INLEIDING TOPOLOGIE(WISB243) EXAM, FEBRUARY 2, 2024

NOTES:

- Reminder: you are allowed to use four A3 pages (e.g. two sheets front and back) that you prepared in advance (handwritten or typed). No other material is allowed.
- your solutions can be in Dutch or English (or a mixture of those).
- Please write down your name and the student no, and make sure your name is on each sheet.
- In total you can collect up to 12 points. The final mark is $\min\{10, \text{number of collected points}\}$.
- PLEASE MOTIVATE ALL YOUR ANSWERS!!!! In particular, please do not just write down the final result (that will not count!) but explain it/provide the details, and please do not just answer with "yes" or "no" (if it "yes" provide a proof, if it is "no" provide a proof as well (e.g. find a counterexample)).

Exercise 1 (*This exercise is worth 6 points: 1pt for each of the items (1), (5) and (6), the others 0.5pts*)**.** Assume that $(X, \mathcal{T})$ is a topological space. We say that $X = A_1 \cup A_2$ is a *decomposition* of $(X, \mathcal{T})$ if A_1, A_2 are subsets of X whose union is the entire X. For any such decomposition we endow A_1 and A_2 with the induced topology and we associate to it the following collection of subsets of X:

$$\mathcal{T}(A_1, A_2) := \{U \subset X : U \cap A_1 \text{ is open in } A_1 \text{ and } U \cap A_2 \text{ is open in } A_2\}.$$

(1) Show that $\mathcal{T}(A_1, A_2)$ is a topology on X and $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}(A_1, A_2)$.

Next, a decomposition $X = A_1 \cup A_2$ will be called *convenient* if $\mathcal{T} = \mathcal{T}(A_1, A_2)$. Please show that:

(2) If $X = A_1 \cup A_2$ is a convenient decomposition of X then, for any function $f : X \to Y$ with values in another topological space Y, one has:

$$f \text{ is continuous} \quad \Longleftrightarrow \quad f|_{A_1} : A_1 \to Y \text{ and } f|_{A_2} : A_2 \to Y \text{ are continuous.}$$

(3) If A_1 and A_2 are both open, or both closed, in X, then $X = A_1 \cup A_2$ is a convenient decomposition.

(4) When $X = \mathbb{R}$ endowed with the Euclidean topology $\mathcal{T}_{\text{Eucl}}$,

$$\mathbb{R} = (-\infty, 0) \cup [0, \infty)$$

is not a convenient decomposition.

Next, we denote by $\mathcal{T}_{\text{new}}$ the topology on $\mathbb{R}$ associated to the decomposition from item (4); hence

$$\mathcal{T}_{\text{new}} := \{U \subset \mathbb{R} : U \cap (-\infty, 0) \text{ is open in } (-\infty, 0) \text{ and } U \cap [0, \infty) \text{ is open in } [0, \infty)\},$$

where we emphasise that "open" refers to the Euclidean topology on $(-\infty, 0)$ and $[0, \infty)$.

(5) Compute the closure of $A = (-1, 0)$ and the interior of $B = [0, 1]$ in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{new}})$.

(6) Is $C = [-1, 1]$, with the induced topology $\mathcal{T}_{\text{new}}|_C$, compact? But connected?

(7) Is the sequence given by $x_n := \frac{(-1)^n}{n}$ convergent in the topological space $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{new}})$?

(8) For what values of $\lambda \in \mathbb{R}$ is the following function

$$f_\lambda : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{new}}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{Eucl}}), \quad f_\lambda(x) = \begin{cases} x & \text{if } x < 0 \\ \lambda & \text{if } x = 0 \\ x + \lambda^2 & \text{if } x > 0 \end{cases}$$

continuous?

(9) Does there exists λ such that f_λ is an embedding?

Exercise 2. *(2 pts)* Consider the action of $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\widehat{0}, \widehat{1}\}$ (the groups of integers modulo 2) on the unit two-dimensional sphere S^2 given by

$$\widehat{k} \cdot (x, y, z) = \big(x, y, (-1)^k z\big) \qquad \Big(\text{for } \widehat{k} \in \mathbb{Z}_2,\ (x, y, z) \in S^2\Big).$$

Show that the resulting quotient space $S^2/\mathbb{Z}_2$ is homeomorphic to the closed unit disk D^2.

Exercise 3. *(2 pts)* Which of the following spaces are homeomorphic to each other (and why):

(a) $C_0 = (S^1 \times [0,1))^+$, the one-point compactification of $S^1 \times [0,1)$.
(b) $C_1 = \mathrm{Cone}(S^1)$, the abstract cone associated associated to the space S^1.
(c) the concrete cone $C_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = (1-z)^2,\ 0 \leq z \leq 1\}$.

