

Zur Entartung schwach verzweigter Gruppenoperationen auf Kurven

Von *Gunther Cornelissen* in Utrecht und *Fumiharu Kato* in Kioto

Abstract. An action of a finite group on a smooth projective curve over an algebraically closed field of positive characteristic is called *weakly ramified*, if all second ramification groups are trivial (e.g., every group action on an ordinary curve is weakly ramified). When the ramification indices satisfy certain numerical criteria, we construct a degenerating equivariant quasi-projective family to which the given curve belongs, and which in a sense is the unique building block for all such weakly ramified equivariant families that ramify above a fixed set of points. The result is used to inductively study automorphisms of ordinary curves.

Einführung

Es sei X eine glatte projektive Kurve des Geschlechts g über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik $p > 0$, und G eine endliche Gruppe von Automorphismen von X . Sei $\pi : X \rightarrow Y = X/G$ die zugehörige Überlagerung. Während im Falle komplexer Kurven jegliche Verzweigung zahm ist, d.h. die Isotropiegruppen von Punkten auf X alle zyklisch sind, können solche Isotropiegruppen über Körpern positiver Charakteristik komplizierter aussehen: man nennt dieses Phänomen *wilde Verzweigung*. Es zeigt sich, dass die Verzweigungsgruppen

$$G_x = G_{x,0} = \{\sigma \in G : x^\sigma = x\}$$

eines Punktes $x \in X$ im allgemeinen Fall versehen sind mit einer absteigenden Filtrierung durch Untergruppen, den sogenannten höheren Verzweigungsgruppen (cf. [20], IV):

$$G_{x,i} := \{\sigma \in G : \text{ord}_x(\sigma\pi_x - \pi_x) > i\} \quad (i \geq 1),$$

wobei π_x ein lokaler Uniformisierungsparameter ist in $x \in X$. Dann ist $G_{x,1}$ die einzige p -Sylowgruppe von G_x und $G_x/G_{x,1}$ ist zyklisch von einer Ordnung teilerfremd zu p .

Als nächste Stufe der Komplexität nach dem zahmen Fall, d.h. $G_{x,1} = 0$, schlagen wir eine Untersuchung der *schwachen Verzweigung* vor, d.h. per Definition den Fall $G_{x,2} = 0$. Dann ist also G_x eine Gruppe der Form

$$G_x \cong (\mathbb{Z}/p)^{t_x} \rtimes \mathbb{Z}/n_x,$$

wobei t_x und n_x ganze Zahlen sind mit n_x und p teilerfremd. Wir nennen eine Gruppenoperation schwach verzweigt, falls sie in allen Punkten $x \in X$ schwach verzweigt ist. Der Begriff ist aus verschiedenen Gründen natürlich. So hat S. Nakajima gezeigt ([15]), dass jede Gruppenoperation auf einer ordinären Kurve, d.h. einer Kurve mit $\text{Jac}(X)[p] = (\mathbb{Z}/p)^g$, schwach verzweigt ist. Aber obwohl Ordinariät eine generische Eigenschaft ist, d.h. Zariski-dicht im Modulraum, kann diese Eigenschaft trotzdem verloren gehen unter Entartung. Dagegen werden wir zeigen, dass es eine Entartung gibt, für welche die Eigenschaft $G_{x,2} = 0$ erhalten bleibt. Neuere Arbeiten zum Thema der schwachen Verzweigung sind z.B. [4], [5], [9] und [13].

Der Grothendiecksche Formalismus der äquivarianten Kohomologie ([8], [2]) erlaubt die vollständige Berechnung der pro-darstellbaren Umhüllenden des infinitesimalen Deformationsfunktors von (X, G) im Sinne Schlessingers ([19]) als Funktion von g , der Anzahl der Verzweigungspunkte und der lokalen Verzweigungsdaten (t_x, n_x) (cf. [4], Thm. 5.1). Man beachte, dass die Einhüllende nicht glatt zu sein braucht.

Ziel dieser Arbeit ist die Erweiterung einer solchen infinitesimalen Richtung zu einer globalen quasi-projektiven Familie, deren Entartung vollständig verstanden werden kann. Es stellt sich heraus, dass im schwach verzweigten Falle die Operation von einem nicht-trivialen $G_{x,1}$ auf $k[[\pi_x]]$ durch Möbius-Transformationen der Uniformisierenden π_x gegeben wird:

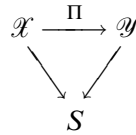
$$\pi_x \mapsto \frac{\pi_x}{u\pi_x + 1}, \quad u \in V,$$

wobei V ein t_x -dimensionaler \mathbb{F}_p -Vektorraum innerhalb k ist. Diese ‘‘Linearisierbarkeit’’ ist der wesentliche Grund dafür, dass schwache Verzweigung einfacher zu bewältigen ist. Sei s_x die multiplikative Ordnung von p modulo n_x , d.h. s_x ist die Ordnung von p in $(\mathbb{Z}/n_x)^\times$. Falls es ein $x \in X$ gibt mit $s_x \neq t_x$, kann man die Operation von V so deformieren, dass ein ausgezeichneter Vektor v in V null wird: Man lässt v gegen Null gehen in einer Zerlegung $V = V' \oplus \mathbb{F}_{p^{s_x}} \cdot v$.

Diese Deformation lässt sich global fortsetzen (im Wesentlichen durch Grothendiecks Algebraisierungssatz und das Artinsche Approximationsverfahren), und es ergibt sich eine Familie von Überlagerungen über einer festen Kurve, deren Verzweigungspunkte außerdem fest sind—der natürliche Modulraum einer solchen Überlagerung ist affin, und deshalb erlaubt die Familie eine entartete Faser (siehe Pries [17], 3.3). Diese Entartung kann man vollständig verstehen, indem man sorgfältig die Moduln von \mathbb{F}_p -linearen Unterräumen von k und deren Fahnen untersucht, wobei die modulare Invariantentheorie von GL_n natürlich ins Spiel kommt ([11]). Die Hauptergebnisse werden im folgenden Satz beschrieben, der nicht nur besagt, dass eine Entartung existiert, sondern auch, dass die Operation auf jeder der horizontalen Komponenten einer solchen Entartung erneut schwach verzweigt ist, und außerdem die Trägheitsgruppen, d.h. Isotropiegruppen von Komponenten, beschreibt:

Satz A. *Sei $\pi: X \rightarrow Y$ eine schwach verzweigte Galoissche Überlagerung von Kurven über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k der Charakteristik $p > 0$ mit Galoisgruppe G , verzweigt über $B \subset Y$, und es gebe einen Punkt $x \in X$ mit $1 \neq t_x \neq s_x$.*

Sei $y = \pi(x)$. Dann gibt es eine quasi-projektive glatte Kurve S , Punkte $\{0, \infty\} \in S$ und eine G -Überlagerung von Kurven über S :



mit:

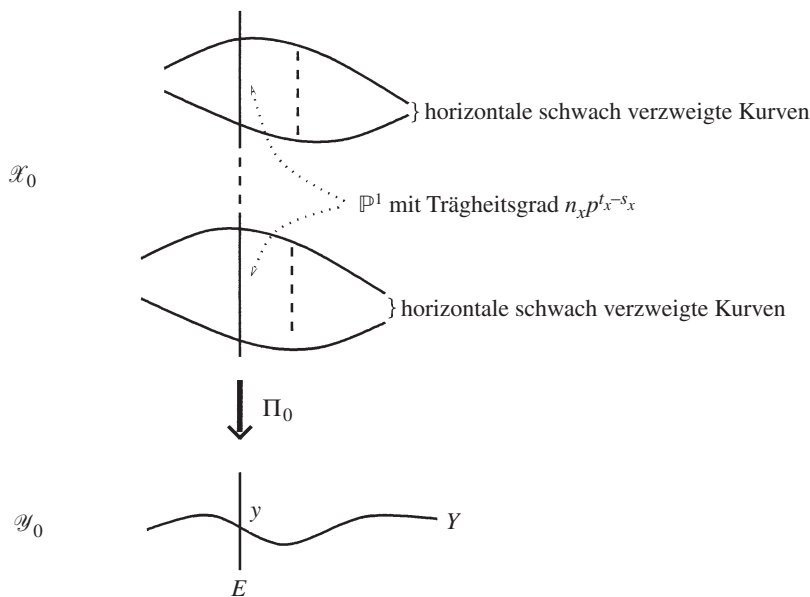
(i) $\Pi_\infty \cong \pi$.

(ii) Für alle $s \in S - \{0\}$ gilt $\mathcal{Y}_s = Y \times \{s\}$ —dabei ist Π_s eine glatte G -Überlagerung, verzweigt über $B \times \{s\}$, derart dass die Verzweigung über (b, s) in Π_s für $b \neq y$ isomorph ist zur Verzweigung über b in π .

(iii) \mathcal{Y}_0 ist die Vereinigung von Y und einer glatten rationalen Kurve E , die Y normal in y schneidet; des Weiteren ist $\Pi^{-1}(E)$ eine Vereinigung von glatten rationalen Kurven, die in je p Punkten normal geschnitten werden von horizontalen Kurven, wobei die Einschränkung der Quotientenabbildung auf solche horizontale Kurven schwach verzweigt ist.

(iv) Jede Zusammenhangskomponente von $\Pi^{-1}(E) \subseteq \mathcal{X}_0$ hat Trägheitsgrad $n_x p^{t_x-1}$, aber die horizontalen Kurven haben triviale Trägheitsgruppe.

(v) Versieht man $\mathcal{X}_{S-\{0\}}$ mit einer gepunkteten Struktur, indem man alle Verzweigungspunkte auf jeder Faser \mathcal{X}_s auszeichnet, so ist $\mathcal{X}_{S-\{0\}}$ eine stabile gepunktete Kurve, außer im Fall wo $X = Y = \mathbb{P}^1$, $G = G_{x,1}$ und nur ein Punkt verzweigt ist; mit dieser Ausnahme überträgt sich die gepunktete Struktur auf \mathcal{X} , wodurch \mathcal{X} eine stabile gepunktete Familie von Kurven wird.



Die spezielle Faser $\mathcal{X}_0 \rightarrow \mathcal{Y}_0$

Dieses Entartungsphänomen ist im folgenden Sinne sogar universell: Während sich über einem Körper der Charakteristik Null bei Deformation einer Überlagerung zwangsläufig die Verzweigungspunkte selbst bewegen, können sie bei positiver Charakteristik fest bleiben. Aus der Berechnung des infinitesimalen versellen Deformationsrings in [4] folgt, dass solche Deformationen nur unbehindert über einem Ring der Krulldimension > 1 stattfinden können, falls $s_x \neq t_x$, und dann sind sie in der Tat durch Deformation der Einbettung $V \hookrightarrow k$ gegeben ([4], Abschnitt 4). Eine solche Einbettung entartet genau durch Verschwindenlassen eines Unterraumes W von V . Wir haben im obigen Satz die grundlegende Situation beschrieben, wobei W eindimensional ist, woraus sich der allgemeine Fall induktiv ableiten lässt.

Man beachte noch folgendes: Die Beschreibung der entarteten Faser in Satz A ist vollständig *lokal*. Es ist z.B. unbekannt, wieviele Zusammenhangskomponenten die horizontalen Kurven bilden können, und welche kombinatorischen Inzidenzen zwischen diesen möglich sind.

Das Ergebnis hat folgende Anwendung auf Automorphismengruppen schwach verzweigter Kurven, d.h. Kurven, für die $\pi_X : X \mapsto X/\text{Aut}(X)$ schwach verzweigt ist. Von S. Nakajima (loc. cit.) stammt der Satz, dass eine schwach verzweigte Kurve X des Geschlechts $g \geq 2$ höchstens $84g(g-1)$ Automorphismen hat (der Beweis besteht im Grunde genommen aus geschickten Abschätzungen in der Riemann-Hurwitz-Zeuthenschen Formel). Man kennt aber keine Familie $\{X_i\}$, deren Geschlechter g_i strikt steigend sind, für die $|\text{Aut}(X_i)|$ ein Polynom vom Grad 3 in $\sqrt{g_i}$ übertrifft. In der Tat ist keine solche Familie bekannt mit $|\text{Aut}(X_i)| > \tilde{f}(g_i)$, wobei

$$\tilde{f}(g) = \max\{84(g-1), 2\sqrt{g}(\sqrt{g}+1)^2\}.$$

Man weiß, dass für eine Mumfordkurve X tatsächlich $|\text{Aut}(X)| \leq \tilde{f}(g)$ gilt ([3]). Dieses Ergebniss ist scharf, und wir haben die Vermutung geäußert, es sei auch für ordinäre Kurven richtig.

Kürzlich haben Guralnick und Zieve ([9]) anhand gruppentheoretischer Betrachtungen gezeigt, dass diese Vermutung falsch ist, bzw. im folgenden Sinne stimmt *mit einer expliziten Ausnahme*: Sei $q = p^e$ eine p -te Potenz und X_q der Galoissche Abschluss der durch $t = x^{q^2+q+1} + x^{q^2+q}$ gegebenen Überlagerung $\mathbb{P}_x^1 \rightarrow \mathbb{P}_t^1$. Dann ist X_q eine Kurve über \mathbb{F}_p mit Automorphismengruppe der Ordnung $\approx (2g)^{8/5}$. Des Weiteren operiert $\text{Aut}(X_q)$ schwach verzweigt auf X_q , und X_q ist genau dann ordinär, wenn $e = 1$ (und also $q = p$). Jede andere ordinäre Kurve über einem Körper der Charakteristik $p > 0$ erfüllt aber eine obere Schranke $|\text{Aut}(X)| \leq 84g^{3/2}$ (zumindest wenn $p \neq 2$). Ob man hier $\tilde{f}(g)$ statt $84g^{3/2}$ einsetzen kann, müsste aus dem (bisher nicht verfassten) Beweis hervorgehen.

Der obige Satz wird uns erlauben, für eine schwach verzweigte Gruppenoperation die Zahlen s_x induktiv zu erhöhen durch Deformation von π_X , bis die Gleichung $s_x = t_x$ erreicht wird. Nennen wir eine Kurve X *immobil*, wenn $X/\text{Aut}(X) \cong \mathbb{P}^1$, π_X schwach verzweigt ist, verzweigt über zwei Punkten, oder über drei Punkten mit Verzweigungstyp $(2, 2, \cdot)$ und $n_x \neq 1$, aber $s_x = t_x$ für alle wilden Verzweigungspunkte $x \in X$. Man beachte, dass die Definition von Immobilität an dieser Stelle eigens zum Zweck der Formulierung des nächsten Satzes eingeführt wird, und z.B. keineswegs bedeutet, dass X keine äquivalenten Deformationen erlaubt.

Satz B. Sei $f : \mathbb{Z}_{\geq 2} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ eine Funktion mit $f(g) \geq \tilde{f}(g)$, so dass $f(g)/(g-1)$ eine steigende Funktion von g ist. Unter der Annahme, dass für jede immobile Kurve X von jedem Geschlecht $g \geq 2$ die Schranke $|\text{Aut}(X)| \leq f(g)$ gelte, gilt eine solche Schranke auch für jede schwach verzweigte Kurve von jedem Geschlecht $g \geq 2$.

Der Beweis ist im allgemeinen Fall induktiv und benutzt die besagte Existenz einer Entartung wie oben. Man beachte aber, dass der Fall vollständig multiplikativer Entartung einen anderen Beweis (mit Hilfe der Schottky-Uniformisierung und einer Klassifikation von Gruppenoperationen auf dem Bruhat-Tits-Baum) erfordert, der im Grunde genommen in [3] ausgeführt wurde, und ebenso der Fall, wo alle Komponenten elliptisch sind, wobei die Stabilität der gepunkteten Kurve \mathcal{X}_0 ins Spiel kommt.

Man muss also die gewünschte obere Schranke nur für immobile Kurven beweisen. Dieses Ergebniss erlaubt möglicherweise eine Verkürzung der Guralnick-Zieveschen Beweise.

Als offenes Problem sei hier noch die folgende Frage erwähnt: *Inwieweit lässt sich die obere Schranke für $\text{Aut}(X)$ verbessern, wenn man voraussetzt, dass $(X, \text{Aut}(X))$ einen positiv-dimensionalen äquivarianten Deformationsraum hat (sogar ohne Annahme der schwachen Verzweigung)?* Offensichtlich ist $\tilde{f}(g)$ ein Minimum, aber erneut ist unbekannt, ob $\tilde{f}(g)$ optimal ist, und inwieweit Satz B zur Aufklärung eingesetzt werden kann. (Man vergleiche aber mit 5.6.)

