiée* si tous les groupes de ramification $G_{P,2}$ sont triviaux. Notons que la ramification modérée (i.e. $G_{P,1} = 0$) implique la ramification faible. Une action faible est donc une action sauvage la “moins ramifiée possible”.

Si l'action de G sur X est faiblement ramifiée alors pour tout point P de ramification de la courbe, il existe $t \geq 0$ et n divisant $p^t - 1$ tels que

$$G_P = (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^t \rtimes \mathbf{Z}/n\mathbf{Z},$$

où $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^t$ est identifié à $\mathbf{F}_q$ pour $q = p^t$, l'action semi-directe est donnée par μ_n sur $\mathbf{G}_a$ (voir [CoKa2] §1, [Se] VI.2) et G_P est de conducteur 1. Remarquons que l'action d'un groupe fini sur une courbe ordinaire est toujours faiblement ramifiée (voir [Na]). Le résultat principal de cet article est le théorème suivant :

Théorèm 1.2 *Soit X une courbe projective lisse définie sur un corps parfait de caractéristique $p > 0$ et munie d'une action faiblement ramifiée de groupe G. Alors l'une des propriétés suivantes est satisfaite :*

a. *$R(X, G)$ est annulé par p ;*
b. *les groupes de ramification de G non triviaux d'ordre divisible par p sont de l'une des trois formes suivantes :*
   i. *groupe cyclique $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ d'ordre p ;*
   ii. *groupe diédral $D_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \rtimes \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ d'ordre $2p$ si $p > 2$ ou $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$ si $p = 2$;*
   iii. *groupe tétraédrique $A_4 = (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2 \rtimes \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ pour $p = 2$.*

Dans le cas b., l'anneau $R(X, G)$ est d'intersection complète relative sur $W(k)$; en particulier $R(X, G)$ est plat sur $W(k)$.

Nous obtenons ainsi $\nu(X, G) \in \{0, p\}$ pour une action faiblement ramifiée.

Le plan de cet article est le suivant. La seconde partie traduit le résultat principal en un théorème "local" (2.1). La troisième partie contient la démonstration de ce théorème "local". Nous avons reporté dans la quatrième partie les conséquences du théorème 1.2 et des questions ouvertes qu'il suscite. En particulier, en corollaire du théorème 1.2, nous menons à bien le calcul des anneaux universels de déformations lorsque l'action est faiblement ramifiée (corollaire 4.1).

La collaboration entre les deux auteurs a été initiée lors d'un séjour très enrichissant de A. Mézard à l'université de Leiden. A. Mézard remercie B. de Smit et B. Edixhoven de leur accueil. Les auteurs remercient le rapporteur dont les remarques ont permis de clarifier la rédaction de cet article.

2 Du global au local

Soit k un corps parfait de caractéristique $p > 0$. Soit $\mathscr{C}_k$ la catégorie des $W(k)$-algèbres locales artiniennes de corps résiduel k. Ainsi $\mathscr{C}_k$ est une sous-catégorie pleine de la catégorie $\widehat{\mathscr{C}_k}$ des $W(k)$-algèbres locales noethériennes complètes de corps résiduel k. Nous notons $\mathscr{M}_A$ l'idéal maximal d'un objet A de $\widehat{\mathscr{C}_k}$. Soit X une courbe projective lisse sur k et G un groupe fini d'automorphismes de X. Notons $D(G, X)$ le foncteur des déformations équivariantes de (X, G) de $\mathscr{C}_k$ dans la catégorie des ensembles qui à un objet R de $\mathscr{C}_k$ associe l'ensemble des relèvements de (X, G) à R à isomorphisme équivariant près. Nous savons que $D(X, G)$ admet un anneau versel $R(X, G)$ de déformations (équivariantes) dans $\widehat{\mathscr{C}_k}$. Rappelons que $\nu(X, G) = 0$ signifie qu'il existe un relèvement de (X, G) en caractéristique zéro. Par ailleurs $\nu(X, G) = p^n$ signifie qu'il existe un relèvement de (X, G) à un objet A de $\mathscr{C}_k$ de caractéristique p^n et que pour tout objet A' de $\mathscr{C}_k$ de caractéristique p^{n+1}, $D(G, X)(A') = \emptyset$.

D'après le principe local-global, l'étude de $D(X, G)$ se localise aux points de ramification $\{P_1, \ldots, P_r\} \subset X$:

$$R(X, G) \simeq R_1 \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} R_r[[U_1, \ldots, U_N]]$$

où R_i est l'anneau versel du foncteur $D_{G_{P_i}}$ des déformations infinitésimales de l'action du stabilisateur G_{P_i} de P_i sur le complété de l'anneau local de X en P_i $(1 \le i \le r)$ et N est la dimension de l'espace des déformations localement triviales (voir Corollaire 3.3.5 [BeMé]). Le calcul de la caractéristique $\nu(X, G)$ se ramène donc au calcul des caractéristiques des anneaux R_i.

Dans la partie suivante, nous allons démontrer le théorème "local" suivant (voir Propositions 3.7, 3.8 et 3.9) :

Théorèm 2.1 *Soit k un corps parfait de caractéristique $p > 0$ et $G \subset \mathrm{Aut}\, k[[y]]$ une action faible ($G_2 = 1$).*
L'action de G se relève en caractéristique zéro si G est de l'une des trois formes suivantes :

i. *groupe cyclique $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ d'ordre p ;*
ii. *groupe diédral $D_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \rtimes \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ d'ordre $2p$ si $p > 2$ ou $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$ si $p = 2$;*
iii. *groupe tétraédrique $A_4 = (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2 \rtimes \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ pour $p = 2$.*

Dans tous les autres cas, l'action de G ne se relève pas en caractéristique p^2; donc l'anneau R_G versel de déformations de l'action locale de G satisfait $\mathrm{car}(R_G) \in \{0, p\}$ dans tous les cas. □

D'après le principe local-global, le théorème 2.1 donne le résultat global annoncé dans l'introduction (théorème 1.2).