Exercise 4. *(2 pts)* On S^2 we consider the functions $f, g, h : S^2 \to \mathbb{R}$ given by:

$$f(x,y,z) = x, \quad g(x,y,z) = y, \quad h(x,y,z) = z.$$

We also consider the collection of all polynomial expressions generated on f, g and h:

$$\mathcal{A} := \left\{ \sum_{0 \leq i,j,k \leq d} c_{i,j,k} f^i g^j h^k : d \in \mathbb{N}, c_{i,j,k} \in \mathbb{R} \right\} \subset C(S^1).$$

(1) Show that $\mathcal{A}$ is dense in $C(S^2)$.
(2) Show that for any character $\chi : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, the numbers
$$u := \chi(f), \quad v := \chi(v), \quad w := \chi(h)$$
must satisfy $u^2 + v^2 + w^2 = 1$.
(3) Show that for any $u, v, w \in \mathbb{R}$ satisfying $u^2 + v^2 + w^2 = 1$, there exists a character $\chi : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ with $\chi(f) = u$, $\chi(g) = v$, $\chi(h) = w$, and this character is unique.
(4) The previous two items tell us that we have a bijection
$$\Psi : X_{\mathcal{A}} \to S^2, \quad \chi \mapsto (\chi(f), \chi(g), \chi(h)).$$
Show that this is actually a homeomorphism.
(Recall here that $X_{\mathcal{A}}$ (the topological spectrum of the algebra $\mathcal{A}$) is the set of all characters on $\mathcal{A}$ and its topology is the smallest one with the property that, for each $a \in \mathcal{A}$, the map $F_a : X_{\mathcal{A}} \to \mathbb{R}$, $F_a(\chi) = \chi(a)$ is continuous.)

AGAIN: PLEASE EXPLAIN /GIVE AS MANY DETAILS AS POSSIBLE ...

... REMEMBER THAT SOMEBODY ELSE (WHO CANNOT READ YOUR MIND) WILL EVALUATE YOUR SOLUTIONS

... and: GOOD LUCK!

INLEIDING TOPOLOGIE (Wisb243) TENTAMEN, 2 FEBRUARI 2024

NOTES:

- Herinnering: je mag vier A3-pagina's gebruiken (bijvoorbeeld twee vellen voor- en achterkant) die je van tevoren hebt voorbereid. Geen ander materiaal is toegestaan.
- Je oplossingen mogen in het Nederlands of Engels zijn (of een mix daarvan).
- Schrijf alsjeblieft je naam en studentnummer op en zorg ervoor dat je naam op elk vel staat.
- In totaal kun je maximaal 12 punten behalen. Het uiteindelijke cijfer is $\min\{10, \text{aantal behaalde punten}\}$.
- MOTIVEER ALSJEBLIEFT AL JE ANTWOORDEN!!!! In het bijzonder, schrijf niet alleen het eindresultaat op (dat telt niet!), maar leg het uit/geef de details, en antwoord alsjeblieft niet alleen met "ja" of "nee" (als het "ja" is, geef dan een bewijs, als het "nee" is, bijvoorbeeld vind een tegenvoorbeeld).

Exercise 5 (*Deze oefening is 6 punten waard: 1pt voor elk van de items (1), (5) en (6), de anderen 0.5pt*)**.** Neem aan dat $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte is. We zeggen dat $X = A_1 \cup A_2$ een *decompositie* van $(X, \mathcal{T})$ is als A_1, A_2 deelverzamelingen van X zijn waarvan de vereniging gelijk is aan het gehele X. Voor elke dergelijke decompositie voorzien we A_1 en A_2 van de geïnduceerde topologie en associëren we daarmee de volgende verzameling:

$$\mathcal{T}(A_1, A_2) := \{U \subset X : U \cap A_1 \text{ is open in } A_1 \text{ and } U \cap A_2 \text{ is open in } A_2\}.$$

(1) Laat zien dat $\mathcal{T}(A_1, A_2)$ een topologie is op X en $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}(A_1, A_2)$.

Vervolgens wordt een decompositie $X = A_1 \cup A_2$ *handig* genoemd als $\mathcal{T} = \mathcal{T}(A_1, A_2)$. Laat zien dat:

(2) Als $X = A_1 \cup A_2$ een handige decompositie van X is, dan geldt voor elke functie $f : X \to Y$ met waarden in een andere topologische ruimte Y:

$$f \text{ is continu} \iff f|_{A_1} : A_1 \to Y \text{ en } f|_{A_2} : A_2 \to Y \text{ zijn continu.}$$

(3) Als A_1 en A_2 beide open zijn, of beide gesloten, in X, dan is $X = A_1 \cup A_2$ een handige decompositie.

(4) Wanneer $X = \mathbb{R}$ is voorzien van de Euclidische topologie $\mathcal{T}_{\text{Eucl}}$,

$$\mathbb{R} = (-\infty, 0) \cup [0, \infty)$$

geen handige decompositie is.