Wir beschreiben schließlich kurz den Aufbau dieser Arbeit. Im ersten Abschnitt wird die lokale Theorie schwach verzweigter Gruppenoperationen untersucht, insbesondere wird anhand des Katz-Gabberschen Lokal-Global-Prinzips eine kanonische Form für eine solche Operation über kompletten Bewertungsringen aufgestellt. Die Moduln solcher Operationen zeigen dadurch einen engen Zusammenhang mit der Variation $\mathbb{F}_{p^{s_X}}$ -linearer Unterräume des Körpers k , der im nächsten Abschnitt ausgearbeitet wird, anhand dessen dann schließlich im Abschnitt 3 die für das Ergebnis erforderliche lokale Familie schwach verzweigter Überlagerungen konstruiert werden kann. Danach folgt in 4 der Beweis des Hauptsatzes A. Anschließend wird im Abschnitt 5 Satz B gezeigt und kommentiert. Im ersten Anhang zeigen wir, dass die kanonische Form auch über Henselschen Ringen gilt. Im letzten Anhang wird der Begriff “Konfigurationsraum” (aus Pries [17]) erweitert zum Konzept “Konfigurierender Funktor”, und wir zeigen anhand der Ergebnisse aus dem ersten Anhang, dass sich aus unserer Konstruktion im Abschnitt 3 ein natürliches Beispiel für dieses verallgemeinerte Konzept ergibt.

1. Schwache Verzweigung

1.1. Galoistheoretische Vorbereitungen. Wir stellen in den ersten Abschnitten einige Galoistheoretische Fakten bereit, die wir als solche nicht in der Literatur vorgefunden haben. Es sei $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus zwischen Schemata. Der Morphismus f wird eine (endliche) Überlagerung (manchmal auch *endliche Erweiterung*) genannt, falls f endlich und unverzweigt (im Sinne von [EGA], IV₄ (17.3.7)) ist in jedem Punkt der Höhe Null auf X . Wenn $f : X \rightarrow Y$ eine solche Überlagerung ist und Y lokal Noethersch und reduziert, dann gibt es eine dichte offene Teilmenge $U \subseteq Y$, über der f flach ist ([EGA], IV₂ (6.9.1)); infolgedessen ist f generisch étale. Wir schreiben $G = \text{Aut}_Y(X)$ und nehmen ab jetzt an,

die Gruppe operiert von rechts auf X und ist endlich. Letztere Eigenschaft ist automatisch erfüllt, falls X endlich viele irreduzible Komponenten hat. Weil f affin ist, macht es Sinn, den Quotienten X/G zu bilden ([SGA1], Exposé V, Prop. 1.1). Falls die von f induzierte Abbildung $X/G \rightarrow Y$ ein Isomorphismus ist, nennen wir f eine *Galoissche Überlagerung* (oder *Galoiserweiterung*) mit *Galoisgruppe* G , und wir schreiben $\text{Gal}(X/Y) = G$.

1.2. Isomorphismus von Galoisweiterungen. Ein Isomorphismus zwischen zwei Galoisschen Überlagerungen $f : X \rightarrow Y$ und $f' : X' \rightarrow Y$ ist ein Paar (ϕ, h) , wobei $\phi : X \rightarrow X'$ ein Isomorphismus ist zwischen X und X' über Y und

$$h : \text{Gal}(X/Y) \xrightarrow{\sim} \text{Gal}(X'/Y)$$

ein Gruppenisomorphismus, derart dass $h(\sigma) = \phi \circ \sigma \circ \phi^{-1}$ für alle $\sigma \in \text{Gal}(X/Y)$. Die Beweise der nächsten zwei Lemmata lassen wir ihrer Einfachheit halber aus.

1.3. Lemma. *Sei B ein ganzabgeschlossener Ring mit Quotientenkörper L , und sei G eine endliche Gruppe, die von links auf B operiert via Ringautomorphismen. Bezeichne mit A den Invariantenring $A = B^G$. Dann gilt:*

- (i) *Der Fixkörper L^G ist Quotientenkörper von A .*
- (ii) *B/A ist eine Galoisweiterung mit Galoisgruppe G .*
- (iii) *A ist ganzabgeschlossen; außerdem ist A ein (diskreter) Bewertungsring, falls B einer ist. \square*

1.4. Lemma. *Sei L eine endliche Galoisweiterung des Quotientenkörpers K eines ganzabgeschlossenen Ringes A , und B der ganze Abschluß von A in L . Dann ist B/A eine Galoisweiterung mit Galoisgruppe $\text{Gal}(L/K)$. \square*

1.5. Die Galoiskorrespondenz. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Galoissche Überlagerung von lokal Noetherschen normalen ganzen Schemata und Z ein zwischen X und Y liegendes normales ganzes Schema, derart dass $Z \rightarrow Y$ eine Überlagerung ist. Dann ist $X \rightarrow Z$ auch eine Überlagerung ([EGA], II (6.1.5) (v) und IV₄ (17.3.4)), und also ist X die Normalisierung von Z im Funktionenkörper $\kappa(X)$ von X . Aus 1.4 folgt, dass X/Z eine Galoissche Überlagerung mit Galoisgruppe $H_Z := \text{Gal}(\kappa(X)/\kappa(Z)) = \text{Aut}_Z(X)$ ist. Eine alternative Definition von H_Z lautet: für jedes $\sigma \in G = \text{Gal}(X/Y)$ hat man die konjugierte Überlagerung $Z^\sigma \rightarrow Y$, wobei es einen Isomorphismus $\sigma_Z : Z \xrightarrow{\sim} Z^\sigma$ gibt. Dann ist H_Z die Untergruppe der Elemente σ von G , für die das dazugehörige σ_Z mit den Überlagerungsabbildungen $X \rightarrow Z$ und $X \rightarrow Z^\sigma$ kommutiert. Die Korrespondenz $Z \rightsquigarrow H_Z$ induziert also eine inklusionsumkehrende Bijektion zwischen Isomorphieklassen von Zwischenüberlagerungen von f und Untergruppen von G , wobei Galoissche Zwischenüberlagerungen über Y mit normalen Untergruppen korrespondieren.

1.6. Bemerkung. In der Kategorie der quasiprojektiven Kurven über einem algebraisch abgeschlossenen Körper haben wir soeben die Galoiskorrespondenz *glatter* Kurven geschildert. Wegen [18], Prop. 1.6 läßt diese sich aber auch auf allen *semistabilen* Kurven mit glatten irreduziblen Komponenten fortsetzen.

1.7. Verzweigungsgruppen. Sei k ein Körper der Charakteristik $p > 0$ und A ein diskreter Bewertungsring über k mit Restklassenkörper k . Sei B/A eine endliche Galoiserweiterung mit Galoisgruppe $G = \text{Gal}(B/A)$. Wir bezeichnen mit K und L die Quotientenkörper von A und B , und mit $\mathfrak{m}_A, \mathfrak{m}_B$ deren maximale Ideale.

Der Ring B ist auch diskret bewertet und $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ ist endlich und flach ([14], 23.1). Insbesondere ist B ein freier A -Modul endlichen Ranges. Sei x eine Uniformisierende aus B und $v_B : B \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ die dazugehörige normalisierte Bewertung. Für $i \geq -1$ definieren wir die i -te Verzweigungsgruppe G_i durch

$$G_i := \{\sigma \in G : v_B(\sigma(x) - x) > i\}.$$

Die Gruppen G_i bilden eine absteigende Filtrierung der Gruppe G durch normale Untergruppen:

$$G = G_{-1} \supseteq G_0 \supseteq G_1 \supseteq \cdots.$$

1.8. Schwach verzweigte Erweiterungen. Wir nennen eine Galoiserweiterung B/A *schwach verzweigt*, falls B/A total verzweigt ist und $G_2 = 0$.

1.9. Bemerkung. Die Totalverzweigung von B/A bedeutet, dass die induzierte Restklassenkörpererweiterung trivial ist. Insbesondere ist $G = G_0$. Im Falle eines algebraisch abgeschlossenen Restklassenkörpers ist diese Bedingung also immer erfüllt.

1.10. Proposition. *Wenn B/A eine schwach verzweigte Galoiserweiterung mit Galoisgruppe G ist und H eine Untergruppe von G , so ist die Galoiserweiterung B/B^H erneut schwach verzweigt. Ist außerdem H eine normale Untergruppe, so ist auch B^H/A schwach verzweigt.*

Beweis. Die erste Aussage ist klar. Zum Beweis der zweiten Aussage nehme man an, B^H/A sei nicht schwach verzweigt. Da die Erweiterung offensichtlich total verzweigt ist, bedeutet dies $(G/H)_2 \neq 0$. Die Herbrandsche Funktion

$$\phi_{L/L^H}(u) := \int_0^u \frac{dt}{[G_0 : G_t]}$$

erfüllt also $\phi_{L/L^H}(u) > 1$, und deshalb ist $G_u \not\subset H$ ([20], IV, Lemme 5). Deswegen muss $u \leq 1$ gelten, und also

$$1 < \phi_{L/L^H}(u) = u \frac{|H_1|}{|H_0|} \leq 1,$$

ein Widerspruch. \square

1.11. Satz (S. Nakajima, [15], 2(i)). *Sei X/k eine glatte projektive Kurve vom Geschlecht $g > 0$ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k der Charakteristik $p > 0$. Sei X ordinär, d.h. der p -Rang der Jacobischen $\text{Jac}(X)$ ist maximal: $\text{Jac}(X)[p] = (\mathbb{Z}/p)^g$. Dann ist für jede endliche Gruppe von Automorphismen $G \subseteq \text{Aut}_k(X)$ und jeden abgeschlos-*

senen Punkt $x \in X$, die Erweiterung $\mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{O}_{X,x}^{G_x}$ von lokalen Ringen schwach verzweigt, wobei G_x die Zerlegungsgruppe von x ist.

1.12. Bemerkung. Generische Kurven sind ordinär, d.h. Ordinarität ist Zariski-dicht im Modulraum von Kurven vom Geschlecht $g > 0$ (vgl. [16]).

1.13. Die Gruppe $G_{n,d}$. Seien n und d zwei ganze Zahlen mit $n \geq 1$, n teilerfremd zu p und $d \geq 0$. Wir setzen $q = p^s$, wobei s die kleinste positive ganze Zahl ist, für die n die Zahl $p^s - 1$ teilt. Letzteres ist gleichwertig damit, dass $s = [\mathbb{F}_p(\zeta) : \mathbb{F}_p]$ mit ζ einer festgewählten primitiven n -ten Einheitswurzel in k ; oder auch damit, dass p die Ordnung s hat in der multiplikativen Gruppe $(\mathbb{Z}/n)^\times$ der ganzen Zahlen modulo n . Wir bezeichnen mit $G_{n,d}$ die abstrakte Gruppe $G_{n,d} = H \rtimes \mathbb{Z}/n$, wobei $H = (\mathbb{F}_q^d, +)$ und das semidirekte Produkt durch den Morphismus $\phi : \mathbb{Z}/n \rightarrow \text{Aut } H : a \mapsto (\sigma \mapsto \zeta^a \sigma)$ gegeben wird. In expliziter Form ist die Operation also

$$(\sigma, a)(\tau, b) = (\sigma + \zeta^a \tau, a + b),$$

mit $\sigma, \tau \in H$ und $a, b \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Wir nennen eine beliebige Teilgruppe der Ordnung n von $G_{n,d}$ ein *Torusteil* von $G_{n,d}$.

1.14. Lemma. (i) Die Gruppe H ist die einzige p -Sylowgruppe von $G_{n,d}$, und H ist elementar Abelsch der Ordnung q^d .

(ii) Jeder Torusteil von $G_{n,d}$ ist zyklisch und hat ein erzeugendes Element γ mit $\gamma\sigma\gamma^{-1} = \zeta\sigma$ für $\sigma \in H$.

(iii) Seien T und T' zwei Torusteile von $G_{n,d}$. Dann gibt es ein $\sigma \in H$ mit $T' = \sigma T \sigma^{-1}$.

Beweis. Da (i) und (ii) offensichtlich sind, brauchen wir nur (iii) zu zeigen. Sei γ ein erzeugendes Element für T mit $\gamma\sigma\gamma^{-1} = \zeta\sigma$ für $\sigma \in H$. Dann gibt es $\tau \in H$, so dass $\gamma' = \tau\gamma$ die Gruppe T' erzeugt. Man wähle $\sigma = (1 - \zeta)^{-1}\tau$. \square

1.15. Schwach verzweigte Erweiterungen vom Typ (n, d) . Sei B/A eine schwach verzweigte Erweiterung mit Galoisgruppe G wie oben. Aus ([20], IV, Cor. 1, Cor. 3, Cor. 4, Prop. 9) ergibt sich direkt, dass G zu einer Gruppe $G_{n,d}$ isomorph ist. (Man beachte, dass die Operation von G_0/G_1 auf $G_1/G_2 \cong G_1$ die natürliche Operation von k^* auf k ist. Die semi-direkte Produktstruktur ist also tatsächlich wie in 1.13 gegeben.) Wir nennen B/A dann eine schwach verzweigte Erweiterung vom Typ (n, d) .

1.16. Die Abbildung $\theta_{B/A}$. Sei B/A vom Typ (n, d) und $H = G_1$ die p -Sylowgruppe von G . Sei $\Omega_{B/A} = \mathfrak{m}_B/\mathfrak{m}_B^2$ der Kotangentialraum von B und x eine Uniformisierende von B . Wie in [20], IV.2 definiert man eine \mathbb{F}_p -lineare Einbettung

$$\theta_{B/A} : H \rightarrow \Omega_B, \quad \sigma \mapsto \frac{\sigma(x) - x}{x} \pmod{\mathfrak{m}_B^2}$$

(dort θ_1 genannt), die von der Wahl von x unabhängig ist. Aus [20], IV, Prop. 9, folgt unmittelbar, dass $\theta_{B/A}$ mit der Multiplikation mit ζ kommutiert. Deshalb ist $\theta_{B/A}$ nicht nur \mathbb{F}_p -, sondern sogar \mathbb{F}_q -linear.

1.17. Die Invariante $\omega_{B/A}$. Es ist $\theta := \theta_{B/A}/dx$ eine \mathbb{F}_q -lineare Einbettung von H in k . Entwickeln wir für $\sigma \in H$ das Element $\sigma(x)$ als Potenzreihe in x innerhalb der Vervollständigung $\hat{B} = k[[x]]$ von B , dann finden wir

$$\sigma(x) = x + \theta(\sigma)x^2 + \dots$$

Man beachte, dass θ von der Wahl von x abhängt, aber nur durch Multiplikation mit einem Skalar aus k . Wir definieren die ω -Invariante $\omega_{B/A}$ von B/A als die Klasse modulo k^\times des \mathbb{F}_q -linearen Unterraums $\theta(H) \subset k$.

1.18. Proposition (Kanonische Form schwach verzweigter Gruppenoperationen). *Sei A ein vollständiger diskreter Bewertungsring und B/A eine schwach verzweigte Erweiterung vom Typ (n, d) mit Galoisgruppe G mit p -Sylowgruppe H . Wähle einen festen Torusteil $T \subset G$. Dann gibt es eine Uniformisierende x für B und ein erzeugendes Element γ von T , derart dass die Operation von G gegeben ist durch*

$$\gamma(x) = \zeta x, \quad \sigma(x) = \frac{x}{1 - \theta(\sigma)x} \quad \text{für jedes } \sigma \in H,$$

wobei $\theta = \theta_{B/A}/dy$.

Beweis. Aus dem Katz-Gabberschen Lokal-Global-Prinzip ([12], 1.4) ergibt sich, dass die Galoissche Überlagerung $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ die Spezialisierung in ∞ einer speziellen, nur über 0 und ∞ verzweigten G -Überlagerung von Kurven $X \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ über k ist. Weil die Verzweigung über 0 zwangsläufig zahm ist und keine \mathbb{Z}/n -Überlagerung der projektiven Geraden in nur einem Punkt verzweigt sein kann, ist die Zerlegungsgruppe über 0 gleich \mathbb{Z}/n . Da die Zerlegungsgruppe von ∞ per Konstruktion G ist, ergibt sich aus der Riemann-Hurwitz-Zeuthenschen Formel ([22], 1.1) unmittelbar $X \cong \mathbb{P}_k^1$, weswegen G durch Möbiustransformationen operiert.