Remarque 2.2 Les démonstrations impliquent *a posteriori* que tout relèvement d'une action faiblement ramifié sur $k[[y]]$ consiste (à conjugaison près) en une homographie en y : le relèvement (uni)verselle a en effet cette propriété. Nous ne connaissons pas de démonstration directe de cette propriété, sauf pour les relèvements à un anneau hensélien équicaractéristique (voir [CoKa2], 1.18 et Anhang B).

3 Étude locale

Dans la suite du paragraphe §3, nous nous plaçons en un point $P \in X$ de ramification sauvage (le cas d'une action modérée est bien connu, [Gr]). Pour alléger les notations, écrivons $G = G_P$. Nous supposons que l'action est faible : $G_2 = 1$. Il existe donc $t \geq 1$ et n divisant $p^t - 1$ tels que

$$G = (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^t \rtimes \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$$

avec une action de conducteur 1 (voir [CoKa2] §1, [Se] VI.2). Notons $k[[y]]$ l'anneau local complété de la courbe X au point P et M la fibre complétée du faisceau tangent au point P. L'espace tangent au foncteur de déformations infinitésimales D_G est $H^1(G, M)$. La fibre M avec action de G s'identifie au $k[[y]]$-module des champs de vecteurs formels $k[[y]]\frac{d}{dy}$ ([BeMé] §2).

3.1 L'action équicaractéristique de G

Nous commençons par supposer que $n = 1$. A conjugaison près par un automorphisme continu de la clôture algébrique $\overline{k((y))}$, l'action de G est de la forme

$$G = \{\sigma_u\}_{u \in V} \text{ avec } \sigma_u(y) = \frac{y}{1 + uy} \tag{1}$$

où V décrit un espace vectoriel $V \subseteq k$ de dimension t sur $\mathbf{F}_p$ (voir [CoKa1] ou [CoKa2]). Deux représentations conjuguées de G dans $\mathrm{Aut}_k\, k[[y]]$ ayant même anneau versel de déformations (infinitésimales), nous nous ramenons au cas où l'action de G est de la forme (1). Autrement dit l'action de G est donnée, à équivalence près, par un plongement $G \hookrightarrow \mathrm{PGL}_2(k)$.

Un relèvement de G à un anneau de $\mathscr{C}_k$ de caractéristique quelconque donne par réduction modulo p un relèvement équicaractéristique. Nous connaissons la déformation verselle équicaractéristique (voir §3.2). Il s'agit donc de calculer explicitement les relèvements en caractéristique mixte de cette déformation verselle. On utilisera la connaissance de l'anneau versel de déformation d'un groupe cyclique (voir §3.3). Le cas n quelconque (§3.6) découle naturellement du cas $n = 1$ (§3.4 – §3.5).

Remarque 3.1 Dans cet article, les égalités matricielles, traduisant des égalités entre homographies, doivent être lues dans PGL_2, c'est-à-dire à multiplication par un scalaire non nul près.

3.2 Anneau de déformations équicaractéristiques

Rappelons les résultats principaux de [CoKa1] §4 :

Proposition 3.2 *Soit*

$$G = (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^t \cong \{\sigma_u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{pmatrix} : u \in V\},\ pour\ V = \bigoplus_{i=1}^{t} \mathbf{F}_p \cdot u_i .$$

Si $p \geq 3$ et $t > 1$, l'anneau versel de déformations équicaractéristiques de $G \subset \mathrm{Aut}\, k[[y]]$ est

$$R_G/p = k[[\alpha, x_1, \ldots, x_{t-1}]]/\langle \alpha^{\frac{p-1}{2}}, \alpha x_1, \ldots, \alpha x_{t-1} \rangle .$$

La déformation verselle équicaractéristique est la classe d'isomorphisme du relèvement défini par $\{\tilde{\sigma}_u\}_{u \in V}$ où

$$\tilde{\sigma}_u = \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{\frac{p-1}{2}} \binom{u+j-1}{2j} \alpha^j & \alpha \sum_{j=0}^{\frac{p-1}{2}-1} \binom{u+j}{2j+1} \alpha^j \\ \sum_{j=0}^{\frac{p-1}{2}-1} \binom{u+j}{2j+1} \alpha^j + \beta & \sum_{j=0}^{\frac{p-1}{2}} \binom{u+j}{2j} \alpha^j \end{pmatrix},$$

et

$$\beta = \sum_{i=1}^{t-1} x_i u_i - \left(\sum_{i=1}^{t-1} x_i \right) u_t$$

et pour $x \in k$ et $n \in \{0, \ldots, p-1\}$, le coefficient $\binom{x}{n}$ est défini par

$$\binom{x}{n} = \frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!} .$$

Remarque 3.3 Si $p = 3$, le problème est rigide ($R_G/3 = k$) et $\alpha = 0$. Si $p = 2$, le résultat est plus compliqué, mais ne sera pas utilisé ici.

Remarque 3.4 Avec les notations de la proposition, les relations dans R_G/p impliquent que $\alpha\beta = 0$. Si l'on pose donc

$$C = \sum_{j=0}^{\frac{p-1}{2}-1} \binom{u+j}{2j+1} \alpha^j + \beta,$$

alors les matrices $\tilde{\sigma}_u$ sont de la forme $\begin{pmatrix} A & \alpha C \\ C & A + \alpha C \end{pmatrix}$ pour certains $A, C \in R_G/p$, quelque soit β : nous utiliserons essentiellement ce fait dans les démonstrations.

