

INLEIDING TOPOLOGIE(WISB243) TENTAMEN, 2 FEBRUARI 2024

NOTES:

- Herinnering: je mag vier A3-pagina's gebruiken (bijvoorbeeld twee vellen voor- en achterkant) die je van tevoren hebt voorbereid. Geen ander materiaal is toegestaan.
- Je oplossingen mogen in het Nederlands of Engels zijn (of een mix daarvan).
- Schrijf alsjeblieft je **naam en studentnummer** op en zorg ervoor dat je naam op elk vel staat.
- In totaal kun je maximaal 12 punten behalen. Het uiteindelijke cijfer is $\min\{10, \text{aantal behaalde punten}\}$.
- **MOTIVEER ALSJEBLIEFT AL JE ANTWOORDEN!!!!** In het bijzonder, **schrijf niet alleen het eindresultaat op** (dat telt niet!), maar leg het uit/geef de details, en **antwoord alsjeblieft niet alleen met "ja" of "nee"** (als het "ja" is, geef dan een bewijs, als het "nee" is, bijvoorbeeld vind een tegenvoorbeeld).

Exercise 1 (Deze oefening is 6 punten waard: 1pt voor elk van de items (1), (5) en (6), de anderen 0.5pt). Neem aan dat (X, \mathcal{T}) een topologische ruimte is. We zeggen dat $X = A_1 \cup A_2$ een *decompositie* van (X, \mathcal{T}) is als A_1, A_2 deelverzamelingen van X zijn waarvan de vereniging gelijk is aan het gehele X . Voor elke dergelijke decompositie voorzien we A_1 en A_2 van de geïnduceerde topologie en associëren we daarmee de volgende verzameling:

$$\mathcal{T}(A_1, A_2) := \{U \subset X : U \cap A_1 \text{ is open in } A_1 \text{ and } U \cap A_2 \text{ is open in } A_2\}.$$

(1) Laat zien dat $\mathcal{T}(A_1, A_2)$ een topologie is op X en $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}(A_1, A_2)$.

Vervolgens wordt een decompositie $X = A_1 \cup A_2$ *handig* genoemd als $\mathcal{T} = \mathcal{T}(A_1, A_2)$. Laat zien dat:

(2) Als $X = A_1 \cup A_2$ een handige decompositie van X is, dan geldt voor elke functie $f : X \rightarrow Y$ met waarden in een andere topologische ruimte Y :

$$f \text{ is continu} \iff f|_{A_1} : A_1 \rightarrow Y \text{ en } f|_{A_2} : A_2 \rightarrow Y \text{ zijn continu.}$$

(3) Als A_1 en A_2 beide open zijn, of beide gesloten, in X , dan is $X = A_1 \cup A_2$ een handige decompositie.

(4) Wanneer $X = \mathbb{R}$ is voorzien van de Euclidische topologie $\mathcal{T}_{\text{Eucl}}$,

$$\mathbb{R} = (-\infty, 0) \cup [0, \infty)$$

geen handige decompositie is.

Vervolgens duiden we met \mathcal{T}_{new} de topologie op \mathbb{R} geassocieerd met de decompositie uit item (4); dus

$$\mathcal{T}_{\text{new}} := \{U \subset \mathbb{R} : U \cap (-\infty, 0) \text{ is open in } (-\infty, 0) \text{ en } U \cap [0, \infty) \text{ is open in } [0, \infty)\},$$

waarbij we benadrukken dat "open" verwijst naar de Euclidische topologie op $(-\infty, 0)$ en $[0, \infty)$.