Sei x eine inhomogene Koordinate auf X , so dass $x = 0$ über ∞ liegt, und $x = \infty$ ein Punkt über 0 ist, der von T festgehalten wird. Da T die Fixpunkte 0 und ∞ hat, gibt es ein erzeugendes Element γ von T mit $\gamma(x) = \zeta x$.

Da $\sigma \in H$ nur ∞ fixiert, ist

$$\sigma(x) = \frac{ax}{b + cx}$$

für $a, c \in k^\times$ und $b \in k$. Weil $\sigma(x) = x \pmod{\mathfrak{m}_B^2}$ in $B = \hat{\mathcal{O}}_{X,0}$, ist $a = b$, und wir können

$$\sigma(x) = \frac{x}{1 + cx}$$

voraussetzen. Dann ist

$$\theta_{B/A}(\sigma) = \frac{\sigma(x) - x}{x} \pmod{\mathfrak{m}_B^2} = -c \, dy,$$

weswegen $c = -\theta(\sigma)$. \square

1.19. Bemerkungen. (i) Wenn $H \neq 0$, d.h. $d > 0$, so ist das erzeugende Element γ von T eindeutig durch die Beziehung $\gamma\sigma\gamma^{-1} = \zeta\sigma$ für $\sigma \in H$ bestimmt.

(ii) Statt A vollständig, genügt es, A Henselsch vorauszusetzen. Dies wird sich später daraus ergeben, dass die Uniformisierende x in der Proposition genau eine Lösung des Polynoms Q wie nachstehend in 3.1 ist, weswegen es approximiert werden kann. Wir verschieben den Beweis auf Anhang A.

(iii) Die Reduktion auf eine kanonische Form aus 1.18 wurde in [4], 3.1 stillschweigend vorausgesetzt.

1.20. Proposition. *Es sei A vollständig. Dann sind zwei schwach verzweigte Galoisweiterungen B/A und B'/A vom Typ (n, d) isomorph im Sinne von 1.2 genau dann, wenn ihre ω -Invarianten übereinstimmen:*

$$\omega_{B/A} = \omega_{B'/A}.$$

Beweis. Es operiere $G = G_{n,d}$ auf B und B' über A , und es sei H die p -Sylowgruppe und T ein festgewähltes Torusteil von G mit erzeugendem Element γ . Wir schreiben die Operation von $\alpha \in G$ auf B wie α , aber auf B' wie α' .

Wir können wie im Beweis von 1.18 voraussetzen, dass $B = \hat{\mathcal{O}}_{P,\xi}$, $B' = \hat{\mathcal{O}}_{P',\xi'}$ und $A = \hat{\mathcal{O}}_{P'',\eta}$ mit zugehörigen Gruppenoperationen, wobei P , P' und P'' drei projektive Geraden sind mit den jeweiligen inhomogenen Koordinaten x und x' . Es sei ξ (resp. ξ') der Punkt $\{x = 0\}$ (resp. $\{x' = 0\}$). Die Gruppe G operiere auf P und P' durch

$$\begin{cases} \gamma(x) = \zeta x, \\ \sigma(x) = \frac{x}{1 - \theta(\sigma)x}, \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma'(x') = \zeta x', \\ \sigma'(x') = \frac{x'}{1 - \theta'(\sigma)x'} \end{cases}$$

für jedes $\sigma \in H$, wobei θ und θ' Einbettungen von H in k sind. Es gelte $\gamma\sigma\gamma^{-1} = \zeta\sigma$. Es seien $\pi : P \rightarrow P''$ und $\pi' : P' \rightarrow P''$ die zugehörigen Quotientenabbildungen, die beide über den gleichen Punkt $\eta \in P''$ wild verzweigt sind. Insbesondere ist $\theta = \theta_{B/A}/dx$ und $\theta' = \theta_{B'/A}/dx'$.

Nehmen wir zuerst an, B/A und B'/A seien isomorphe G -Erweiterungen. Sei (ϕ, h) das zugehörige Paar mit $\phi : B \xrightarrow{\sim} B'$ dem Isomorphismus über A und $h \in \text{Aut}(G)$ einem Automorphismus mit $\alpha' = \phi \circ h(\alpha) \circ \phi^{-1}$. Weil der Urbildfunktor aus [12], 1.4.1 voll treu ist, sind die zugehörigen Operationen von G auf P und P' isomorph. Deswegen können wir ϕ als Möbiustransformation

$$\phi(x) = \frac{ax' + b}{cx' + d}$$

schreiben, mit $a, b, c, d \in k$. Damit bedeutet $\sigma' \circ \phi = \phi \circ h(\sigma)$ für $\sigma \in H$, dass

$$\frac{(a - \theta'(\sigma)b)x' + b}{(c - \theta'(\sigma)d)x' + d} = \frac{ax' + b}{(c - \theta(h(\sigma))a)x' + (d - \theta(h(\sigma))b)},$$

und es folgt $b = 0$ und $\theta'(\sigma)d = \theta(h(\sigma))a$. Letztere Gleichung impliziert, dass die Bilder von θ und θ' sich nur um einen Skalar in k^\times unterscheiden, weswegen $\omega_{B/A} = \omega_{B'/A}$.

Gilt umgekehrt $\omega_{B/A} = \omega_{B'/A}$, dann wählen wir $c \in k^\times$ mit $c\theta(H) = \theta'(H)$. Es ergibt sich

$$\sigma'(cx') = \frac{cx'}{1 - (c^{-1}\theta'(\sigma))cx'}.$$

Wenn wir also x' durch cx' ersetzen, können wir annehmen, dass $\theta(H) = \theta(H')$. Es gibt also einen \mathbb{F}_q -linearen Automorphismus $h \in \text{Aut}(H)$ mit $\theta'(\sigma) = \theta(h(\sigma))$, der sich, weil h linear ist und die Gruppe explizit wie in 1.13 beschrieben wird, durch $h(\gamma) = \gamma$ erweitern lässt zu einem Automorphismus von G . Dann ist (ϕ, h) mit

$$\phi : B = k[[x]] \rightarrow B' = k[[x']] : x \mapsto x'$$

der erwünschte Isomorphismus der Operationen. \square

Die Struktur einer schwach verzweigten Überlagerung wird also vollständig von der ω -Invariante bestimmt. Da sie einen \mathbb{F}_q -linearen Unterraum des Körpers k bildet, werden wir uns im nächsten Abschnitt zuerst dem Studium von Moduln solcher Räume widmen.

2. Moduln \mathbb{F}_p -linearer Unterräume eines Körpers

Es sei k ein Körper der Charakteristik $p > 0$ und $q = p^n$. Die Modultheorie linearer Unterräume von k ist eng mit der klassischen Dickson'schen Invariantentheorie verknüpft.

2.1. \mathbb{F}_q -lineare Polynome. (i) Sei R eine \mathbb{F}_q -Algebra. Wir nennen einen \mathbb{F}_q -linearen Unterraum $V \subseteq R$ *nicht-entartet*, falls $V \cap \mathfrak{p} = \{0\}$ für jedes Primideal \mathfrak{p} von R , d.h. dass die Dimension von V sich durch keine Spezialisierung ändert. Dies ist gleichbedeutend damit, dass $V - \{0\} \subseteq R^\times$.

(ii) Ein Polynom P in $R[X]$ der Form

$$P(a_0, a_1, \dots, a_d)(X) = a_d X^{q^d} + a_{d-1} X^{q^{d-1}} + \dots + a_1 X^q + a_0 X$$

nennen wir ein \mathbb{F}_q -lineares Polynom der Höhe d über \mathbb{F}_q .

(iii) Ein Polynom wie in (ii) heißt *nicht-entartet*, wenn $a_0, a_d \in R^\times$.

(iv) Ein nicht-entartetes \mathbb{F}_q -lineares Polynom P zerfällt in R , falls es einen nicht-entarteten \mathbb{F}_q -linearen Unterraum V von R und $c \in R^\times$ gibt mit

$$P = c \cdot \prod_{v \in V} (X - v).$$

2.2. Lemma. Sei R eine \mathbb{F}_q -Algebra. Dann ist die Abbildung

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{nicht-entarteter} \\ \mathbb{F}_q\text{-linearer} \\ \text{Unterraum } V \text{ der} \\ \text{Dimension } d \text{ in } R \end{array} \right\} \xrightarrow{F} \left\{ \begin{array}{l} \text{nicht-entartetes} \\ \mathbb{F}_q\text{-lineares} \\ \text{Polynom vom Grad} \\ q^d, \text{ das zerfällt in } R \end{array} \right\} / R^\times,$$

$$V \mapsto \prod_{v \in V} (X - v)$$

bijektiv mit Umkehrabbildung $P \mapsto \{v \in R^\times : P(v) = 0\} \cup \{0\}$.

Beweis. Sei R zunächst ganz. Man kann R in einen algebraisch abgeschlossenen Körper einbetten, und aus [7], 1.2.1 und 1.2.2 ergibt sich sofort die Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{F}_q\text{-linearer Unterraum } V \\ \text{von } R \text{ der Dimension } d \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{F}_q\text{-lineares Polynom von} \\ \text{Grad } q^d, \text{ dessen Wurzeln} \\ \text{alle in } R \text{ liegen} \end{array} \right\} / R^\times,$$

$$V \mapsto \prod_{v \in V} (X - v).$$

Diese Bijektion bildet offenbar nicht-entartete \mathbb{F}_q -lineare Unterräume genau auf nicht-entartete \mathbb{F}_q -lineare Polynome ab: sie ist kompatibel mit jeder Spezialisierung $R \rightarrow R/\mathfrak{p}$ für ein Primideal \mathfrak{p} .

Es sei jetzt R eine \mathbb{F}_q -Algebra, nicht notwendig ganz. Dann ist F offenbar immer noch surjektiv. Die Injektivität ergibt sich aus folgendem Sachverhalt:

Sei $P = \prod_{v \in V} (X - v)$ ein nicht-entartetes \mathbb{F}_q -lineares Polynom vom Grad q^d , das in R zerfällt, und V sei ein nicht-entarteter \mathbb{F}_q -linearer Unterraum von R der Dimension d . Sei

$$W = \{w \in R^\times : P(w) = 0\} \cup \{0\}.$$

Dann ist in der Tat $W = V$.

Offenbar ist $V \subseteq W$. Sei \mathfrak{p} ein Primideal von R und betrachte die kanonische Abbildung $\pi : R \rightarrow R/\mathfrak{p}$. Da V nicht-entartet ist, gilt $\ker(\pi|_V) = V \cap \mathfrak{p} = 0$, also $V \cong \pi(V)$. Da $W \subseteq R^\times \cup \{0\}$, ist $W \cap \mathfrak{p} = 0$, weswegen $W \cong \pi(W)$. Weil das induzierte Polynom $\pi(P)$ genau $\pi(V)$ als Menge seiner Wurzeln hat, ist $\pi(W) \cong \pi(V)$. Wir schliessen hieraus, dass $\dim W = \dim V$, und da $V \subseteq W$, also $V = W$. \square

2.3. Quotient durch $\text{GL}(d, \mathbb{F}_q)$. Man lässt die Gruppe $\mathfrak{G} = \text{GL}(d, \mathbb{F}_q)$ von rechts auf dem Polynomring $\mathbb{F}_q[U_1, \dots, U_d]$ operieren durch $U_j \cdot A = \sum_{i=1}^d a_{ji} U_i$ wobei $A = (a_{ij})$. Sei $\tilde{V} = \sum_{i=1}^d \mathbb{F}_q \cdot U_i$, und

$$T_0, \dots, T_{d-1} \in \mathbb{F}_q[U_1, \dots, U_d]$$

definiert durch die Gleichung

$$\prod_{v \in \tilde{V}} (X - v) = P(T_0, \dots, T_{d-1}, 1)(X).$$

Dann sind T_i offensichtlich \mathfrak{G} -Invarianten.

2.4. Proposition (Dickson [6]). *Die Elemente T_0, \dots, T_{d-1} sind algebraisch unabhängig über \mathbb{F}_q , und erzeugen den Invariantenring*

$$\mathbb{F}_q[U_1, \dots, U_d]^{\mathfrak{G}} = \mathbb{F}_q[T_0, \dots, T_{d-1}].$$

Insbesondere ist $\mathbb{F}_q[T_0, \dots, T_{d-1}]$ ganzabgeschlossen im Zerfällungskörper von

$$P(T_0, \dots, T_{d-1}, 1).$$

Beweis. Siehe z.B. [23]. \square

2.5. Korollar. *Bezeichnet man mit W das Produkt aller nicht-Null Elemente aus $\tilde{V} = \sum_{i=1}^d \mathbb{F}_q U_i$, so ist*

$$\mathbb{F}_q[U_1, \dots, U_d, W^{-1}]^{\mathfrak{G}} = \mathbb{F}_q[T'_1, \dots, T'_d, T_d'^{-1}]$$

mit $P(1, T'_1, \dots, T'_d) = Y \prod_{v \in \tilde{V} - \{0\}} (1 - v^{-1} Y)$.

$$\begin{aligned} \text{Beweis.} \quad \mathbb{F}_q[U_1, \dots, U_d, W^{-1}]^{\mathfrak{G}} &= \mathbb{F}_q[T_0, \dots, T_{d-1}, T_0^{-1}] \\ &= \mathbb{F}_q[T_1 T_0^{-1}, \dots, T_{d-1} T_0^{-1}, T_0^{-1}, T_0] \\ &= \mathbb{F}_q[T'_1, \dots, T'_d, T_d'^{-1}]. \quad \square \end{aligned}$$

2.6. Moduln von Unterräumen. Sei k ein Körper der \mathbb{F}_q umfasst. Betrachte den kovarianten Funktor $\mathbf{L}_d : \mathbf{Alg}_k \rightarrow \mathbf{Mengen}$, der einer k -Algebra R die Menge $\mathbf{L}_d(R)$ aller nicht-entarteten \mathbb{F}_q -linearen Unterräume der Dimension d in R zuordnet. Die étale Garbifizierung dieses Funktors ist der kontravariante Funktor $\mathcal{L}_d : \mathbf{Sch}_k \rightarrow \mathbf{Mengen}$

$$X \mapsto \mathcal{L}_d(X) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{F}_q\text{-Untermoduln von } \mathcal{O}_X^{\text{ét}}, \text{ die ein étales} \\ \mathbb{F}_q\text{-lokales System vom Rang } d \text{ bilden} \end{array} \right\}.$$

Wir benötigen später zusätzlich noch folgende Konstruktion. Sei $H = \mathbb{F}_q^d$ versehen mit der Standardbasis, und definiere den Funktor $\tilde{\mathbf{L}}_d : \mathbf{Alg}_k \rightarrow \mathbf{Mengen}$, der jeder k -Algebra R die Menge $\tilde{\mathbf{L}}_d(R)$ aller \mathbb{F}_q -linearen Einbettungen $\theta : H \hookrightarrow R$ mit nicht-entartetem Bild zuordnet. Dazu gehört in der Kategorie der k -Schemata ein kontravarianter Funktor $\tilde{\mathcal{L}}_d$ gegeben durch die étale Garbifizierung von

$$\mathbf{Sch}_k \rightarrow \mathbf{Mengen} : X \mapsto \{(\mathcal{V}, e_1, \dots, e_d) \mid \mathcal{V} \in \mathcal{L}_d(X)\},$$

wobei e_1, \dots, e_d Schnitte sind, die eine \mathbb{F}_q -Basis bilden in jedem geometrischen Punkt, d.h. dem separablen Abschluss von jedem Punkt auf X .

2.7. Sei $\mathfrak{R}_d = k[T_1, \dots, T_d, T_d^{-1}]$ und betrachte das \mathbb{F}_q -lineare Polynom

$$P^*(T_1, \dots, T_d)(X) = P(1, T_1, \dots, T_d).$$

Schreiben wir $\tilde{\mathfrak{R}}_d$ für den ganzen Abschluss von \mathfrak{R}_d im Zerfällungskörper von $P(T_1, \dots, T_d)$ über $k(T_1, \dots, T_d)$, so ist $\tilde{\mathfrak{R}}_d/\mathfrak{R}_d$ eine Galoiserweiterung mit Gruppe $\mathfrak{G} = \mathrm{GL}(d, \mathbb{F}_q)$. Insbesondere ist $\tilde{\mathfrak{R}}_d^{\mathfrak{G}} = \mathfrak{R}_d$ (1.4). Proposition 2.4 impliziert, dass $\tilde{\mathfrak{R}}_d$ gleich dem lokalisierten Polynomring

$$\tilde{\mathfrak{R}}_d \cong k[U_1, \dots, U_d, W^{-1}]$$

ist, wobei U_1, \dots, U_d linear unabhängige Lösungen von $P^*(T_1, \dots, T_d)$ sind, und W das Produkt aller nicht-Null Elemente von $\tilde{V} = \sum_{i=1}^d \mathbb{F}_q U_i$ ist. Man beachte, dass \tilde{V} offensichtlich zu $\mathbf{L}_d(\tilde{\mathfrak{R}}_d)$ gehört.