3.3 Anneau de déformations d'un groupe cyclique

Rappelons les résultats connus pour $G = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ ([BeMé], théorème 4.2.8) :

Proposition 3.5 *Soit $G = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} = \langle\sigma\rangle \subset \mathrm{Aut}\, k[[y]]$ avec $\sigma(y) = \frac{y}{y+1}$.*

i. Si $p \geq 3$, l'anneau versel de déformations infinitésimales de $G \subset \mathrm{Aut}\, k[[y]]$ est $R_G = W(k)[[\alpha]]/\psi(\alpha)$ avec

$$\psi(\alpha) = \sum_{\ell=0}^{\frac{p-1}{2}} \binom{p-1-\ell}{\ell} (-1)^\ell (\alpha+4)^{\frac{p-1}{2}-\ell}. \tag{2}$$

La déformation verselle est la classe d'isomorphisme du relèvement défini par

$$\widetilde{\sigma}(y) = \frac{y+\alpha}{y+\alpha+1}.$$

En particulier, si $p = 3$, $\psi(\alpha) = \alpha + 3$, $R_G = W(k)$, le problème de déformation est rigide et la déformation verselle est définie par

$$\widetilde{\sigma}(y) = \frac{y-3}{y-2}.$$

ii. Si $p = 2$, $R_G = W(k)[[\alpha]]$ et la déformation verselle est définie par

$$\widetilde{\sigma}(y) = \frac{y+\alpha}{y-1}.$$

3.4 Cas $n = 1$, $p \geq 3$

Soit $G = (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^t$ avec $t \geq 2$ et $p \geq 3$.

Lemme 3.6 *Soit* $H = (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^2 = \langle \sigma, \tau \rangle \subset \operatorname{Aut} k[[y]]$ *un* p*-groupe commutatif* $(p \geq 3)$*, où*

$$\sigma(y) = \frac{y}{1+y}, \quad \tau(y) = \frac{y}{uy+1},$$

pour $u \in k - \mathbf{F}_p$*. Alors l'anneau versel* R_H *des déformations infinitésimales de* $H \subset \operatorname{Aut} k[[y]]$ *est de caractéristique* p*.*

Preuve D'après §3.3, $W(k)[[\alpha]]/(\psi(\alpha))$ est l'anneau versel de déformation du sous-groupe $\langle \sigma \rangle \subset \operatorname{Aut} k[[y]]$ et la déformation verselle de $\langle \sigma \rangle \subset \operatorname{Aut} k[[y]]$ est donnée par la classe d'isomorphisme du relèvement défini par $\widetilde{\sigma}(y) = \frac{y+\alpha}{y+\alpha+1}$. Il existe donc un morphisme

$$W(k)[[\alpha]]/(\psi(\alpha)) \to R_H$$

qui induit la déformation du sous-groupe $\langle \sigma \rangle$ à R_H. Par conséquent la déformation verselle de $H \subset \operatorname{Aut} k[[y]]$ à R_H est donnée sur $\langle \sigma \rangle$ par le relèvement

$$m(y) = \frac{y+\alpha'}{y+\alpha'+1},$$

pour $\alpha' \in R_H$ avec $\psi(\alpha') = 0$. Par abus de notation, nous écrivons α pour α' dans la suite.
De plus, d'après §3.2, la réduction modulo p de la restriction à $\langle \tau \rangle$ de la déformation verselle de H à R_H est définie par

$$\bar{n}(y) = \frac{Ay + \tilde{\alpha}C}{Cy + A + \tilde{\alpha}C},$$

où A et C sont les polynômes en $\tilde{\alpha}$ et u définis au §3.2 et $\tilde{\alpha} \in R_H/p$.

Égalité des paramètres des deformations. Nous commençons par démontrer que $\tilde{\alpha} \equiv \alpha$ dans R_H/p. D'après §3.2, la déformation verselle équicaractéristique est donnée par des relèvements de la forme

$$\widetilde{\sigma}_v = \begin{pmatrix} A & \tilde{\alpha}C \\ C & A + \tilde{\alpha}C \end{pmatrix}.$$

Or l'image $\overline{m}$ de m dans R_H/p est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 1+\alpha \end{pmatrix}.$$

Comme cette matrice doit être égale à une des matrices $\tilde{\sigma}_v$ dans $PGL(2)$, on trouve que pour un tel $\tilde{\sigma}_v$, $A = C$ et alors aussi $\alpha \equiv \tilde{\alpha}$ dans R_H/p.

Supposons $R_H \neq R_H/p$ et notons $R = R_H/p^2$. Notons

$$n(y) = \frac{Ay + \alpha C}{Cy + \alpha C + A}$$

avec A, C des relèvements quelconques de A et C à R. Soit

$$T(y) := n(y) + pS(y) \text{ pour } S \in R[[y]]$$

un relèvement arbitraire de $\bar{n}(y)$ à $R[[y]]$.
Il s'agit de voir que pour tout $S \in R[[y]]$, $\langle m, T \rangle \subseteq \operatorname{Aut} R[[y]]$ ne définit pas un relèvement du *groupe* H. Pour parvenir à une contradiction, nous allons exprimer les relations dans H en terme de la série S tronquée à un certain ordre en y.