Vervolgens duiden we met $\mathcal{T}_{\text{new}}$ de topologie op $\mathbb{R}$ geassocieerd met de decompositie uit item (4); dus

$$\mathcal{T}_{\text{new}} := \{U \subset \mathbb{R} : U \cap (-\infty, 0) \text{ is open in } (-\infty, 0) \text{ en } U \cap [0, \infty) \text{ is open in } [0, \infty)\},$$

waarbij we benadrukken dat "open" verwijst naar de Euclidische topologie op $(-\infty, 0)$ en $[0, \infty)$.

(5) Bereken de afsluiting van $A = (-1, 0)$ en het inwendige van $B = [0, 1]$ in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}\text{new})$.

(6) Is $C = [-1, 1]$, met de geïnduceerde topologie $\mathcal{T}\text{new}|C$, compact? Maar verbonden?

(7) Convergeert de rij gegeven door $x_n := \frac{(-1)^n}{n}$ in de topologische ruimte $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{new}})$?

(8) Voor welke waarden van $\lambda \in \mathbb{R}$ is de volgende functie

$$f_\lambda : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{new}}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{Eucl}}), \quad f_\lambda(x) = \begin{cases} x & \text{als } x < 0 \\ \lambda & \text{als } x = 0 \\ x + \lambda^2 & \text{als } x > 0 \end{cases}$$

continu?

(9) Bestaat er een λ zodanig dat f_λ een "embedding" is?

Exercise 6. *(2 pt)* Beschouw de actie van $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\widehat{0}, \widehat{1}\}$ (de groep van gehele getallen modulo 2) op de eenheidstwee-dimensionale bol S^2 gegeven door

$$\widehat{k} \cdot (x, y, z) = \big(x, y, (-1)^k z\big) \qquad \Big(\text{for } \widehat{k} \in \mathbb{Z}_2,\ (x, y, z) \in S^2\Big).$$

Laat zien dat de resulterende quotiëntruimte $S^2/\mathbb{Z}_2$ homeomorf is met de gesloten eenheidsschijf D^2.

Exercise 7. *(2 pt)* Welke van de volgende ruimten zijn homeomorf aan elkaar (en waarom):

(a) $C_0 = (S^1 \times [0,1))^+$, de éénpuntscompactificatie van $S^1 \times [0,1)$.
(b) $C_1 = \mathrm{Cone}(S^1)$, de abstracte kegel geassocieerd met de ruimte S^1.
(c) de concrete kegel $C_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = (1-z)^2,\ 0 \leq z \leq 1\}$.

Exercise 8. *(2 pt)* Op S^2 beschouwen we de functies $f, g, h : S^2 \to \mathbb{R}$ gegeven door:

$$f(x,y,z) = x, \quad g(x,y,z) = y, \quad h(x,y,z) = z.$$

We beschouwen ook de verzameling van alle polynomiale expressies gegenereerd op f, g en h:

$$\mathcal{A} := \left\{ \sum_{0 \leq i,j,k \leq d} c_{i,j,k} f^i g^j h^k : d \in \mathbb{N}, c_{i,j,k} \in \mathbb{R} \right\} \subset C(S^1).$$

(1) Laat zien dat $\mathcal{A}$ gesloten is in $C(S^2)$.
(2) Laat zien dat voor elke karakter $\chi : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, de getallen

$$u := \chi(f), \quad v := \chi(v), \quad w := \chi(h)$$

moeten voldoen aan $u^2 + v^2 + w^2 = 1$.
(3) Laat zien dat voor elk $u, v, w \in \mathbb{R}$ die voldoen aan $u^2 + v^2 + w^2 = 1$, er een karakter $\chi : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ bestaat met $\chi(f) = u$, $\chi(g) = v$, $\chi(h) = w$, en dit karakter uniek is.
(4) De vorige twee items vertellen ons dat we een bijectie hebben

$$\Psi : X_{\mathcal{A}} \to S^2, \quad \chi \mapsto (\chi(f), \chi(g), \chi(h)).$$

Laat zien dat dit eigenlijk een homeomorfisme is.
(Herinner hier dat $X_{\mathcal{A}}$ (het topologische spectrum van de algebra $\mathcal{A}$) de verzameling is van alle karakters op $\mathcal{A}$ en de topologie is de kleinste met de eigenschap dat, voor elk $a \in \mathcal{A}$, de afbeelding $F_a : X_{\mathcal{A}} \to \mathbb{R}$, $F_a(\chi) = \chi(a)$ continu is.)

NOGMAALS: LEG ALSJEBLIEFT ZOVEEL MOGELIJK UIT/GEEF ZOVEEL MOGELIJK DETAILS...

... ONTHOUD DAT IEMAND ANDERS (DIE NIET JE GEDACHTEN KAN LEZEN) JE OPLOSSINGEN ZAL BEOORDELEN

... en: VEEL SUCCES!