2.8. Offenbar wird der Funktor $\tilde{\mathbf{L}}_d$ vom Ring $\tilde{\mathfrak{R}}_d$ mit der Basis U_1, \dots, U_d dargestellt. Was den Funktor \mathbf{L}_d angeht, erwartet man wegen $\mathbf{L}_d = \mathfrak{G} \backslash \tilde{\mathbf{L}}_d$, dass \mathfrak{R}_d der entsprechende Ring ist. Sei $h_{\mathfrak{R}_d} = \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{R}_d, -)$ der von ihm dargestellte Funktor. Es gibt einen natürlichen Morphismus zwischen Funktoren $\Phi_d : \mathbf{L}_d \rightarrow h_{\mathfrak{R}_d}$, der jedem $V \in \mathbf{L}_d(R)$ die Abbildung

$$\Phi_d(R)(V) : \mathfrak{R}_d \rightarrow R : T_i \mapsto a_i \quad (i = 1, \dots, d)$$

zuordnet, wobei die a_i dadurch definiert sind, dass $P^*(a_1, \dots, a_d)$ das nach 2.2 zu V gehörige \mathbb{F}_q -lineare Polynom über R ist. Dabei ist Φ_d ein Monomorphismus, aber im Allgemeinen kein Epimorphismus, da das Polynom $P^*(a_1, \dots, a_d)$ nicht in R zu zerfallen braucht. Deswegen stellt \mathfrak{R}_d den Funktor \mathbf{L}_d nicht fein dar. Wir haben jedoch die

2.9. Proposition. *Das Paar (\mathfrak{R}_d, Φ_d) stellt den Funktor \mathbf{L}_d grob dar.*

Beweis. Für einen algebraisch abgeschlossenen Körper F ist $\Phi_d(F)$ offensichtlich bijektiv. Sei S eine k -Algebra, und $\Psi : \mathbf{L}_d \rightarrow h_S$ ein Morphismus von Funktoren. Betrachte $\Psi(\tilde{\mathfrak{R}}_d) : \mathbf{L}_d(\tilde{\mathfrak{R}}_d) \rightarrow \mathrm{Hom}_k(S, \tilde{\mathfrak{R}}_d)$, und sei ϕ das Bild von \tilde{V} . Wegen Funktorialität operiert die Galoisgruppe \mathfrak{G} auf $\mathbf{L}_d(\tilde{\mathfrak{R}}_d)$ sowie $\mathrm{Hom}_k(S, \tilde{\mathfrak{R}}_d)$, und die Abbildung $\Psi(\tilde{\mathfrak{R}}_d)$ ist offensichtlich \mathfrak{G} -äquivariant. Da \tilde{V} \mathfrak{G} -invariant ist als Element von $\mathbf{L}_d(\tilde{\mathfrak{R}}_d)$, ist ϕ \mathfrak{G} -invariant, weswegen $\phi \in \mathrm{Hom}_k(S, \mathfrak{R}_d)$. Es gibt also eine Abbildung $\phi^* : h_{\mathfrak{R}_d} \rightarrow h_S$.

Es muss jetzt gezeigt werden, dass $\phi^* \circ \Phi_d = \Psi$. Sei R eine k -Algebra, und betrachte die Abbildungen $\phi^*(R) \circ \Phi_d(R)$ und $\Psi(R)$. Sei $V \in \mathbf{L}_d(R)$ und $\psi : \mathfrak{R}_d \rightarrow R$ der zugehörige Morphismus (d.h. $\psi = \Phi_d(R)(V)$). Definiere $\varphi = \Psi(R)(V) : S \rightarrow R$. Man kann einen Morphismus $\tilde{\mathfrak{R}}_d \rightarrow R$ wählen, der mit ψ und $\mathfrak{R}_d \hookrightarrow \tilde{\mathfrak{R}}_d$ kompatibel ist und \tilde{V} bijektiv auf V abbildet. Dann kommutiert

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{L}_d(\tilde{\mathfrak{R}}_d) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_k(S, \tilde{\mathfrak{R}}_d) & & \tilde{V} \longmapsto \phi \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{L}_d(R) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_k(S, R) & & V \longmapsto \varphi, \end{array}$$

weswegen $\varphi = \psi \circ \phi$. Daraus folgt die gewünschte Gleichung $\phi^*(R) \circ \Phi_d(R) = \Psi(R)$. \square

2.10. Variante: Moduln von Fahnen. Wir werden ab jetzt gelegentlich die Schreibweise $P \circ Q$ benutzen für die Komposition zweier Polynome: $P \circ Q(X) := P(Q(X))$.

2.11. Lemma. *Seien R eine \mathbb{F}_q -Algebra und V und V' nicht-entartete \mathbb{F}_q -lineare Unterräume von R der Dimension d , respektive d' , wobei wir $d \geq d'$ annehmen. Seien P und P' die zu V und V' gehörigen \mathbb{F}_q -linearen Polynome der respektiven Höhen d , d' . Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent:*

- (i) *Es gibt ein \mathbb{F}_q -lineares Polynom P'' der Höhe $d - d'$ mit $P = P'' \circ P'$.*
- (ii) $V' \subseteq V$.

Beweis. Da V und V' die respektiven Mengen der Wurzeln von P und P' sind wie in 2.2, ist (i) \Rightarrow (ii) klar. Die andere Richtung beweisen wir, indem wir ein \mathbb{F}_q -lineares Komplement $W \subseteq R$ von V' in V betrachten: $V = V' \oplus W$. Weil die Polynomabbildung $P' : W \rightarrow R$ eine \mathbb{F}_q -lineare Injektion ist, so ist ihr Bild V'' ein \mathbb{F}_q -linearer Unterraum von R der Dimension $d - d'$. Sei $P'' = \prod_{v'' \in V''} (X - v'')$ das zu V'' gehörige Polynom. Wir können voraussetzen, dass P , P' und P'' monisch sind, und dann ist

$$\begin{aligned} P(X) &= \prod_{w \in W} \prod_{v' \in V'} (X - v' - w) = \prod_{w \in W} P'(X - w) \\ &= \prod_{w \in W} (P'(X) - P'(w)) = P'' \circ P'(X). \end{aligned}$$

Damit ist das Lemma bewiesen. \square

2.12. Korollar. *Sei $d = f_1 + \dots + f_e$ eine Zerlegung von d in positive ganze Zahlen. Für jede Fahne $V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_e$ bestehend aus nicht-entarteten V_i der Dimension $d_i = f_1 + \dots + f_i$ gibt es ein bis auf Skalarmultiplikation mit R^\times eindeutig bestimmtes nicht-entartetes \mathbb{F}_q -lineares Polynom über R der Form $P_e \circ P_{e-1} \circ \dots \circ P_1$, wobei P_i nicht-entartet der Höhe f_i ist.*

Beweis. Per Induktion wird die Behauptung auf den Fall $e = 2$, der im obigen Lemma behandelt wurde, zurückgeführt. \square

2.13. Parabolischer Quotientenfunktor. Für eine Zerlegung einer ganzen Zahl $d = f_1 + \dots + f_e$ in positive ganze Zahlen definieren wir einen kovarianten Funktor $\mathbf{L}_{(f_1, \dots, f_e)} : \mathbf{Alg}_k \rightarrow \mathbf{Mengen}$ der jeder k -Algebra die Menge aller Fahnen $V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_e$ nicht-entarteter \mathbb{F}_q -linearer Unterräume V_i von R der Dimension $d_i := f_1 + \dots + f_i$ zuordnet. Die zugehörige étale Garbe $\mathcal{L}_{(f_1, \dots, f_e)}$ ist gegeben durch

$$X \mapsto \mathcal{L}_{(f_1, \dots, f_e)}(X) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Fahnen } \mathcal{V}_1 \subset \dots \subset \mathcal{V}_e \\ \text{mit } \mathcal{V}_i \in \mathcal{L}_{d_i}(X) \end{array} \right\}.$$

Offensichtlich ist der Funktor $\mathbf{L}_{(f_1, \dots, f_e)}$ der Quotient von $\tilde{\mathbf{L}}_d$ durch die parabolische Untergruppe $\mathfrak{P}_{(f_1, \dots, f_e)}$ von \mathfrak{G} des richtigen Fahnentyps.

2.14. Proposition (cf. [11], 1.4). *Mit der gleichen Notation wie in 2.5 gilt*

$$\mathbb{F}_q[U_1, \dots, U_d, W^{-1}]^{\mathfrak{R}_{(f_1, \dots, f_e)}} = \mathbb{F}_q[S_1^1, \dots, S_{f_1}^1, (S_{f_1}^1)^{-1}; \dots; S_1^e, \dots, S_{f_e}^e, (S_{f_e}^e)^{-1}],$$

wobei $P^*(S_1^e, \dots, S_{f_e}^e) \circ \dots \circ P^*(S_1^1, \dots, S_{f_1}^1) = X \prod_{v \in \tilde{V} - \{0\}} (1 - v^{-1}X)$.

Beweis. Wie 2.4. \square

2.15. Darstellbarkeit. Wir definieren

$$\mathfrak{R}_{(f_1, \dots, f_e)} = k[S_1^1, \dots, S_{f_1}^1, (S_{f_1}^1)^{-1}; \dots; S_1^e, \dots, S_{f_e}^e, (S_{f_e}^e)^{-1}].$$

Nach 2.12 gibt es wie in 2.8 einen natürlichen Morphismus zwischen Funktoren

$$\Phi_{(f_1, \dots, f_e)} : \mathbf{L}_{(f_1, \dots, f_e)} \rightarrow h_{\mathfrak{R}_{(f_1, \dots, f_e)}}.$$

2.16. Proposition. *Das Paar $(\mathfrak{R}_{(f_1, \dots, f_e)}, \Phi_{(f_1, \dots, f_e)})$ stellt den Funktor $\mathbf{L}_{(f_1, \dots, f_e)}$ grob dar.*

Beweis. Wie 2.9. \square

2.17. Zusammenhang zwischen \mathfrak{R}_d und $\mathfrak{R}_{(1, \dots, 1)}$. Wir berechnen die Abbildung

$$\mathfrak{R}_d = k[T_1, \dots, T_d, T_d^{-1}] \hookrightarrow \mathfrak{R}_{(d-1, 1)} = k[T'_1, \dots, T'_{d-1}, T'_{d-1}^{-1}; S, S^{-1}]$$

definiert durch $P^*(S) \circ P^*(T'_1, \dots, T'_{d-1}) = P^*(T_1, \dots, T_d)$. Weil

$$\begin{aligned} P^*(S) \circ P^*(T'_1, \dots, T'_{d-1}) &= P(1, S) \circ P(1, T', \dots, T'_{d-1}) \\ &= (SX^q + X) \circ P(1, T', \dots, T'_{d-1}) \\ &= S \cdot P(1, T', \dots, T'_{d-1})^q + P(1, T', \dots, T'_{d-1}) \\ &= P^*(S + T'_1, ST_1'^q + T'_2, \dots, ST_{d-2}'^q + T'_{d-1}, ST_{d-1}'^q), \end{aligned}$$

findet man $\mathfrak{R}_{(d-1, 1)} = \mathfrak{R}_d[S]$ und das Minimalpolynom von S ist gegeben durch das normierte Polynom

$$S^{\frac{q^d - 1}{q - 1}} + \sum_{i=0}^{d-1} (-1)^{d-i} T_{d-i}'^q S^{\frac{q^i - 1}{q - 1}}.$$

Per Induktion folgt hieraus, dass die Erweiterung

$$\mathfrak{R}_d = k[T_1, \dots, T_d, T_d^{-1}] \hookrightarrow \mathfrak{R}_{(1, \dots, 1)} = k[S_1^{\pm 1}, \dots, S_d^{\pm 1}],$$

gegeben durch $P^*(S_d) \circ \dots \circ P^*(S_1) = P^*(T_1, \dots, T_d)$, endlich vom Grad $\prod_{i=1}^d \frac{q^i - 1}{q - 1}$ ist.

2.18. Zusammenhang zwischen $\mathfrak{R}_{(1, \dots, 1)}$ und $\tilde{\mathfrak{R}}_d$. Sei $\mathfrak{R}_{(1, \dots, 1)} = k[S_1^{\pm 1}, \dots, S_d^{\pm 1}]$, wobei die Parameter korrespondieren zu denen in

$$P^*(S_d) \circ \cdots \circ P^*(S_1).$$

Sei U_1, \dots, U_d die Basis aus 2.7, derart dass der von U_1, \dots, U_i über \mathbb{F}_q erzeugte Raum die Menge der Wurzeln von

$$P^*(S_i) \circ \cdots \circ P^*(S_1)$$

ist für $i = 1, \dots, d$. Dann gilt induktiv

$$\begin{aligned} U_1^{q-1} + S_1^{-1} &= 0, \\ \{P^*(S_1)(U_2)\}^{q-1} + S_2^{-1} &= 0, \\ &\vdots \\ \{P^*(S_{d-1}) \circ \cdots \circ P^*(S_1)(U_d)\}^{q-1} + S_d^{-1} &= 0, \end{aligned}$$

welches die definierenden Gleichungen sind für den Morphismus

$$\mathfrak{R}_{(1, \dots, 1)} \hookrightarrow \tilde{\mathfrak{R}}_d,$$

der also endlich von Grad $q^{\frac{d(d-1)}{2}}(q-1)^d$ ist.

3. Konstruktion einer Familie schwach verzweigter Überlagerungen

3.1. Proposition (Konstruktion schwach verzweigter Erweiterungen). (i) Sei A komplett, B/A eine schwach verzweigte Erweiterung vom Typ (n, d) mit Galoisgruppe G und H die p -Sylowgruppe von G . Wähle eine Uniformisierende x für B , derart dass die Operation von G auf B gegeben ist in der kanonischen Form 1.18 und sei $\theta = \theta_{B/A}/dx$. Sei $P^*(a_1, \dots, a_d)$ ($a_d \neq 0$) das \mathbb{F}_q -lineare Polynom, das zu $V = \theta(H)$ gehört wie in 2.2 mit $R = k$. Betrachte das Element y in dem Quotientenkörper L von B , das durch

$$P^*(a_1, \dots, a_d)(x^{-1})^n = y^{-1}$$

definiert wird, d.h. $Q(x) = 0$ mit

$$Q(x) = x^{nq^d} - y(x^{q^d-1} + a_1x^{q(q^d-1)} + \cdots + a_{d-1}x^{q^{d-1}(q-1)} + a_d)^n.$$

Dann ist $y \in A$ eine Uniformisierende, und $B = A[x]/(Q(x))$.

(ii) Sei umgekehrt $(a_1, \dots, a_d) \in k^d$ mit $a_d \neq 0$ und definiere $B = A[x]/(Q(x))$, wobei das Polynom Q wie oben gegeben ist. Dann ist B/A eine schwach verzweigte Erweiterung vom Typ (n, d) mit Galoisgruppe G , und x eine Uniformisierende für B , derart dass $(\theta_{B/A}/dx)(H)$ (mit H der p -Sylowgruppe von G) der \mathbb{F}_p -lineare Unterraum von k ist, der durch die Gleichung

$$P^*(a_1, \dots, a_d)(X) = 0$$

bestimmt wird.

Beweis. (i) Wegen $Q(x) = 0$ und $a_d \neq 0$ ist $y \in B$. Da die Operation von G durch $\gamma(y^{-1}) = \zeta^{-1}y^{-1}$ und $\sigma(y^{-1}) = y^{-1} + \theta(\sigma)$ für $\sigma \in H$ gegeben wird, sehen wir, dass y G -invariant ist, also $y \in B^G = A$. Da B/A totalverzweigt ist vom Grad nq^d , sind Uniformisierende von A Elemente aus A mit B -Bewertung nq^d ; dies ist der Fall für y . Sei $B' = A[x]/(Q(x))$. Nach [20], I, Prop. 17 ist B' ein diskreter Bewertungsring mit Uniformisierender x und Restklassenkörper k . Weil $B' \subseteq B$ und die Quotientenkörper von B und B' denselben Grad haben, also gleich sind, gilt auch $B' = B$.