Relation de commutation et équation fonctionnelle. La relation de commutation $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$ se traduit dans $R[[y]]$ par

$$m \circ (n + pS) = (n + pS) \circ m.$$

D'où

$$\frac{n(y) + pS(y) + \alpha}{n(y) + pS(y) + \alpha + 1} = n(m(y)) + pS(m(y)).$$

Or un calcul direct montre que $n \circ m = m \circ n$ dans $R[[y]]$, soit encore

$$\frac{n(y) + pS(y) + \alpha}{n(y) + pS(y) + \alpha + 1} = \frac{n(y) + \alpha}{n(y) + \alpha + 1} + pS(m(y)).$$

D'où l'équation fonctionnelle satisfaite par S

$$S(m(y)) = (n(y) + \alpha + 1)^{-2} S(y),$$

dans $R/p[[y]]$.

Solution tronquée de l'équation fonctionnelle. Continuons les calculs en introduisant une racine de ψ dans une extension de $W(k)$ (projetée dans R). Soit donc K le corps des fractions de $W(k)$. Soit L le corps de décomposition de $\psi(X)$ sur K. Soit π un idéal premier de L au-dessus de p. Soit L_π le localisé de L en π, d'anneau des entiers $\mathcal{O}$. Soit a une racine de ψ dans L_π. Comme ψ est unitaire, $a \in \mathcal{O}$. Nous observons que p est ramifié dans L, car $\psi(X) = X^{\frac{p-1}{2}}$ mod p. L'équation fonctionnelle de S mod p implique la même équation pour S mod π, $\alpha = a = 0 \bmod \pi$; donc

$$S\Big(\frac{y}{y+1}\Big) = \Big(\frac{y}{uy+1} + 1\Big)^{-2} \cdot S(y) \text{ dans } R/\pi[[y]]. \tag{3}$$

La substitution de $S(y) = c_0 + c_1 y + c_2 y^2 + O(y^3)$ dans cette équation donne les formules suivantes :

$$\begin{cases} 2c_0 = 0, \\ c_1 - (2u + 3)c_0 = 0. \end{cases}$$

Comme $p \neq 2$, nous obtenons $c_0 = c_1 = 0$. Nous pouvons donc supposer que $S(y) = cy^2 \bmod (\pi, y^3)$ pour une constante c convenable.

LINÉARISATION DE LA CONDITION D'ORDRE p. Nous continuons à écrire $n(y)$ pour $n(y)|_{\alpha=a}$. Exprimons à présent que $T(y) := n(y) + pS(y)$ est d'ordre p dans R. Montrons par récurrence sur $0 \leq i \leq p$ que :

$$T^i(y) \equiv n^i(y) + picy^2 \bmod (p\pi, y^3). \tag{4}$$

C'est vrai pour $i = 1$. Écrivons

$$n^k(y) = \frac{A_k y + B_k}{C_k y + D_k}.$$

Alors, modulo y^3 on trouve :

$$\begin{aligned} T^{i+1}(y) &\equiv T^i(T(y)) \equiv n^i(T(y)) + pic(n(y) + pcy^2)^2 \\ &\equiv n^i(n(y) + pcy^2) + picn(y)^2 \\ &\equiv \frac{A_i n(y) + B_i + A_i pcy^2}{C_i n(y) + D_i + pcC_i y^2} + picy^2 \bmod (p\pi, y^3). \end{aligned}$$

Utilisons l'identité

$$\frac{1}{r + ps} \equiv \frac{1}{r} - p\frac{s}{r^2} \bmod p\pi$$

pour développer le dénominateur:

$$\begin{aligned} T^{i+1}(y) \equiv & \frac{A_i n(y) + B_i}{C_i n(y) + D_i} + \frac{A_i pcy^2}{C_i n(y) + D_i} \\ & -pcC_i y^2 \frac{A_i n(y) + B_i}{(C_i n(y) + D_i)^2} + picy^2 \bmod (p\pi, y^3). \end{aligned}$$

Modulo $p\pi$, toute expression de la forme $pX(a)$ peut être remplacée par $pX(0)$:

$$\begin{aligned} T^{i+1}(y) &\equiv n^{i+1}(y) + pcy^2\left(\frac{uy+1}{(i+1)uy+1} - \frac{iuy(uy+1)}{((i+1)uy+1)^2} + i\right) \\ &\equiv n^{i+1}(y) + pc(i+1)y^2 \bmod (p\pi, y^3), \end{aligned}$$

et (4) est démontrée. Ceci implique en particulier que

$$T^p(y) \equiv n^p(y) \bmod (p\pi, y^3),$$

et la condition que $T^p(y) = y$ se traduit par la condition matricielle

$$n^p(y) \equiv \mathbf{1} \bmod (p\pi, y^3).$$

Observons maintenant que pour une homographie H arbitraire

$$H(y) := \frac{ay + b}{cy + d} \text{ on a } H(y) = \frac{b}{d} + \frac{ad - bc}{d^2} \cdot y + \frac{c(bc - ad)}{d^3} y^2 + O(y^3),$$

donc $H(y) = y \bmod y^3$ équivaut à $b = 0, a = d, c = 0$, c.-à-d. $H(y) = y$. La condition matricielle est donc équivalence à

$$n^p(y) \equiv \mathbf{1} \bmod p\pi.$$

Diagonalisation de la matrice d'ordre p. Nous allons réinterpréter cette condition en diagonalisant la matrice n, d'abord formellement. Une matrice de la forme $n = \begin{pmatrix} A & aC \\ C & A+aC \end{pmatrix}$, où A et C sont des variables formelles, a pour polynôme caractéristique

$$X^2 - (2A + aC)X + A^2 + aAC - aC^2$$

de discriminant $aC^2(a+4)$. Les valeurs propres sont donc

$$\lambda_u^{\pm} = A - C + Ce^{\pm i\theta}$$

avec la notation formelle

$$e^{\pm i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta = Y \pm \sqrt{Y^2 - 1} \text{ pour } Y = \cos\theta = 1 + a/2.$$