- (5) Bereken de afsluiting van $A = (-1, 0)$ en het inwendige van $B = [0, 1]$ in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{new}})$.
- (6) Is $C = [-1, 1]$, met de geïnduceerde topologie $\mathcal{T}_{\text{new}}|_C$, compact? Maar verbonden?
- (7) Convergeert de rij gegeven door $x_n := \frac{(-1)^n}{n}$ in de topologische ruimte $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{new}})$?
- (8) Voor welke waarden van $\lambda \in \mathbb{R}$ is de volgende functie

$$f_\lambda : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{new}}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{Eucl}}), \quad f_\lambda(x) = \begin{cases} x & \text{als } x < 0 \\ \lambda & \text{als } x = 0 \\ x + \lambda^2 & \text{als } x > 0 \end{cases}$$

continu?

(9) Bestaat er een λ zodanig dat f_λ een "embedding" is?

Exercise 2. (2 pt) Beschouw de actie van $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\widehat{0}, \widehat{1}\}$ (de groep van gehele getallen modulo 2) op de eenheidstwee-dimensionale bol S^2 gegeven door

$$\widehat{k} \cdot (x, y, z) = (x, y, (-1)^k z) \quad \left(\text{for } \widehat{k} \in \mathbb{Z}_2, (x, y, z) \in S^2\right).$$

Laat zien dat de resulterende quotiëntruimte S^2/\mathbb{Z}_2 homeomorf is met de gesloten eenheidsschijf D^2 .

Exercise 3. (2 pt) Welke van de volgende ruimten zijn homeomorf aan elkaar (en waarom):

- (a) $C_0 = (S^1 \times [0, 1))^+$, de éénpuntscompactificatie van $S^1 \times [0, 1)$.
- (b) $C_1 = \text{Cone}(S^1)$, de abstracte kegel geassocieerd met de ruimte S^1 .
- (c) de concrete kegel $C_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = (1 - z)^2, 0 \leq z \leq 1\}$.

Exercise 4. (2 pt) Op S^2 beschouwen we de functies $f, g, h : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door:

$$f(x, y, z) = x, \quad g(x, y, z) = y, \quad h(x, y, z) = z.$$

We beschouwen ook de verzameling van alle polynomiale expressies gegenereerd op f, g en h :

$$\mathcal{A} := \left\{ \sum_{0 \leq i, j, k \leq d} c_{i, j, k} f^i g^j h^k : d \in \mathbb{N}, c_{i, j, k} \in \mathbb{R} \right\} \subset C(S^2).$$

- (1) Laat zien dat \mathcal{A} gesloten is in $C(S^2)$.
- (2) Laat zien dat voor elke karakter $\chi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$, de getallen

$$u := \chi(f), \quad v := \chi(g), \quad w := \chi(h)$$

moeten voldoen aan $u^2 + v^2 + w^2 = 1$.

- (3) Laat zien dat voor elk $u, v, w \in \mathbb{R}$ die voldoen aan $u^2 + v^2 + w^2 = 1$, er een karakter $\chi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ bestaat met $\chi(f) = u$, $\chi(g) = v$, $\chi(h) = w$, en dit karakter uniek is.
- (4) De vorige twee items vertellen ons dat we een bijectie hebben

$$\Psi : X_{\mathcal{A}} \rightarrow S^2, \quad \chi \mapsto (\chi(f), \chi(g), \chi(h)).$$

Laat zien dat dit eigenlijk een homeomorfisme is.

(Herinner hier dat $X_{\mathcal{A}}$ (het topologische spectrum van de algebra \mathcal{A}) de verzameling is van alle karakters op \mathcal{A} en de topologie is de kleinste met de eigenschap dat, voor elk $a \in \mathcal{A}$, de afbeelding $F_a : X_{\mathcal{A}} \rightarrow \mathbb{R}$, $F_a(\chi) = \chi(a)$ continu is.)

NOGMAALS: LEG ALSJEBLIEFT ZOVEEL MOGELIJK UIT/GEEF ZOVEEL MOGELIJK DETAILS...

... ONTHOUD DAT IEMAND ANDERS (DIE NIET JE GEDACHTEN KAN LEZEN) JE OPLOSSINGEN ZAL BEOORDELEN

... en: VEEL SUCCES!