(ii) Weil $Q(x)$ Eisensteinsch ist, ist B ein diskreter Bewertungsring mit x als Uniformisierender, und B/A ist dabei totalverzweigt ([20], I, Prop. 17). Da $Q(x)$ invariant ist unter den Operationen

$$y \mapsto \zeta y \quad \text{und} \quad y \mapsto \frac{y}{1 - uy},$$

wobei u den durch $P^*(a_1, \dots, a_d)(X) = 0$ bestimmten \mathbb{F}_q -linearen Unterraum von k durchläuft, ist B/A schwach verzweigt vom Typ (n, d) . \square

3.2. Korollar. *Für komplette A gibt es eine natürliche Bijektion*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Isomorphieklassen schwach} \\ \text{verzweigter Erweiterungen} \\ B/A \text{ vom Typ } (n, d) \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \text{GL}(d, \mathbb{F}_q) \setminus \{ \mathbb{F}_q\text{-lineare } H \hookrightarrow k \} / k^\times.$$

Beweis. Unmittelbar aus 1.20 und 3.1 (ii). \square

3.3. Korollar. *Für $d = 0$ und $d = 1$ gibt es nur eine schwach verzweigte Erweiterung vom Typ (n, d) eines gegebenen kompletten Ringes A .*

Beweis. Folgt aus 3.2. Für $d = 0$ ist das Ergebniss aber auch klassisch, für $d = 1$ folgt es unmittelbar aus der Artin-Schreierschen Theorie. \square

3.4. Konstruktion des Schemas \mathcal{S} . Sei k ein Körper über \mathbb{F}_q und A ein diskreter Bewertungsring mit Restklassenkörper k . Nach 3.2 muss die allgemeinste Familie schwach verzweigter Erweiterungen von A über

$$\mathbb{G}_k \setminus \tilde{\mathbf{L}}_d / \mathbb{G}_{m,k} = \mathbf{L}_d / \mathbb{G}_{m,k}$$

konstruiert werden, wo $\mathbb{G} = \text{GL}(d, \mathbb{F}_q)$. Der Funktor \mathbf{L}_d wird grob vom Ring $\mathfrak{R}_d = k[T_1, \dots, T_d, T_d^{-1}]$ dargestellt (2.9), wobei die Parameter aus dem Polynom $P^*(T_1, \dots, T_d) = P(1, T_1, \dots, T_d)$ stammen. Sei

$$\tilde{\mathfrak{R}}_d = k[U_1, \dots, U_d, W^{-1}]$$

wie in 2.7 und $\tilde{V} = \sum_{i=1}^d \mathbb{F}_q U_i$ der Vektorraum der Wurzeln von

$$P^*(T_1, \dots, T_d).$$

Für $c \in \tilde{\mathfrak{R}}_d^\times$ hat $c^{-1}\tilde{V}$ als zugehöriges Polynom $P^*(c^{q-1}T_1, \dots, c^{q^d-1}T_d)$, weil

$$P^*(T_1, \dots, T_d)(cX) = cP^*(c^{q-1}T_1, \dots, c^{q^{d-1}}T_d)(X).$$

Wir versehen also \mathfrak{R}_d mit einer Graduierung, deren Gewichte $w(T_i) = q^i - 1$ ($i = 1, \dots, d$) sind. Dann ergibt sich sofort, dass der Funktor $\mathbf{L}_d/\mathbb{G}_{m,k}$ grob dargestellt wird von (dem Koordinatenring von) dem affinen offenen Unterschema

$$\mathcal{S} \subset \mathbb{P}_k(q-1, \dots, q^d-1) = \text{Proj } k[T_1, \dots, T_d],$$

welches das Komplement der Hyperebene $V(T_d)$ ist.

3.5. Konstruktion des Schemas \mathcal{X} . Man betrachte jetzt den graduierten Ring $k[T_1, \dots, T_d, X, Z]$, mit Gewichten $w(X) = w(Z) = 1$ und, für eine feste Uniformisierende y in A (cf. 3.1), das Polynom

$$Q = X^{nq^d} - yZ^n(X^{q^d-1} + T_1X^{q(q^d-1)} + \dots + T_{d-1}X^{q^{d-1}(q-1)} + T_d)^n,$$

welches homogen ist vom Grad nq^d in $A[T_1, \dots, T_d, X, Z]$. Es definiert ein geschlossenes Teilschema $V(Q)$ in

$$\mathbb{P}_A(q-1, \dots, q^d-1, 1, 1) = \text{Proj } A[T_0, \dots, T_d, X, Z].$$

Sei \mathcal{X} das Komplement von $V(T_d)$ in $V(Q)$. Wir erhalten dann einen Morphismus von A -Schemata

$$\pi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{S} \times_k \text{Spec } A,$$

der endlich vom Grad nq^d ist. Für komplettes A und einen algebraisch abgeschlossenen Körper F/k entsteht jede schwach verzweigte Erweiterung von $A \otimes_k F$ durch geschickte Spezialisierung von T_1, \dots, T_d und Z über k , wobei das Bild von T_d und Z nicht Null ist.

3.6. Konstruktion des Schemas $\tilde{\mathcal{S}}$. Zwischen $\tilde{\mathbf{L}}_d$ und \mathbf{L}_d liegt der „vollständige-Fahnen“-Funktork $\mathbf{L}_{(1, \dots, 1)}$, der vom Ring

$$\mathfrak{R}_{(1, \dots, 1)} = k[S_1^{\pm 1}, \dots, S_d^{\pm 1}]$$

grob dargestellt wird, wobei S_1, \dots, S_d mit dem Parameter im Polynom $P^*(S_d) \circ \dots \circ P^*(S_1)$ übereinstimmen. Weil $P^*(S)(cX) = cP^*(c^{q-1}S)(X)$, gilt

$$P^*(S_d) \circ \dots \circ P^*(S_1)(cX) = cP^*(c^{q-1}S_d) \circ \dots \circ P^*(c^{q-1}S_1)(X),$$

und deswegen ist $w(S_i) = q-1$. Ähnlich wie oben wird der Funktor

$$\mathbf{L}_{(1, \dots, 1)}/\mathbb{G}_{m,k}$$

also grob dargestellt durch das affine Unterschema von

$$\mathbb{P}_k(q-1, \dots, q-1) = \text{Proj } k[S_1, \dots, S_d],$$

welches das Komplement der Hyperebenen $\bigcup_{i=1}^d V(S_i)$ ist. Aus 2.18 folgt außerdem, dass im Ring $\tilde{\mathfrak{R}}_d = k[U_1, \dots, U_d, W^{-1}]$ die Gewichte $w(U_i) = -1$ sind für $i = 1, \dots, d$. Deswegen wird $\tilde{\mathbf{L}}_d/\mathbb{G}_{m,k}$ grob dargestellt durch das affine offene Unterschema von

$$\mathbb{P}_k^{d-1} = \text{Proj } k[U_1^{-1}, \dots, U_d^{-1}],$$

welches das Komplement der Hyperebenen $\bigcup_{i=1}^d V(U_i^{-1})$ und aller Hyperflächen definiert durch nicht-triviale \mathbb{F}_q -lineare Kombinationen von

$$U_1, \dots, U_d$$

ist. Sei $\tilde{\mathcal{S}}$ das derart konstruierte k -Schema.

3.7. Konstruktion des Schemas $\tilde{\mathcal{X}}$. Es gibt einen endlichen Morphismus $\tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}$, der Galoissch ist mit Galoisgruppe $\mathfrak{G} = \text{GL}(d, \mathbb{F}_q)$. Es sei $\tilde{\pi} : \tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \tilde{\mathcal{S}}$ durch Kommutieren des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{X}} & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ \tilde{\pi} \downarrow & & \downarrow \pi \\ \tilde{\mathcal{S}} \times_k \text{Spec } A & \longrightarrow & \mathcal{S} \times_k \text{Spec } A \end{array}$$

definiert. Dieser Morphismus wird durch Zurückziehen von Q erhalten, ist also gegeben durch

$$yZ^n X^{-n} \prod_{v \in \tilde{V} - \{0\}} (1 - v^{-1} X^{-1})^n = 1,$$

was gleichbedeutend damit ist, dass

$$\tilde{Q} = 0, \quad \text{wo} \quad \tilde{Q} = X^{nq^d} - yZ^n \prod_{v \in \tilde{V} - \{0\}} (X - v^{-1})^n$$

(man beachte, dass jedes $v \in \tilde{V} - \{0\}$ Gewicht -1 hat). So erlaubt $\tilde{\mathcal{X}}$ eine Operation durch $G_{n,d}$ gegeben von

$$\gamma(X : Z) = (X : \zeta^{-1}Z), \quad \sigma(X : Z) = (X : Z - \theta(\sigma)X),$$

wobei $\theta : H \xrightarrow{\sim} \tilde{V}$ irgendein \mathbb{F}_q -linearer Isomorphismus und γ erzeugendes Element eines Torusteils ist. Diese Definition ist sinnvoll, weil \tilde{Q} nicht Null ist für $X = v^{-1}$ ($v \in \tilde{V} - \{0\}$) und man also $1 - \theta(\sigma)Y$ invertieren kann auf $\tilde{\mathcal{X}}$. Offensichtlich ist dann $\tilde{\pi}$ eine Galoissche Überlagerung mit der Gruppe $G_{n,d}$. Des Weiteren kann jede schwach verzweigte Erweiterung über $A \otimes_k F$ (mit einem algebraisch abgeschlossenen Körper F) durch Spezialisierung über k bekommen werden, und zwar eindeutig bis auf \mathfrak{G} .

3.8. Der Funktor L_d^1 . Damit wir jetzt eine Entartung konstruieren können, nehmen wir an, dass $d > 1$, und betrachten den Funktor L_d^1 , der nicht-entartete \mathbb{F}_q -lineare Unterräume der Dimension d mit einem ausgezeichneten, von Null verschiedenen Vektor klassifiziert. Der Funktor L_d^1 ist eine Überlagerung vom Grad $q - 1$ über $L_{(1,d-1)}$ (siehe oben). Der Ring

$$\mathfrak{R}_{(1,d-1)} = k[S, S^{-1}, S_1, \dots, S_{d-1}, S_{d-1}^{-1}]$$

stellt $\mathbf{L}_{(1,d-1)}$ grob dar (2.15), gehörend zum Polynom

$$P^*(S_1, \dots, S_{d-1}) \circ P^*(S).$$

Deswegen wird der Funktor \mathbf{L}_d^1 vom Ring

$$\mathfrak{R}_d^1 = k[T, T^{-1}, S_1, \dots, S_{d-1}, S_{d-1}^{-1}]$$

grob dargestellt, wobei T durch

$$T^{q-1} + S^{-1} = 0$$

bestimmt wird (cf. 2.18).

Aus 3.1 folgt, dass eine Familie schwach verzweigter Erweiterungen über \mathfrak{R}_d^1 gegeben wird durch die Gleichung

$$(P^*(S_1, \dots, S_{d-1})(T^{1-q}x^{-q} + x^{-1}))^n = y^{-1},$$

oder auch durch ein Eisensteinsches Polynom wie in 3.1. Wir untersuchen was passiert, wenn $T \rightarrow \infty$, d.h. wenn der ausgezeichnete Vektor gegen Null geht, während die übrigen Parameter

$$(S_1, \dots, S_{d-1}) = (s_1, \dots, s_{d-1})$$

für feste $s_i \in k$ erfüllen. Es sei ab jetzt k algebraisch abgeschlossen. Wir setzen $t = -T^{-1}$ ein, und ersetzen y durch $-y$. Wir betrachten die von $\mathbb{G}_{m,k} = \text{Spec } k[t^{\pm 1}]$ parametrisierte Familie \mathcal{X}_t schwach verzweigter Erweiterungen definiert durch

$$P^*(s_1, \dots, s_{d-1})(t^{q-1}x^{-q} - x^{-1})^n = y^{-1}$$

in $\text{Spec } A[x, t]$. Die Operation der Galoisgruppe $G_{n,d}$ sieht dann so aus: man betrachtet eine \mathbb{F}_q -lineare Zerlegung $H = H' \oplus H''$ der p -Sylowgruppe H von $G_{n,d}$ und wählt die Einbettung $\theta : H \rightarrow k[t^{\pm 1}]$ so, dass $\theta(H)$ zu $P^*(s_1, \dots, s_{d-1}) \circ P^*(-t^{q-1})$ gehört, und $\theta(H'')$ über \mathbb{F}_q von t erzeugt wird. Sei γ ein erzeugendes Element eines Torusteils mit $\gamma\sigma\gamma^{-1} = \zeta\sigma$ für $\sigma \in H$. Dann wird die Galoissche Operation wie in 1.18 gegeben.

3.9. Definition/Konstruktion. Sei \mathfrak{R} der ganze Abschluss von $k[t^{\pm 1}]$ im Zerfällungskörper des Polynoms

$$P^*(t^{1-q}s_1, \dots, t^{1-q} s_{d-1}) \circ P^*(-1)$$

über $k(t)$. Für jede Lösung u von $P^*(s_1, \dots, s_{d-1})$ gehören dann alle Wurzeln w von $w^q - w - tu$ zu \mathfrak{R} . Sei V der \mathbb{F}_q -lineare Unterraum von \mathfrak{R} gegeben durch alle solche Wurzeln w , und bezeichne $V'' = \mathbb{F}_q \subseteq V$. Sei $\eta : V \rightarrow k$ die Abbildung $w \mapsto t^{-1}(w^q - w)$. Dann hat η als Bild genau den zu $P^*(s_1, \dots, s_{d-1})$ gehörenden \mathbb{F}_q -linearen Unterraum. Unter Verwendung eines Schnittes von η ergibt sich eine Zerlegung $V = V'' \oplus V'$, derart dass η den Raum V' bijektiv auf die Wurzeln von $P^*(s_1, \dots, s_{d-1})$ abbildet. Sei $\hat{\theta} = \theta' \oplus \theta'' : H = H' \oplus H'' \rightarrow V = V' \oplus V''$ eine \mathbb{F}_q -lineare Einbettung, die diese Zerlegung respektiert.

3.10. Proposition. *Wir setzen $d > 1$ voraus. Dann gilt folgendes.*

(i) *Die Familie \mathcal{X}_t ist über $\text{Spec } A \times_k \mathbb{G}_{m,k} = \text{Spec } A[t^{\pm 1}]$ isomorph zur Familie $\tilde{\mathcal{X}}_t$, die in $\text{Spec } A[y, t] \times_A \mathbb{P}_A^1 = \text{Spec } A[y, t] \times_A \text{Proj } A[Z, W]$ durch folgende Gleichungen definiert wird:*

$$\begin{cases} P^*(s_1, \dots, s_{d-1})(x^{-1})^n = y^{-1}, \\ x(Z^{-q} - Z^{-1}W^{1-q}) = tW^{-q}. \end{cases}$$

(ii) *Der Isomorphismus zwischen \mathcal{X}_t und $\tilde{\mathcal{X}}_t$ kann über eine geschickte Erweiterung von $k[t^{\pm 1}]$ zu einem Isomorphismus von $G_{n,d}$ -Galoiserweiterungen über $\text{Spec } A[t^{\pm 1}]$ gemacht werden. Genauer ist die Operation von $G_{n,d}$ auf $\tilde{\mathcal{X}}_{t,\mathbb{R}}$ definiert durch*

$$\begin{cases} \gamma(x) = \zeta x, \\ \gamma(Z : W) = (Z : \zeta^{-1}W), \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma(x) = \frac{x}{1 - \eta \circ \theta'(\sigma')x}, \\ \sigma(Z : W) = (Z, Z + \tilde{\theta}(\sigma)W), \end{cases}$$

wobei $\sigma = \sigma' + \sigma'' \in H = H' \oplus H''$.

(iii) *Die Faser $\tilde{\mathcal{X}}_0$ besteht aus einem \mathbb{P}_k^1 definiert durch $x = 0$ (und infolgedessen $y = 0$) und q Kopien von $\text{Spec } B$, wobei B/A die durch*

$$(P^*(s_1, \dots, s_{d-1})(x^{-1}))^n = y^{-1}$$

definierte schwach verzweigte Erweiterung ist, die \mathbb{P}_k^1 in den q Punkten $\{W/Z \in \mathbb{F}_q\}$ normal schneiden.