Comme $a \neq 4$, n est diagonalisable. La matrice n est d'ordre p si et seulement si $(\lambda_u^{\pm})^p = 1$. Ces conditions se traduisent par

$$P(a) = Q(a) = 0, \tag{5}$$

pour

$$P(X) = \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} (A-C)^{p-j} C^j T_j(X) - 1$$
$$Q(X) = \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} (A-C)^{p-j} C^j S_{j-1}(X)$$

où T_j et S_{j-1} sont les polynômes de Tchebychef respectivement de première et de seconde espèce définis par $e^{ij\theta} = T_j(\cos\theta) + i\sin\theta S_{j-1}(\cos\theta)$ et donnés explicitement par les formules :

$$T_j(X) = \frac{1}{2} \sum_{\ell=0}^{\lceil j/2 \rceil} \binom{j-\ell}{\ell} \frac{j}{j-\ell} (-1)^\ell (2X)^{j-2\ell}$$
$$S_{j-1}(X) = \sum_{\ell=0}^{\lceil (j-1)/2 \rceil} \binom{j-1-\ell}{\ell} (-1)^\ell (2X)^{j-1-2\ell}$$

Les équations (5) donnent des relations universelles pour qu'une matrice formelle de la forme prescrite soit d'ordre p.

Calcul de la relation explicite d'ordre p. Nous nous plaçons maintenant dans la situation où A et C ont les valeurs prescrites par le relèvement de n à R. Calculons d'abord $Q(a)$ modulo $p\pi$. Nous constatons que $S_{-1} = 0$, $S_{p-1}(a) = 0$, car $\psi(X)$ est, par définition, le générateur de l'idéal

$$\langle T_p(1 + X/2) - 1, S_{p-1}(1 + X/2)\rangle,$$

[BeMé] lemme 4.2.6. En outre, p divise $\binom{p}{j}$ pour $1 \leq j \leq p-1$. Pour calculer $Q(a)$ modulo $p\pi$, nous pouvons donc remplacer A, C, $(S_{j-1})_{0\leq j\leq p}$ par leurs valeurs modulo π. Or $S_{j-1} \equiv j \mod \pi$. Alors

$$\begin{aligned}
Q(a) &= p\left(\sum_{j=1}^{p-1} \frac{j}{p}\binom{p}{j}(A - C)^{p-j}C^j\right) \mod p\pi \\
&= p\left(\sum_{j=1}^{p-1} \binom{p-1}{j-1}(A - C)^{p-1-(j-1)}C^j\right) \mod p\pi \\
&= pC\left(\sum_{k=0}^{p-2} \binom{p-1}{k}(A - C)^{p-1-k}C^k\right) \mod p\pi \\
&= pC\left(A^{p-1} - C^{p-1}\right) \mod p\pi.
\end{aligned}$$

Si $Q(a) = 0 \mod p\pi$, il faut que $C(A^{p-1} - C^{p-1}) = 0 \mod \pi$, d'où $C = \zeta A$ pour un $\zeta \in \mathbf{F}_p$. Mais alors la matrice de n est de la forme

$$\begin{pmatrix} A & aC \\ C & A + aC \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 & a\zeta \\ \zeta & 1 + a\zeta \end{pmatrix} \mod p,$$

ce qui implique que $C \mod p \in \mathbf{F}_p$. Or $C \mod (p, \mathfrak{m}_{R/p}) \equiv u \notin \mathbf{F}_p$, ce qui conduit à une contradiction. □

Proposition 3.7 *Soit $p \geq 3$. Supposons que l'action de $G = (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^t$, $t \geq 2$ sur $k[[y]]$ soit faiblement ramifiée. Alors l'anneau versel R_G de déformations infinitésimales est de caractéristique p.*

Preuve Nous pouvons normaliser l'action de $G \subset \operatorname{Aut} k[[y]]$ de façon à ce qu'il existe σ, τ deux éléments de G tels que

$$\sigma(y) = \frac{y}{1 + y}, \quad \tau(y) = \frac{y}{uy + 1},$$

pour $u \in k - \mathbf{F}_p$. Soit H le sous-groupe de G engendré par σ et τ. D'après le lemme 3.6, l'anneau versel de déformations infinitésimales R_H est de caractéristique p. Par versalité de R_H, il existe un morphisme $R_H \to R_G$. Donc R_G est de caractéristique p. □

3.5 Cas $n = 1$, $p = 2$

Proposition 3.8 *Supposons $p = 2$. Soit $t \geq 1$ et $G = (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^t \subset \operatorname{Aut} k[[y]]$ de conducteur 1.*

i. Si $t \leq 2$, alors l'action de G se relève en caractéristique zéro, et $\operatorname{car}(R_G) = 0$.
ii. Si $t \geq 3$, alors l'action de G ne se relève pas en caratéristique p^2, et $\operatorname{car}(R_G) = p$.

Preuve i. Par conjugaison, nous pouvons supposer que $H = \langle \sigma_1 \rangle$ est un sous-groupe de G. D'après §3.3, la déformation verselle de $H \subset \operatorname{Aut} k[[y]]$ à $R_H = W(k)[[\alpha]]$ est donnée par

$$\tilde{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(D'où i. pour $t = 1$). Supposons $t = 2$. Par conjugaison, nous pouvons supposer qu'il existe $\sigma_u \in G$ d'ordre 2 tel que

$$\sigma_u(y) = \frac{y}{u + y}$$

avec $u \in k - \mathbf{F}_2$. Soit

$$\tilde{\sigma}_u = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha\tilde{u} - 2 \\ \tilde{u} & -1 \end{pmatrix}$$

pour $\tilde{u}$ un relèvement de u à $W(k)$. Alors un tel $\tilde{\sigma}_u$ est la seule matrice qui satisfait $\tilde{\sigma}_u^2 = \tilde{\sigma}_1^2 = 1$ et $\tilde{\sigma}_u\tilde{\sigma}_1 = \tilde{\sigma}_1\tilde{\sigma}_u$. Par conséquent $G = (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$ se relève en caractéristique 0 à $W(k)[[\alpha]]$. Ce relèvement est versel car $\dim H^1(G, M) = 1$.

ii. Supposons $t \geq 3$. Soient $\sigma_1, \sigma_u, \sigma_v$ des éléments de $G \subset \operatorname{Aut} k[[y]]$ avec

$$\sigma_1(y) = \frac{y}{1 + y}, \quad \sigma_u(y) = \frac{y}{u + y}, \quad \sigma_v(y) = \frac{y}{v + y},$$

avec $\{1, u, v\}$ $\mathbf{F}_2$-linéairement indépendants. Soit R_G l'anneau versel de déformations infinitésimales de G. Par versalité, nous avons des morphismes

$$W(k)[[\alpha]] \to R_G, \quad W(k)[[\beta]] \to R_G$$

qui induisent la déformation verselle à R_G donnée par les relèvements

$$\tilde{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\sigma}_u = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha\tilde{u} - 2 \\ \tilde{u} & -1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\sigma}_v = \begin{pmatrix} 1 & -\beta\tilde{v} - 2 \\ \tilde{v} & -1 \end{pmatrix}$$

avec $\alpha, \beta \in R_G$ (les égalités sont dans $PGL(2)$). D'où $\alpha = \beta$. De plus les équations de commutation

$$\tilde{\sigma}_1\tilde{\sigma}_u = \lambda_{u,1}\tilde{\sigma}_u\tilde{\sigma}_1, \;\; \tilde{\sigma}_1\tilde{\sigma}_v = \lambda_{v,1}\tilde{\sigma}_v\tilde{\sigma}_1, \;\; \tilde{\sigma}_u\tilde{\sigma}_v = \lambda_{u,v}\tilde{\sigma}_v\tilde{\sigma}_u$$

sont satisfait exactement pour $\lambda_{u,1} = \lambda_{v,1} = \lambda_{u,v} = -1$ et

$$2\alpha = -2\frac{\tilde{u} + \tilde{v} - 1}{\tilde{u}\tilde{v}}$$

mais en caractéristique 4, pour cette valeur de α, $\tilde{\sigma}_v = \tilde{\sigma}_1\tilde{\sigma}_u$. Il n'existe donc pas de relèvement de $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^3$ en caractéristique 4.

□

3.6 Cas $n > 1$

Proposition 3.9 *Soit* $G = (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^t \rtimes \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \subset \mathrm{Aut}\, k[[y]]$ *une action faiblement ramifiée* ($G_2 = 1$) *avec* $n > 1$ *et* n *divisant* $p^t - 1$.

i. *Si* $t > 1$, *l'action de* G *se relève en caractéristique* p^2 *si et seulement si* $p = 2$ *et*

$$G = (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2 \rtimes \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}.$$

ii. *Si* $t = 1$, *l'action de* G *se relève en caractéristique* p^2 *si et seulement si* $p \geq 3$ *et*

$$G = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \rtimes \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}.$$

De plus dans les cas où l'action de G *se relève en caractéristique* p^2, *elle se relève en caractéristique zéro, et alors* $\mathrm{car}(R_G) = 0$.

Preuve i. Supposons $t \geq 2$.
Si $p \neq 2$, d'après les propositions 3.7, le p-Sylow de G ne se relève pas en caractéristique p^2.
Si $p = 2$, d'après la proposition 3.8, on peut supposer $t = 2$. Comme $n > 1$ divise $p^t - 1$, on a $n = 3$ et $G = (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2 \rtimes \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$. D'après [CoKa1], le problème de déformations équicaractéristiques de G est rigide. Le relèvement versel de $\langle\sigma_1\rangle$ à $W(k)[[\alpha]]$ est donné par la matrice

$$m = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Par des calculs matricielles faciles, nous trouvons un relèvement unique (donc versel) de l'action de G à $W(k)[j]/\langle j^2 + j + 1\rangle$ donné par les matrices

$$m = \begin{pmatrix} 1 & 3j-1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad m' = \begin{pmatrix} 1 & 4j-1 \\ j & -1 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & -2j-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

satisfaisant $m^2 = m'^2 = g^3 = 1$, $mm' + m'm = 1$, $gmg^{-1} = jm'$. D'où i.

ii. Supposons $G = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \rtimes \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ avec $n > 1$ divisant $p - 1$ (donc $p > 2$).