(iv) *Die Gruppenoperation setzt sich auf natürliche Weise auf der Faser $\tilde{\mathcal{X}}_0$ fort: H' operiert wie üblich auf jedem B und permutiert die q Punkte $\{W/Z \in \mathbb{F}_q\}$ und die zugehörigen Kopien von $\text{Spec } B$. Die Komponente \mathbb{P}_k^1 wird punktweise von $H' \rtimes T = G_{n,d-1}$ festgehalten, und der Punkt $\{W/Z = \infty\}$ ist der einzige Punkt, der von ganz $G_{n,d}$ festgehalten wird.*

Beweis. (i) Es sei I das Ideal

$$I = A[x, t] \cap (yP^*(s_1, \dots, s_{d-1})(t^{q-1}x^{-q} - x^{-1})^n - 1),$$

wobei $(yP^*(s_1, \dots, s_{d-1})(t^{q-1}x^{-q} - x^{-1})^n - 1)$ Ideal ist in $A[x^{\pm 1}, t]$. Es sei J das Ideal

$$J = A[x, t][Z/W] \cap (yP^*(s_1, \dots, s_{d-1})(x^{-1})^n - 1, x((Z/W)^{-q} - (Z/W)^{-1}) - t),$$

wobei der Schnitt in $A[x^{\pm 1}, t][(Z/W)^{\pm 1}]$ genommen wird. Es wird dann eine rationale Abbildung $\tilde{\mathcal{X}}_t \rightarrow \mathcal{X}_t$ definiert durch

$$\varphi : A[x, t]/I \rightarrow A[x, t][Z/W]/J$$

mit $\varphi(x) = t(Z/W)$ (in der Tat eine *Aufblasung*). Wenn t invertierbar ist, so besitzt φ eine Umkehrung definiert durch

$$\varphi^{-1}(x^{-1}) = t^q x^{-q} - x^{-1}, \quad \varphi^{-1}(Z/W) = t^{-1}x.$$

(ii) Dieser Morphismus ist $G_{n,d}$ -äquivariant.

(iii) Offensichtlich.

(iv) In der Tat bildet $\eta \circ \theta'$ den Raum H' konstant auf den \mathbb{F}_q -linearen Raum ab, der zu $P^*(s_1, \dots, s_{d-1})$ gehört. Weil $V|_{t=0} = V \cap k = V'' = \mathbb{F}_q$, gilt

$$\sigma(Z : W) = (Z, Z + \theta''(\sigma'')W) \quad \text{für } t = 0. \quad \square$$

4. Beweis für Satz A

4.1. Notationen. Es sei jetzt $\pi : X \rightarrow Y$ eine schwach verzweigte Galoissche Überlagerung glatter projektiver Kurven über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k der Charakteristik $p > 0$ mit Galoisgruppe G , verzweigt über einer Menge endlich vieler abgeschlossener Punkte $B = \{y_0, \dots, y_r\} \hookrightarrow Y$, mit $y_0 = y = \pi(x)$ für $x \in X$. Wir nehmen des Weiteren an, x habe eine Zerlegungsgruppe G_x vom Typ (n, d) mit $n = n_x$ und $q^d = p^{t_x}$. Man beachte, dass $s_x \neq t_x$ gleichbedeutend damit ist, dass $d > 1$.

4.2. Lokale und globale Funktoren. Es sei

$$\mathcal{F}_{(Y, G, (y_i, G_i)_{i=0}^r)} : \mathbf{Sch}_k \rightarrow \mathbf{Mengen}$$

der „globale“ Funktor, der ein Schema S über k abbildet auf die Menge G -Galoisscher schwach verzweigter Überlagerungen von glatten projektiven Kurven über S :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{\Pi} & \mathcal{Y} = S \times Y \\ & \searrow & \swarrow \text{pr}_1 \\ & & S, \end{array}$$

wobei es einen festen Punkt $s \in S$ gibt, derart dass Π genau über $\{s\} \times B$ (schwach verzweigt) verzweigt und die Verzweigungsgruppe in (s, y_i) isomorph zu G_i ist.

Wir benötigen auch den „lokalen“ Funktor $\mathcal{F}_G : \mathbf{Sch}_k \rightarrow \mathbf{Mengen}$ der einem k -Schema S die Menge aller Galoisschen schwach verzweigten Überlagerungen $T \rightarrow \text{Spec } k[[y]] \times_k S$ mit Galoisgruppe G zuordnet.

Wie in [2], 3.3, gibt es einen Morphismus von Funktoren

$$\mathcal{F}_{(Y, G, (y_i, G_i)_{i=0}^r)} \xrightarrow{\Psi} \prod_{i=0}^r \mathcal{F}_{G_i}.$$

4.3. Formale Komplettierung. Durch formale Komplettierung in einem F -wertigen Punkt (für beliebige Körper F über k), die wir mit

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\pi'} & Y' = Y_F \\ & \searrow & \swarrow \\ & & \text{Spec } F \end{array}$$

bezeichnen, gehen die Funktoren und der Morphismus Ψ in ihre formalen Varianten über, d.h. werden Deformationsfunktoren im Sinne Schlessingers

$$\widehat{\mathcal{F}}_{(Y, G, (y_i, G_i)_{i=0}^r)} \xrightarrow{\widehat{\Psi}} \prod_{i=0}^r \widehat{\mathcal{F}}_{G_i}$$

in der Kategorie \mathcal{C}_k der lokalen Artinschen k -Algebren mit Restklassenkörper k . Dieser Morphismus wurde in [2] und [4] betrachtet.

Genauer gesagt haben wir folgendes (wobei wir für Definitionen auf den ersten Abschnitt von [4] verweisen): Sei $\rho' : G \rightarrow \text{Aut}_F(X')$ der Homomorphismus, der die Operation von G auf X' beschreibt. Sei $D_{X', \rho'}$ der Funktor aus [4], 1.1, der alle äquivarianten Deformationen von (X', ρ') zu \mathcal{C}_k beschreibt. Dann ist der formale Funktor $\widehat{\mathcal{F}}_{(Y, G, (y_i, G_i)_{i=0}^r)}$ ein Teilfunktor von $D_{X', \rho'}$, weswegen der Tangentialraum von $\widehat{\mathcal{F}}_{(Y, G, (y_i, G_i)_{i=0}^r)}$ ein Unterraum von $D_{X', \rho'}(F[\varepsilon])$ ist. Es seien D_{ρ_i} die lokalen Funktoren aus [4], 1.11, die die Deformationen zu \mathcal{C}_k der Operation der Verzweigungsgruppen auf den komplettierten lokalen Ringen $\widehat{\mathcal{O}}_{X', x}$ beschreiben. Wie in [4], 1.6–1.9, wird der Zusammenhang zwischen Deformationen von Y_F , lokalen Deformationen der Verzweigungspunkte und Deformationen von (X', ρ') beschrieben durch eine exakte Sequenz von Tangentialräumen

$$0 \rightarrow H^1(Y_F, \mathcal{T}_Y(-\Delta)) \rightarrow D_{X', \rho'}(F[\varepsilon]) \rightarrow \bigoplus_{i=0}^r D_{\rho'_i}(F[\varepsilon]) \rightarrow 0,$$

wobei $F[\varepsilon] = F[E]/(E^2)$ der Ring der dualen Zahlen ist, Δ der Divisor

$$\Delta = \sum_{y \in T} y + \sum_{y \in W} 2y$$

und $T \cup W$ die Menge der Punkte, über denen π' verzweigt, und $y \in T$, genau dann, wenn $t_y = 0$ oder $[p = 2$ und $t_y = 1]$. Für jede Deformation $(\tilde{X}', \tilde{\rho}')$ von (X', ρ') liefert $\tilde{X}'/\tilde{\rho}'(G)$ eine Deformation von Y_F , weswegen es einen Retrakt

$$\lambda : D_{X', \rho'}(F[\varepsilon]) \rightarrow H^1(Y_F, \mathcal{T}_Y(-\Delta)),$$

gibt, der obige Sequenz splittet. Da $\widehat{\mathcal{F}}_{(Y, G, (y_i, G_i)_{i=0}^r)}$ infinitesimale äquivariante Deformationen klassifiziert, die auf Y die *triviale* Deformation induzieren, ist sein Tangentialraum genau $\ker(\lambda)$. Deswegen ist dieser Tangentialraum isomorph zu $\bigoplus_{i=0}^r D_{\rho'_i}(F[\varepsilon])$, und aus einer Argumentation wie in [2], Th. 3.3.4 schliesst man, dass $\widehat{\Psi}$ formal *étale* ist.

Da obige Funktoren offenbar lokal endlich dargestellt sind, ist auch Ψ als Morphismus von Funktoren *étale*, d.h. die Deformationen, die

$$\mathcal{F}_{(Y, G, (y_i, G_i)_{i=0}^r)}$$

klassifizieren, sind lokal-étale, vollständig bestimmt durch Deformation der Verzweigung in den Verzweigungspunkten.

Die $\widehat{\mathcal{F}}_{G_i}$ können effektiv pro-dargestellt werden (dies folgt aus [4], Abschnitt 4, insbesondere 4.2.6 und 4.4). Dasselbe gilt für $\widehat{\mathcal{F}}_{(Y, G, (y_i, G_i)_{i=0}^r)}$, da einer der folgenden Fälle vorliegt, wie leicht aus der Riemann-Hurwitz-Zeuthenschen Formel für schwach verzweigte Erweiterungen folgt: (i) $g \geq 2$; (ii) $g \geq 1$ und mindestens ein Punkt ist verzweigt; (iii) $g = 0$ und mindestens drei Punkte auf X sind verzweigt; oder schliesslich (iv) $g = 0$ und genau ein Punkt ist wild verzweigt mit Gruppe vom Typ $(1, d)$.

In den ersten drei Fällen ist $\Omega_X(D)$ (wobei D der reduzierte Verzweigungsdivisor ist) ampel und man kann den Grothendieckschen Existenzsatz anwenden ([EGA], III). Im Falle (iv) gilt dieses nicht, aber dann ist $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$ ampel.

4.4. Eine Deformation. Der Einfachheit halber werden wir als Notation für „der Funktor dargestellt durch ein Schema S “ die Notation „ S “ benutzen. Wir betrachten jetzt den lokalen Funktor $\mathcal{F}_\infty = \mathcal{F}_{G_0}$. Im Abschnitt 3 haben wir einen Morphismus $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{F}_\infty$ konstruiert. Er ist definiert durch die Familie $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{S}$ aus 3.7, weswegen sich durch Komposition ein Morphismus $\text{Spec } \mathfrak{R}_d \rightarrow \mathcal{F}_\infty$ ergibt.

Nehmen wir an, das Element

$$(\pi : X \rightarrow Y) \in \widehat{\mathcal{F}}_{(Y, G, (y_i, G_i)_{i=0}^r)}(k)$$

(wobei G_i die Verzweigungsgruppen von π sind) hat als lokales Bild

$$\Psi(\pi : X \rightarrow Y) = (\phi_0, \dots, \phi_r) \in \prod_{i=0}^r \widehat{\mathcal{F}}_{G_i}(k).$$

Wir haben eine Abbildung

$$\text{Spec } \widetilde{\mathfrak{R}}_d(k) = \widetilde{\mathbf{L}}_d(k) \rightarrow \mathcal{F}_\infty(k),$$

die surjektiv ist wegen 3.2; sei $\tilde{\phi}_0$ ein Urbild von ϕ_0 .

Man wähle wie folgt eine Kurve

$$\ell \hookrightarrow \text{Spec } \widetilde{\mathfrak{R}}_d,$$

die durch $\tilde{\phi}_0$ geht (sei $\infty' \in \ell$ der zugehörige Punkt). Man nehme $u_1 \in V = \theta_{\phi_0}(H) \subset k$ gehörend zu U_1 in $\widetilde{\mathfrak{R}}_d = k[U_1, \dots, U_d, W^{-1}]$ und zerlege das zugehörige \mathbb{F}_q -lineare Polynom nach Lemma 2.11 in

$$P^*(S_1, \dots, S_{d-1}) \circ P^*(S).$$

In dieser Zerlegung lässt man jetzt die Größen S_1, \dots, S_{d-1} konstant, während S variabel ist (man beachte nochmals, dass wir $d > 1$ voraussetzen). Es ergibt sich dadurch eine Kurve in $\text{Spec } \mathfrak{R}_{(1, d-1)}$ deren Urbild in $\text{Spec } \widetilde{\mathfrak{R}}_d$ wir mit ℓ bezeichnen. Man beachte, dass eine solche Kurve ℓ die „Grenze“ von $\text{Spec } \mathfrak{R}_d$ in einem allgemeinen Punkt in der Hyperebene $U_1 = 0$ berührt (wobei „allgemeiner Punkt“ bedeutet, dass der Punkt nicht zu einer weiteren Grenzkomponente gehört).

Man konstruiert dann einen Morphismus

$$\ell \rightarrow \prod_{i=0}^r \mathcal{F}_{G_i},$$

wobei die Einschränkung $\ell \rightarrow \mathcal{F}_{G_0}$ sich aus der oben konstruierten Kurve ergibt durch die Komposition

$$\ell \rightarrow \text{Spec } \tilde{\mathfrak{R}}_d \rightarrow \mathcal{F}_\infty = \mathcal{F}_{G_0},$$

und für $i > 0$ und $S \in \mathbf{Sch}_k$, die Abbildung $\text{Hom}(S, \ell) \rightarrow \mathcal{F}_{G_i}(S)$ gegeben wird durch die konstante Abbildung $[\phi_i \times_k S]$.

4.5. Globalisierung. Wir behaupten jetzt, dass es eine étale Umgebung $S' \rightarrow \ell$ von ∞' gibt, so dass

$$\begin{array}{ccc} S' & \longrightarrow & \mathcal{F}_{(Y, G, (y_i, G_i)_{i=0}^r)} \\ \downarrow & & \downarrow \Psi \\ \ell & \longrightarrow & \prod \mathcal{F}_{G_i} \end{array}$$

kommutiert. In der Tat, sei $\ell_{/\infty'}$ die formale Komplettierung (als Schema) in ∞' . Im formalen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & & \hat{\mathcal{F}}_{(Y, G, (y_i, G_i)_{i=0}^r)} \\ & & \downarrow \hat{\Psi} \\ \ell_{/\infty'} & \longrightarrow & \prod \hat{\mathcal{F}}_{G_i} \end{array}$$

ist $\hat{\Psi}$ formal étale (4.3).

Die Eigenschaften der obigen Funktoren aus 4.3 implizieren, dass man das Approximationsverfahren von M. Artin benutzen kann, um $\ell_{/\infty'}$ durch seine Henselisierung $\ell_{/\infty'}^h$ zu ersetzen, und es ergibt sich daher das gewünschte S' und

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}' & \xrightarrow{\Pi} & \mathcal{Y}' = S' \times Y \\ & \searrow & \swarrow \\ & & S'. \end{array}$$

4.6. Eine Entartung. Das Bild von $S \rightarrow \ell$ ist Zariski-dicht und offen. Wir können also S' um einen Punkt zu $S = S' \cup \{0\}$ erweitern, derart dass 0 mit $u_1 = 0$ korrespondiert (insbesondere wegen der Wahl von ℓ). Nachdem, was wir vorher bewiesen haben über $S' = S - \{0\}$, gelten die Eigenschaften (i) und (ii) des Satzes. Wir bilden ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}' & \longrightarrow & \mathcal{X}'' \\ G \downarrow & & \downarrow \Phi \\ S' \times Y & \longrightarrow & S \times Y \end{array}$$

wobei \mathcal{X}'' definiert ist als die Normalisierung von \mathcal{X}' . Da $\mathcal{X}' \rightarrow S' \times Y$ G -Galoissch ist, gilt das gleiche für Φ . Es ist jetzt aber \mathcal{X}'' nicht regulär. In der Tat ist die einzige singuläre Faser $\mathcal{X}''_{(0,y_0)}$. Wähle $x_0 \in \mathcal{X}''_{(0,y_0)}$, dann gibt es wegen 3.10 eine birationale Abbildung

$$\text{Spec } \mathcal{O} \dashrightarrow \mathcal{X}''_{/x_0},$$

wobei

$$\mathcal{O} := k[[x, y, t]] / (P^*(s_1, \dots, s_{d-1})(t^{q-1}x^{-q} - x^{-1})^n - y^{-1}) \cap k[[x, y, t]],$$

und t eine Uniformisierende ist in 0 auf S . Wir behaupten jetzt, dass diese birationale Abbildung ein Isomorphismus ist. Da sie birational ist, reicht dazu folgendes Lemma aus:

4.7. Lemma. *\mathcal{O} ist ganzabgeschlossen.*

Beweis. $\mathcal{O}[t^{\pm 1}]$ ist eine $G_{n,d}$ -Galoissche Erweiterung von $k[[y, t^{\pm 1}]]$, und deswegen ganzabgeschlossen. Es sei F ganz über \mathcal{O} im Quotientenkörper von \mathcal{O} , dann ist also $F = F_0/t^e$ mit $F_0 \in \mathcal{O}$. Da F eine normierte Gleichung $F^N + a_{N-1}F^{N-1} + \dots + a_0 = 0$ erfüllt mit $a_i \in \mathcal{O}$, ist $F_0^N \in t\mathcal{O}$. Nun ist $t\mathcal{O}$ ein Primideal, weil

$$\mathcal{O}/t\mathcal{O} = k[[x, y]] / (P^*(s_1, \dots, s_{d-1})(x^{-1})^n - y^{-1}) \cap k[[x, y]]$$

ein diskreter Bewertungsring ist ([20], I, Prop. 17). Es muss also $F_1 \in \mathcal{O}$ existieren mit $F_0 = tF_1$, und man findet $F = F_1/t^{e-1}$ und induktiv $F \in \mathcal{O}$. \square

Die Entartung wird also vollständig durch Proposition 3.10 beschrieben, wobei wir anmerken, dass in der dortigen Beschreibung die entartete Faser in der Tat durch Aufblasen $x \rightsquigarrow t \frac{Z}{W}$ erhalten wird.