- Si $n \neq 2$ et $p > 3$, la déformation verselle équicaractéristique de l'action de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \rtimes \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est rigide et de la forme (à conjugaison près)

$$\langle\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\rangle \rtimes \langle\begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\rangle,$$

avec ζ n-ième racine d'unité (voir [CoKa1], 4.4.5(i); la présence de ζ "tue" donc les déformations de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ dans les directions "α"). Soit

$$T(y) = \frac{y}{y+1} + p \cdot S(y) \text{ pour } S \in R[[y]]$$

un relèvement à $R := R_G/p^2$ du générateur de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ donné. Supposons $\mathrm{car}(R) = p^2$. On pose $S(y) = c_0 + c_1 y + c_2 y^2 + O(y^3)$ et on trouve par induction que pour N arbitraire,

$$\begin{aligned} T^N(y) = {} & Npc_0 + (1 + Npc_1 - N(N-1)c_0)y \\ & + (Npc_2 - N - \frac{3}{2}N(N-1)pc_1 + \frac{1}{3}N(4N^2 - 9N + 5)pc_0)y^2 \\ & + O(y^3) \bmod p^2. \end{aligned}$$

Pour $N = p$ et $p \neq 3$, ceci implique $T^p(y) = y - py^2 \bmod (p^2, y^3)$, qui n'est jamais congru à y dans R. Un tel relèvement T d'ordre p n'existe donc pas.
- Si $p = 3$, alors $n = 2$. Le groupe $G = \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \rtimes \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ se relève (de façon rigide d'après [BeMé] 4.2.8) à $W(k)$ par les matrices

$$m = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

telles que $m^3 = g^2 = gmgm = 1$.
- Le groupe $G = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \rtimes \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ avec $p > 3$ admet un relèvement versel

$$m = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 1+\alpha \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

à $W(k)[[\alpha]]/\langle\psi(\alpha)\rangle$ pour lequel $m^p = g^2 = gmgm = 1$. Ce relèvement est versel, car $\dim H^1(G, M) = 1$.

$\square$

Les propositions 3.7, 3.8 et 3.9 démontrent le théorème "local" 2.1 et donc aussi le théorème "global" 1.2.

4 Corollaires, remarques et questions ouvertes

La démonstration du théorème 2.1 et les résultats de [Gr], [BeMé] et [CoKa1] donnent des informations plus précises sur les anneaux versels de déformations infinitésimales pour les actions faibles.

Corollaire 4.1 *Soit k un corps parfait de caractéristique $p > 0$. Soit $G = (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^t \rtimes \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \subset \mathrm{Aut}\, k[[y]]$ une action faible ($G_2 = 1$) avec $t \geq 0$ et n divise $p^t - 1$. Notons R_G l'anneau versel de déformations infinitésimales de G. Soient ζ une racine primitive n-ième de l'unité dans k, $s = [\mathbf{F}_p(\zeta) : \mathbf{F}_p]$, et $\psi(\alpha) \in W(k)[\alpha]$ défini par*

$$\psi(\alpha) = \sum_{\ell=0}^{\frac{p-1}{2}} \binom{p-1-\ell}{\ell} (-1)^\ell (\alpha+4)^{\frac{p-1}{2}-\ell}.$$

Alors nous avons la table suivante :

G	R_G
$\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, $(n, p) = 1$	$W(k)$
$\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, $p \neq 2, 3$	$W(k)[[\alpha]]/\langle\psi(\alpha)\rangle$
$\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$, $p = 3$	$W(k)$
$(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^t$, $p = 2, t \leq 2$	$W(k)[[\alpha]]$
$(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^t$, $t > 1$, $p \neq 2, 3$	$k[[\alpha, x_1, \ldots, x_{t-1}]]/\langle\alpha^{\frac{p-1}{2}}, \alpha x_1, \ldots, \alpha x_{t-1}\rangle$
$(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})^t$, $p = 3, t > 1$	$k[[x_1, \ldots, x_{t-1}]]$
$\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \rtimes \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, $p \neq 2, 3$	$W(k)[[\alpha]]/\langle\psi(\alpha)\rangle$
$\mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \rtimes \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	$W(k)$
$(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2 \rtimes \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$	$W(k)[j]/\langle j^2 + j + 1\rangle$
$(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^t \rtimes \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, $t \geq 2, n \neq 2$ *ou* $p = 2, 3$	$k[[x_1, \ldots, x_{t/s-1}]]$
$(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^t \rtimes \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, $t \geq 2$ *et* $p \neq 2, 3$	$k[[\alpha, x_1, \ldots, x_{t/s-1}]]/\langle\alpha^{\frac{p-1}{2}}, \alpha x_1, \ldots, \alpha x_{t-1}\rangle$

Enfin si $G = (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^t$, $t > 2$ alors

$$R_G = k[[\alpha, x_1, \ldots, x_t]]/\langle x_1 + \cdots + x_t, u_1 x_1 + \cdots + u_t x_t, \alpha(x_i u_j - x_j u_i)_{1 \leq i, j \leq t}\rangle$$

où $\{u_1, \ldots, u_t\}$ est une base de V.

Preuve Les anneaux universels de déformations de caractéristique zéro ont été calculés dans les preuves des propositions 3.8 et 3.9. Dans les autres cas, les anneaux universels de déformations ont pour caractéristique p et ont été calculés par Cornelissen et Kato ([CoKa1] §4.4). □

Exemple 4.2 Pour $p \neq 2, 3$, la déformation verselle à R_G de $G = (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^t$ est donnée dans 3.2.

Remarque 4.3 Oort, Sekiguchi et Suwa ([OoSeSu]) ont démontré que l'action de $G = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ se relève en caractéristique zéro (pour tout conducteur). Pagot a traité le cas $G = (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$ ([Pa]). Bouw et Wewers ont traité le cas du groupe diédral $D_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \rtimes \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ ([BoWe]).

Remarque 4.4 Le théorème 1.2 précise notamment quelles sont les actions sur les courbes ordinaires qui se relèvent en caractéristique zéro. Il répond donc à une version plus forte de la conjecture d'Oort ([Oo]) dans le cadre des revêtements faiblement ramifiés.

Remarque 4.5 Bertin [Be], Green [Gre] et Green et Matignon [GrMa] ont donné des critères nécessaires à l'existence d'un relèvement *en caractéristique zéro* d'un groupe de la forme $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^t$ de conducteur arbitraire; l'impossibilité de relever est impliqué par certaines congruences satisfaites par les conducteurs de Hasse locaux: cette théorie permet une démonstration assez simple du fait que $\nu(X, G) \neq 0$ dans le cas faiblement ramifié où les groupes de ramification non-triviaux d'ordre divisible par p ne sont pas sur la liste du corollaire 1.2. Le théorème 1.2 impose que le conducteur vaut 1 mais discute l'existence de relèvements *en caractéristique p^n arbitraire* intermédiaire.

Remarque 4.6 Le théorème 1.2 est compatible au resultat de Chinburg, Harbater et Guralnick ([ChHaGu]): ils donnent une liste de groupes abstraits G ayant un p-Sylow normal P avec G/P cyclique, admettant une action $G \hookrightarrow \mathrm{Aut}_k(k[[x]])$ dont l'obstruction locale au relèvement de Bertin ([Be]) est non nulle. Les groupes i.–iii. du corollaire 1.2 sont bien dans le complémentaire de cette liste.

Remarque 4.7 Il serait intéressant de donner des exemples de courbes X munies d'une action finie G telles que la caractéristique $\nu(X, G)$ de l'anneau versel de déformations équivariantes soit de caractéristique p^n pour $1 < n < \infty$. Pour une discussion de cette question, voir [Co].

Remarque 4.8 Les démonstrations dans cet article sont une version explicite d'une stratégie générale pour étudier le foncteur des déformations équivariantes de (X, G). L'idée est de dévisser le groupe G et de contrôler le comportement du foncteur D_G des déformations par restriction à un sous-groupe et par passage au quotient. Le passage à un sous-groupe H est élémentaire car nous avons un morphisme de foncteurs canonique $D_G \to D_H$ et les morphismes induits au niveau des espaces tangents et des groupes d'obstruction coïncident canoniquement aux applications de restriction cohomologique. Le passage à un quotient est beaucoup plus subtile. Il est décrit localement par la suite spectrale d'Hochschild-Serre. Dans cet article, nous avons mené explicitement les calculs d'obstruction aux recollements de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ à $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Il serait intéressant de mener ces calculs d'obstructions aux recollements en termes cohomologiques.

Bibliographie

[Be] Bertin, J.: Obstructions locales au relèvement de revêtements galoisiens de courbes lisses. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **326**, 55–58 (1998)

[BeMé] Bertin, J., Mézard, A.: Déformations formelles des revêtements sauvagement ramifiés de courbes algébriques. Invent. Math. **141**, 195–238 (2000)

[Bo] Bourbaki, N.: Éléments de mathématique. I.II.I. Structures algébriques. Actual. Sci. Ind. **934**, Hermann, Paris 1942

[BoWe] Bouw, I., Wewers, S.: The local lifting problem for dihedral groups, prépublication arXiv: math.AG/0409395 2004.

[ChHaGu] Chinburg, T., Harbater, D., Guralnick, R.: Lifting covers of curves, Oort groups and Bertin's obstruction, presenté au Groupe de Travail "Automorphisms of Curves", Leyde 2004

[Co] Cornelissen, G.: Lifting an automorphism group to finite characteristic, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. **113**, 137–139 (2005)

[CoKa1] Cornelissen, G., Kato, F.: Equivariant deformation of Mumford curves and of ordinary curves in positive characteristic. Duke Math. J. **116**(3), 431–470 (2003)

[CoKa2] Cornelissen, G., Kato, F.: Zur Entartung schwach verzweigter Gruppenoperationen auf Kurven, J. reine angew. Math. **589**, 201–236 (2005)

[GrMa] Green, B., Matignon, M.: Liftings of Galois covers of smooth curves. Compositio Math. **113**(3), 237–272 (1998)

[Gre] Green, B.: Automorphisms of formal power series rings over a valuation ring, In: Valuation theory and its applications, Vol. II (Saskatoon, SK, 1999), 79–87, Fields Inst. Commun. 33, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003

[Gr] Grothendieck, A.: Revêtements étales et groupe fondamental, (SGA 1). Lecture Notes in Math. **224**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971. Voir aussi: arXiv: math.AG/0206203

[Ma] Matignon, M.: Lifting the curve $(X^p - X)(Y^p - Y) = 1$ and its automorphism group. Note non-destinée à publication (septembre 2003), voir: www.math.u-bordeaux.fr/~matignon

[Na] Nakajima, S.: p-ranks and automorphism groups of algebraic curves. Trans. Amer. Math. Soc. **303**(2), 595–607 (1987)

[Oo] Oort, F.: Lifting algebraic curves, abelian varieties, and their endomorphisms to characteristic zero, dans: Algebraic geometry, Bowdoin, 1985, Proc. Sympos. Pure Math. 46 (1987), 2ième Partie, Amer. Math. Soc., Providence, pp. 165–195

[OoSeSu] Oort, F., Sekiguchi, T., Suwa, N.: On the deformation of Artin-Schreier to Kummer. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **22**(3), 345–375 (1989)

[Pa] Pagot, G.: Relèvement des actions de $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$, prépublication 2004

[Se] Serre, J.-P.: Corps locaux. Actual. Sci. Indust. no. 1296, Hermann, Paris 1968

[Sc] Schlessinger, M.: Functors of Artin rings. Trans. Am. Soc. **130**, 208–222 (1968)