Durch Aufblasen von $S \times Y$ in $(0, y)$ ergibt sich \mathcal{Y} , und durch gleichzeitiges Aufblasen von \mathcal{X}'' in allen Punkten über $(0, y)$ ergibt sich \mathcal{X} .

Wir zeigen jetzt, dass die horizontalen Komponenten glatt sind. Die Punkte in $\Pi^{-1}(0, y)$ sind glatt wegen 3.10. Man nehme an, ξ sei singulär $\notin \Pi^{-1}(0, y)$. Es wird durch Π auf ein Element von $\{0\} \times Y$ abgebildet, aber da Π generisch unverzweigt ist, müsste ξ dann ein Verzweigungspunkt sein. Weil alle derartigen Verzweigungspunkte durch konstante Deformation der Verzweigungspunkte über B kommen, sind sie insbesondere glatt.

Die Eigenschaften (iii) und (iv) folgen jetzt sofort.

Für (v) bemerken wir, dass wenn man $\mathcal{X}_{S-\{0\}}$ als gepunktete Kurve betrachtet durch Auszeichnen der Verzweigungspunkte, $\mathcal{X}_{S-\{0\}}$ eine stabile Kurve ist, außer wenn der Ausnahmefall wie in (v) vorliegt. Wenn man obige Konstruktion von \mathcal{X}_0 durch Aufblasen betrachtet, sieht man, dass die gepunktete Struktur sich auf \mathcal{X}_0 überträgt. Dabei haben die vertikalen rationalen Kurven mindestens drei markierte Punkte, nämlich die q Schnittpunkte mit den horizontalen Kurven und zusätzlich die Punkte, die von der ganzen Zerlegungsgruppe festgehalten werden ($\{W/Z = \infty\}$ aus 3.10). Die horizontalen Kurven bleiben natürlich stabil gepunktet durch die Verzweigungspunkte (außer im erwähnten

Ausnahmefall). Dies ist nur dann nicht ganz offensichtlich, falls eine horizontale Kurve rational ist. In diesem Fall begründet man die Stabilität aber folgendermaßen: da nach 3.10 die Gruppe G die horizontalen Kurven transitiv vertauscht, sind also alle Kurven rational. Da \mathcal{X}_0 zusammenhängend ist (als flacher Limes von zusammenhängenden Kurven), muss eine (ergo alle) solche horizontale(n) Kurve(n) mindestens zwei der vertikalen rationalen Kurven schneiden. Die vertikalen Kurven schneiden sich durch die Konstruktion via Aufblasungen natürlich nicht. Deswegen liegen auf jeder der horizontalen Kurven mindestens zwei ausgezeichnete Punkte über y und zusätzlich mindestens ein weiterer ausgezeichneter Punkt, nämlich über einem verzweigten Punkt aus $Y - \{y\}$. Deswegen sind auch die horizontalen rationalen Kurven stabil, da mindestens dreifach gepunktet. \square

4.8. Bemerkungen. (i) Im Allgemeinen entartet jede nicht-isotriviale Familie Galoisscher Überlagerungen, die verzweigt über einer *festen* Menge von Punkten ist: siehe Pries [17], 3.3.2. Dieses Resultat wurde hier jedoch im Beweis nicht benutzt.

(ii) In [4], Abschnitt 4, wurde bewiesen, dass der infinitesimale Deformationsfunktork einer schwach verzweigten Gruppenoperation vom Typ (n, d) auf $k[[x]]$ pro-dargestellt wird durch ein formales Schema vom Typ

$$k[[x_0, \dots, x_{d-1}]]/\langle x_0^{\frac{p-1}{2}} \rangle.$$

Hierbei sind die $d - 1$ freien Deformationsparameter x_1, \dots, x_{d-1} genau gegeben durch Deformation der Vektorraumeinbettung $H \hookrightarrow k$. Wenn also bei einer globalen Deformation einer schwach verzweigten Galoisüberlagerung die Verzweigungspunkte fest bleiben, und die Operation der Verzweigungsgruppe sich nur in einem Punkt ändert, so muss sie durch eine solche Deformation von $H \hookrightarrow k$ entstehen. Wir haben in Satz A den Fall, wo ein Unterraum der Dimension eins verschwindet, untersucht. Hieraus leitet man den allgemeinen Fall induktiv ab.

5. Automorphismen schwach verzweigter Kurven

5.1. Automorphismen. Wir betrachten jetzt eine Kurve X des Geschlechts $g \geq 2$ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik $p > 0$. Dann ist $\text{Aut}(X)$ endlich (F. K. Schmidt), und wir nehmen an, in der Quotientenabbildung

$$\pi_X : X \rightarrow Y := \text{Aut}(X) \backslash X$$

sei alle Verzweigung schwach (wir nennen dann X schwach verzweigt). S. Nakajima ([15]) hat gezeigt, dass in diesem Falle die Stichtenothsche obere Schranke

$$|\text{Aut}(X)| \leq 16g^4 + 56g^3 + 32g^2 + 4g + 4\sqrt{1 + 8g}(4g^3 + 4g^2 + g)$$

für die Anzahl der Automorphismen einer beliebigen Kurve X (siehe [22]) sich verbessert zu

$$|\text{Aut}(X)| \leq 84g(g - 1).$$

Dies wird dort nur für ordinäre Kurven angegeben, aber man überzeugt sich leicht davon, dass der Beweis nur die Tatsache, dass $G_{x,2} = 0$ für alle $x \in X$ benutzt.

5.2. Reduktion. Beide Schranken ergeben sich durch geschickte Minimierung in der Riemann-Hurwitz-Zeuthenschen Formel, wo im Falle wilder Verzweigung auch die höheren Verzweigungsgruppen eine Rolle spielen. Im Laufe der Abschätzungen bemerkt man, dass sogar die klassische Hurwitzsche lineare Schranke $|\text{Aut}(X)| \leq 84(g-1)$ gilt, außer wenn $Y \cong \mathbb{P}^1$, es mindestens einen wildverzweigten Punkt gibt, und die Verzweigung entweder über zwei Punkten liegt, oder $p \neq 2$ und die Verzweigung über drei Punkten mit Indizes $(2, 2, \cdot)$ liegt ([15], p. 600). Man kann zusätzlich annehmen, dass in wildverzweigten Punkten x die Ungleichung $n_x \neq 1$ gilt, da sonst erneut eine lineare Schranke in g bewiesen werden kann ([15], pp. 601–602).

Inwiefern ist das Nakajimasche Ergebnis scharf? Wie bereits in der Einführung bemerkt, ist keine ordinäre Familie $\{X_i\}$, deren Geschlechter g_i strikt steigend sind, bekannt, für die $|\text{Aut}(X_i)| > \tilde{f}(g_i)$, wobei

$$\tilde{f}(g) = \max\{84(g-1), 2\sqrt{g}(\sqrt{g}+1)^2\}.$$

Wir benötigen bald das folgende, in diesem Zusammenhang positive Resultat:

5.3. Satz ([3]). *Sei K ein kompletter nicht-archimedisch bewerteter Körper der Charakteristik $p > 0$, und sei X eine Mumfordkurve vom Geschlecht $g \geq 2$ über K , d.h. die stabile Reduktion von X ist eine Vereinigung von rationalen Kurven, die sich in über dem Restklassenkörper rationalen Punkten schneiden. Dann gilt $|\text{Aut}(X)| \leq \tilde{f}(g)$, und diese obere Schranke ist scharf.*

Man beachte, dass Mumfordkurven schwach verzweigt sind im obigen Sinne (siehe [3], 1.2).

5.4. Definition. Wir nennen X *immobil*, falls

(i) X schwach verzweigt ist,

(ii) $Y = X/\text{Aut}(X) \cong \mathbb{P}^1$,

(iii) die Verzweigung entweder über zwei Punkten liegt, oder $p \neq 2$ und die Verzweigung über drei Punkten mit Indizes $(2, 2, \cdot)$ liegt,

(iv) es mindestens einen wildverzweigten Punkt x gibt mit $n_x \neq 1$,

(v) $s_x = t_x$ in jedem Verzweigungspunkt.

5.5. Beweis von Satz B. Wenn X immobil ist, gilt die obere Schranke wegen der Annahme. Falls eine der ersten vier Annahmen in der Definition 5.4 nicht erfüllt ist, gilt sogar eine obere Schranke linear im Geschlecht g , nach 5.2. Wir können also annehmen, dass es ein wildverzweigtes x mit $s_x \neq t_x$ gibt. Wir betrachten eine Familie wie im Satz A. Seien $\{X_i\}_{i=1}^r$ die schwach verzweigten Kurven in $\mathcal{X}_0 - \Pi^{-1}(E)$. Aus der lokalen Beschreibung 3.10 folgt, dass $\text{Aut}(X)$ die Menge der horizontalen Kurven $\{X_i\}$ transitiv vertauscht, weswegen sie alle das gleiche Geschlecht haben, das wir mit \tilde{g} bezeichnen. Sei δ_i die Anzahl der Knoten von \mathcal{X}_0 auf X_i . Wir unterscheiden drei Fälle:

(I) Wenn $\tilde{g} = 0$, so versehen wir den Funktionenkörper der Basis S mit der Bewertung, die zum Punkt 0 gehört, und nehmen die Komplettierung. Dann liegt in einer formalen Umgebung von \mathcal{X}_0 in der äquivarianten Familie \mathcal{X} eine glatte Mumfordkurve (mit vollständig zerfallender stabiler Reduktion \mathcal{X}_0), und die obere Schranke mit $\tilde{f}(g) \cdot (g - 1)$ ist erfüllt nach 5.3. Da wir annehmen, dass $\tilde{f} \leq f$, folgt das Ergebnis.

(II) Sei $\tilde{g} = 1$. Aus der Theorie der Gruppenoperationen ergibt sich die Formel

$$|\mathrm{Aut}(X)| = |\mathrm{Aut}(X) \cdot X_1| \cdot |\mathrm{Stab}_{\mathrm{Aut}(X)} X_1|;$$

hier besteht die Bahn $\mathrm{Aut}(X) \cdot X_1$ genau aus den horizontalen Kurven, und da X_1 triviale Trägheitsgruppe hat, ist

$$\mathrm{Stab}_{\mathrm{Aut}(X)} X_1 \cong \mathrm{Aut}((X_1, \{P_1, \dots, P_{\delta_1}\})).$$

Letztere Gruppe wird erneut betrachtet im Sinne der algebraischen Automorphismengruppe von X_1 , die aber zusätzlich die ausgezeichneten Knoten P_i vertauscht. Es ist $\mathrm{Aut}(X_i)$ eine Erweiterung

$$1 \rightarrow T \rightarrow \mathrm{Aut}(X_i) \rightarrow \mathrm{Aut}_0(X_i) \rightarrow 1.$$

Hier ist $\mathrm{Aut}_0(X_i)$ Automorphismengruppe einer elliptischen Kurve (Kurve vom Geschlecht eins mit markiertem Punkt 0), also gilt $|\mathrm{Aut}_0(X_i)| \leq 24$ ([21], III.10.1). Desweiteren ist $T = X_1(k)$ eine (Abelsche) Gruppe von Translationen auf der elliptischen Kurve $(X_i, 0)$. In unserem Falle soll

$$T \cap \mathrm{Aut}((X_1, \{P_1, \dots, P_{\delta_1}\}))$$

sogar die δ_1 ausgezeichneten Punkte vertauschen, weswegen

$$|T \cap \mathrm{Aut}((X_1, \{P_1, \dots, P_{\delta_1}\}))| \leq \delta_1.$$

Wir finden also

$$|\mathrm{Aut}(X)| \leq 24\delta_1 r.$$

Sei δ die totale Anzahl der Knoten auf \mathcal{X}_0 . Die einzigen Knoten auf den X_i sind die Schnittpunkte mit den vertikalen Kurven, also ist $\delta = r\delta_1$. Letzten Endes ist

$$|\mathrm{Aut}(X)| \leq 24\delta.$$

Da \mathcal{X}_0 gepunktet stabil ist, impliziert die stabile Geschlechterformel, dass $\delta \leq 3g - 3$ ([10], p. 50), woraus sich dann die lineare obere Schranke $72(g - 1)$ ergibt.

(III) Wenn schließlich $\tilde{g} \geq 2$, können wir induktiv annehmen, dass

$$|\mathrm{Aut}(X_1)| \leq f(\tilde{g}).$$

Erneut hat X_1 triviale Trägheitsgruppe, und also ist

$$|\text{Aut}(X)| = |\text{Aut}(X) \cdot X_1| \cdot |\text{Stab}_{\text{Aut}(X)} X_1|$$

mit $\text{Stab}_{\text{Aut}(X)} X_1 \subseteq \text{Aut}(X_1)$. Sei n_i die Anzahl der Kurven in \mathcal{X}_0 des Geschlechtes i . Die nodale Geschlechterformel ([10], 3.1) impliziert

$$g - 1 = n_{\tilde{g}}(\tilde{g} - 1) - n_0 + \delta,$$

wobei δ die Anzahl der Knoten in \mathcal{X}_0 ist. Offensichtlich ist $-n_0 + \delta \geq 0$, da jede Kurve mindestens einen Knoten enthält. Deswegen ist $g - 1 \geq n_{\tilde{g}}(\tilde{g} - 1)$. Da die Bahn von X_1 unter $\text{Aut}(X)$ aus höchstens $n_{\tilde{g}}$ Kurven besteht, ist $|\text{Aut}(X) \cdot X_1| \leq \frac{g-1}{\tilde{g}-1}$ und also

$$|\text{Aut}(X)| \leq \frac{g-1}{\tilde{g}-1} \cdot f(\tilde{g}).$$

Da wir annehmen, dass $f(g)/(g-1)$ steigend ist und $g \geq \tilde{g}$, folgt daraus schließlich $|\text{Aut}(X)| \leq f(g)$. \square

5.6. Bemerkung. Im Falle (III) wird $|\text{Aut}(X)| = f(g)$ nur dann erreicht, wenn $n_0 = \delta$. Aber wenn $\tilde{g} > 0$, ist $n_0 = \#\Pi^{-1}(E)$ und $\delta \geq n_0 \cdot p$, ein Widerspruch. Es muss also $\tilde{g} = 0$ gelten, und damit ist X eine Mumfordkurve.

A. Kanonische Form schwach verzweigter Erweiterungen über Henselschen Ringen

Wir zeigen jetzt, dass Proposition 1.18 auch wahr ist, wenn man statt „ A ist komplett“ nur „ A ist Henselsch“ voraussetzt. Wir können nach 1.18 in den Komplettierungen $\hat{B} = k[[\hat{x}]]/\hat{A} = k[[\hat{y}]]$ eine kanonische Form voraussetzen:

$$\gamma(\hat{x}) = \zeta\hat{x}, \quad \sigma(\hat{x}) = \frac{\hat{x}}{1 - \theta(\sigma)\hat{x}},$$

wobei nach 3.1

$$P^*(\hat{x}^{-1})^n = \hat{y}^{-1}$$

mit $P^* = P^*(a_0, \dots, a_d)$ für $a_i \in k$. Sei $k[[\hat{x}]]^H = k[[\hat{z}]]$ mit $P^*(\hat{x}^{-1}) = \hat{z}^{-1}$, $\hat{z}^n = y$ und sei die Operation von T gegeben durch $\gamma(\hat{z}) = \zeta\hat{z}$.

Man wähle $y \in A$ mit $y = \hat{y}\alpha$ in \hat{A} und $\alpha \in 1 + \mathfrak{m}_A^2$ (möglich weil $A \hookrightarrow \hat{A}$ dicht ist). Man löse mit Hilfe des Henselschen Lemmas $((n; p) = 1)$ die Gleichung $\beta^n = \alpha$ mit β eindeutig bestimmt durch $\beta \in 1 + \mathfrak{m}_A^2$. Sei $z = \hat{z}\beta$, dann ist $z^n = y$ und $\gamma(z) = \zeta z$, weil $\beta \in \hat{A} = \hat{B}^G$. Man definiert dann $v \in \mathfrak{m}_{k[[z]]}$ durch

$$z = \frac{\hat{z}}{1 - \hat{z}v}$$

und löst die Gleichung $P^*(u) = v$ mit Hilfe des Henselschen Lemmas ($a_d \neq 0$) eindeutig nach u in $\mathfrak{m}_{k[[z]]}$. Wenn man

$$x = \frac{\hat{x}}{1 - \hat{x}u}$$

definiert, dann ist $x^{-1} = \hat{x}^{-1} - u$, und also

$$P^*(x^{-1}) = P^*(\hat{x}^{-1} - u) = P^*(\hat{x}^{-1}) - P^*(u) = \hat{z}^{-1} - v = z^{-1},$$

weswegen auch $P^*(x^{-1})^n = y^{-1}$.

Wir berechnen jetzt $\gamma(x)$. Weil

$$\gamma(z) = \zeta z = \zeta \frac{\hat{z}}{1 - \hat{z}v}$$

gleich

$$\frac{\gamma(\hat{z})}{1 - \gamma(\hat{z})\gamma(v)} = \frac{\zeta \hat{z}}{1 - \zeta \hat{z}\gamma(v)}$$

ist, findet man $\gamma(v) = \zeta^{-1}v$. Weil $\gamma(P^*(u)) = \gamma(v) = \zeta^{-1}v$ gleich $P^*(\gamma u)$ ist, muss

$$P^*(u) = P^*(\zeta\gamma(u))$$

gelten, und weil u eindeutig ist in $\mathfrak{m}_{k[[z]]}$ und $\zeta\gamma(u) \in \mathfrak{m}_{k[[z]]}$ (weil G als lokaler Morphismus auf B operiert und $\zeta \in \mathbb{F}_q^\times$), muss dann $\gamma(u) = \zeta^{-1}u$ sein. Daraus ergibt sich, dass

$$\gamma(x) = \frac{\gamma(\hat{x})}{1 - \gamma(\hat{x})\gamma(u)} = \frac{\zeta \hat{x}}{1 - \zeta \hat{x} \zeta^{-1} u} = \frac{\zeta \hat{x}}{1 - \hat{x}u} = \zeta x.$$

Was $\sigma(x)$ angeht, so haben wir

$$\sigma(x) = \frac{\sigma(\hat{x})}{1 - \sigma(\hat{x})\sigma(u)}$$

mit $u \in k[[z]] = \hat{B}^H$, also $\sigma(u) = u$. Mit Hilfe der obigen expliziten Formeln berechnet man sofort, dass

$$\sigma(x) = \frac{x}{1 - \theta(\sigma)x}.$$

Wir haben $y \in A$ gewählt, und $x \in \hat{B}$ erfüllt $P^*(x^{-1})^n = y^{-1}$. Weil A Henselsch ist (und deswegen auch B), kann man $x' \in B$ finden mit $P^*(x'^{-1})^n = y^{-1}$ und $x \equiv x' \pmod{\mathfrak{m}_B^N}$, und da die Gleichung nur endlich viele Lösungen hat, findet man für $N \rightarrow \infty$, dass $x \in B$. \square

Man überzeugt sich jetzt leicht davon, dass auch 1.20, 3.1 und 3.2 wahr sind, falls man nur „ A Henselsch“ voraussetzt.

B. Konfigurierende Funktoren

In [17], 2.2.1 hat Pries einen Begriff „Konfigurationsraum“ eingeführt, den wir jetzt leicht erweitern.

B.1. Definition. Es seien \mathcal{F} und \mathcal{G} zwei kontravariante Funktoren

$$\mathbf{Sch}_k \rightarrow \mathbf{Mengen}.$$

Wir sagen, dass der Funktor \mathcal{G} den Funktor \mathcal{F} *konfiguriert*, falls es einen Morphismus

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\Psi} \mathcal{G}$$

zwischen Funktoren gibt, wobei gilt:

(i) Für jeden algebraisch abgeschlossenen Körper F/k ist $\Psi(F)$ bijektiv.

(ii) Für jedes Schema $S \in \mathbf{Sch}_k$ und jedes $\phi \in \mathcal{F}(S)$ gibt es $S' \in \mathbf{Sch}_k$, eine endliche radiziale Abbildung $i: S' \rightarrow S$ und ein eindeutig bestimmtes $\phi' \in \mathcal{G}(S')$ mit $\Psi(\phi') = i^*(\phi)$.

B.2. Bemerkung. Falls der Funktor \mathcal{G} den Funktor \mathcal{F} konfiguriert und \mathcal{G} fein dargestellt wird durch ein Schema T , dann ist T ein Konfigurationsraum für \mathcal{F} im Sinne von [17], 2.2.1.

B.3. Proposition. Sei A ein Henselscher diskreter Bewertungsring über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k mit Restklassenkörper k , sei $G = G_{n,d}$, und sei $\mathcal{F}_{A,G}$ der kontravariante Funktor $\mathbf{Sch}_k \rightarrow \mathbf{Mengen}$ definiert durch

$$S \mapsto \mathcal{F}_{A,G}(S) = \left\{ \begin{array}{l} G\text{-Überlagerungen } \mathcal{X} \rightarrow \mathrm{Spec} A \times_k S, \text{ die} \\ \text{in jedem geometrischen Punkt schwach} \\ \text{verzweigt sind} \end{array} \right\} / \cong,$$

wobei *geometrischer Punkt separabler Abschluss eines Punktes* bedeutet. Dann konfiguriert $\mathcal{L}_d/\mathbb{G}_{m,k}$ den Funktor $\mathcal{F}_{A,G}$.

Beweis. Wir konstruieren zuerst einen Morphismus $\mathcal{L}_d/\mathbb{G}_{m,k} \xrightarrow{\Psi} \mathcal{F}_{A,G}$. Dazu bemerken wir, dass im affinen Fall $\tilde{\mathcal{L}}_d/\mathbb{G}_{m,k} \cong \tilde{\mathcal{S}}$ die universelle Familie $\tilde{\mathcal{X}}$ mit G -Operation trägt (3.6, 3.7). Man bekommt also offensichtlich einen Morphismus

$$\tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{F}_{A,G}|_{\mathbf{Aff}_k^o},$$

wobei \mathbf{Aff}_k^o die Kategorie der affinen Schemata über k ist, der für die triviale Operation von \mathbb{G} auf der rechten Seite \mathbb{G} -äquivariant ist. Deswegen ergibt sich durch Garbifizierung ein Morphismus

$$\mathcal{L}_d/\mathbb{G}_{m,k} = \mathbb{G} \backslash \tilde{\mathcal{L}}_d/\mathbb{G}_{m,k} \rightarrow \mathcal{F}_{A,G}.$$

Eigenschaft (i) ist klar wegen 3.2. Für Eigenschaft (ii) wählen wir $S \in \mathbf{Sch}_k$ und setzen $S' := S_{\text{red}}$ (das reduzierte Schema von S). Offenbar ist $S' \rightarrow S$ endlich radizial, und wir zeigen jetzt, dass es einen Isomorphismus

$$(\mathcal{L}_d/\mathbb{G}_{m,k})(S') \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{A,G}(S')$$

gibt. Wir können dabei annehmen, dass S' reduziert ist und sogar affin: $S' = \text{Spec } R$.

Die Abbildung ist surjektiv: Sei

$$\phi = (\mathcal{X} \xrightarrow{G} \text{Spec } A \times_k \text{Spec } R) \in \mathcal{F}_{A,G}(S').$$

Durch Komplettierung bekommen wir

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathcal{X}} & \xrightarrow{G} & \text{Spec } R[[y]] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{X} & \xrightarrow{G} & \text{Spec } A \times_k \text{Spec } R \end{array}$$

mit $\hat{A} = k[[y]]$. Wir schreiben \bar{s} für den separablen Abschluss eines Punktes $s \in S'$ und erweitern die obige Gruppenoperation durch Basiswechsel via $\text{Spec } \hat{\mathcal{O}}_{S',\bar{s}} \rightarrow \text{Spec } R$ zu

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathcal{X}} \times_{\text{Spec } R} \text{Spec } \hat{\mathcal{O}}_{S',\bar{s}} & \xrightarrow{G} & \text{Spec } \hat{\mathcal{O}}_{S',\bar{s}}[[y]] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \hat{\mathcal{X}} & \xrightarrow{G} & \text{Spec } R[[y]]. \end{array}$$

Wir haben jetzt einen Isomorphismus

$$\hat{\mathcal{X}} \times_{\text{Spec } R} \text{Spec } \hat{\mathcal{O}}_{S',\bar{s}} \xrightarrow{\sim} \text{Spec } \hat{\mathcal{O}}_{S',\bar{s}}[[x]].$$

Dies folgt aus [4], Abschnitt 4, wo der verselle formelle infinitesimale Deformationsring berechnet wurde, und man Effektivität hat wie im Beweis des Hauptsatzes A (4.4). Mit Hilfe der Artinschen Approximation können wir S durch eine étale Umgebung ersetzen. Danach sind wir in der Situation

$$\hat{\mathcal{X}} = \text{Spec } R[[x]] \xrightarrow{G} \text{Spec } R[[y]].$$

Ein Element $\sigma \in H \cong G$ operiert auf $R[[x]]$ durch

$$\sigma(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots,$$

und wir haben $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$ modulo aller Primideale \mathfrak{p} von R . Da R aber reduziert ist, ist $\bigcap \mathfrak{p} = \{0\}$, weswegen $a_0 = 0$, $a_1 = 1$. Wir können also $\sigma(x) = x + \theta(\sigma)x^2 + \dots$ schreiben, und $\theta : H \rightarrow R$ bildet H auf einen \mathbb{F}_q -Vektorraum in R ab. Durch direkte Berechnung stellt sich heraus, dass θ additiv ist, und wenn wir die Operation $\tau(x) = \zeta x + \dots$ eines Torusteils berücksichtigen, finden wir leicht, dass $\zeta^{-1}\theta(H) = \theta(H)$. Desweiteren ist $\theta(H)$ nicht-

entartet, da θ für jede Spezialisierung injektiv ist. Also bekommen wir ein Element $\theta(H)$ in $\tilde{\mathcal{L}}_d$, das auf ϕ abgebildet wird.

Die Abbildung ist auch injektiv: Wenn V und V' in R die gleiche Überlagerung über $\text{Spec } R \times \text{Spec } A$ liefern, sind die ω -Invarianten gleich in jedem geometrischen Punkt \bar{s} von S' (1.20 gilt für Henselsche Ringe), weswegen V und V' sich höchstens um ein Skalar in R^\times unterscheiden. \square

In 3.6 wurde gezeigt, dass das Schema $\tilde{\mathcal{S}}$ den Funktor $\tilde{\mathcal{L}}_d/\mathbb{G}_{m,k}$ grob darstellt. Wir haben gerade gesehen, dass dieser Funktor $\mathcal{F}_{A,G}$ konfiguriert. Man kann also $\tilde{\mathcal{S}}$ als eine Art von „grobem Konfigurationsraum“ für $\mathcal{F}_{A,G}$ betrachten.

Literatur

- [1] *M. Artin*, Algebraic approximation of structures over complete local rings, Inst. Hautes Ét. Sci. Publ. Math. **36** (1969), 23–58.
- [2] *J. Bertin* und *A. Mézard*, Déformations formelles des revêtements sauvagement ramifiés de courbes algébriques, Invent. Math. **141** (2000), 195–238.
- [3] *G. Cornelissen*, *F. Kato* und *A. Kontogeorgis*, Discontinuous groups in positive characteristic and automorphisms of Mumford curves, Math. Ann. **320**, nr. 1 (2001), 55–85.
- [4] *G. Cornelissen* und *F. Kato*, Equivariant deformation of Mumford curves and of ordinary curves in positive characteristic, Duke Math. J. **116**, No. 3 (2003), 431–470.
- [5] *G. Cornelissen* und *A. Mézard*, Relèvements des revêtements de courbes faiblement ramifiés, math.AG/0412189 (2004).
- [6] *L. E. Dickson*, A fundamental system of invariants of the general modular linear group with a solution of the form problem, Trans. Amer. Math. Soc. **12** (1911), no. 1, 75–98.
- [7] *D. Goss*, Basic structures of function field arithmetic, Ergebn. Math. Grenzgeb. (3) **35**, Springer-Verlag, Berlin 1996.
- [8] *A. Grothendieck*, Sur quelques points d’algèbre homologique, Tôhoku Math. J. **9** (1957), 119–221.
- [9] *R. M. Guralnick* und *M. E. Zieve*, Arbeit zu “Automorphismen von ordinären Kurven”, in Vorbereitung (Vortrag in Leiden am 18.08.2004; Briefe an die Autoren, 25.11.2003).
- [10] *J. Harris* und *I. Morrison*, Moduli of curves, Grad. Texts Math. **187**, Springer-Verlag, 1998.
- [11] *T. J. Hewett*, Modular invariant theory of parabolic subgroups of $\text{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ and the associated Steenrod modules, Duke Math. J. **82** (1996), no. 1, 91–102.
- [12] *N. Katz*, Local-to-global extensions of representations of fundamental groups, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **36** (1986), no. 4, 69–106.
- [13] *B. Köck*, Galois structure of Zariski cohomology for weakly ramified covers of curves, Amer. J. Math. **126** (2004), no. 5, 1085–1107.
- [14] *H. Matsumura*, Commutative ring theory, Cambridge Stud. Adv. Math. **8**, Cambridge University Press, Cambridge 1986.
- [15] *S. Nakajima*, p -ranks and automorphism groups of algebraic curves, Trans. Amer. Math. Soc. **303** (1987), 595–607.
- [16] *F. Oort*, Subvarieties of moduli spaces, Inv. Math. **24** (1974), 95–119.
- [17] *R. J. Pries*, Families of wildly ramified covers of curves, Amer. J. Math. **124** (2002), no. 4, 737–768.
- [18] *M. Saïdi*, Abhyankar’s conjecture II: The use of semi-stable curves, Courbes semi-stables et groupe fondamental en géométrie algébrique (Luminy 1998), Progr. Math. **187**, Birkhäuser, Basel (2000), 249–265.
- [19] *M. Schlessinger*, Functors of Artin rings, Trans. Amer. Math. Soc. **130** (1968), 208–222.
- [20] *J.-P. Serre*, Corps locaux, Actualités Sci. Indust. **1296**, Hermann, Paris 1962.
- [21] *J. Silverman*, The Arithmetic of Elliptic Curves, Grad. Texts Math. **106**, Springer-Verlag, 1986.
- [22] *H. Stichtenoth*, Über die Automorphismengruppe eines algebraischen Funktionenkörpers von Primzahl-characteristik, Teil I: Eine Abschätzung der Ordnung der Automorphismengruppe, Arch. Math. **24** (1973), 527–544.
- [23] *C. A. Wilkerson*, A primer on the Dickson invariants, Proceedings of the Northwestern Homotopy Theory Conference (Evanston, Ill., 1982), Contemp. Math. **19**, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1983), 421–434.

Akronyme

- [EGA] *J. Dieudonné, J. A. Grothendieck*, Éléments de géométrie algébrique, Inst. Hautes Ét. Sci. Publ. Math. **4**, **8**, **11**, **17**, **20**, **24**, **28**, **32** (1961–1967).
- [SGA1] Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1960–1961: Revêtements étales et groupe fondamental, dirigé par A. Grothendieck, augmenté de deux exposés de M. Raynaud, Lect. Notes Math. **224**, Springer-Verlag, Berlin-New York 1971.

Fachbereich Mathematik, Universität Utrecht, Postfach 80010, 3508 TA Utrecht, Niederlande
e-mail: cornelissen@math.uu.nl

Universität Kioto, Fakultät der Wissenschaften, Fachbereich Mathematik, Kioto 606-8502, Japan
e-mail: kato@math.kyoto-u.ac.jp

Eingegangen 11. März 2004, in revidierter Fassung 24. Januar 2005