Regelmatige veelhoeken

Roland Schermer
Studentnummer 3377768
Universiteit Utrecht

Reinier Storm
Studentnummer 3365115
Universiteit Utrecht

4 februari 2009

Samenvatting

Over een constructie probleem, de functie van Euler en de getallen van Fermat

1 Voorwoord

Regelmatige veelhoeken, de functie van Euler en de getallen van Fermat. Het was oorspronkelijk onze tweede keus op het lijstje dat we tijdens de laatste kaleidoscooples ingeleverd hebben. Het leek ons een interessant een veelzijdig onderwerp en dat sprak ons wel aan.

Pieter heeft ons jammer genoeg verlaten. Hij mailde ons dat hij het erg druk had op dit moment en kaleidoscoop liever liet vallen. Dit werkstuk is dus gemaakt door ons tween: Reinier en Roland. We hebben ervoor gekozen dit werkstuk in het Nederlands te schrijven. Hierin kunnen wij ons toch beter uitdrukken en kunnen we beduidend sneller schrijven wat niet geheel onbelangrijk is.

Geschiedenis
De rode draad in dit werkstuk is de construeerbaarheid van regelmatige veelvlakken. Dit probleem houdt wiskundige al sinds de oude Grieken bezig en grote wiskundigen als Euler en Gauss hebben hieraan bijgedragen (deze namen komen ook hier dus weer voor). Tegenwoordig kan met de zogenaamde Galois theorie dit oude probleem tamelijk eenvoudig opgelost worden (in vergelijking met de oude technieken, voor ons nog steeds behoorlijk ingewikkeld).
Op 19-jarige leeftijd bewijs Gauss dat een regelmatig 17-vlak construeerbaar was. Een jaar later werd deze ook daadwerkelijk geconstrueerd. Van al zijn verdiensten in de wiskunde was Gauss zelf het meest trots op deze, zo trots dat hij wilde dat het regelmatige 17-vlak op zijn grafsteen gebeiteld zou worden. Hier is echter nooit iets van terug gekomen, want de man die grafsteen moest beitelen weigerde dit te doen: hij voerde aan dat het niet te onderscheiden zou zijn van een cirkel en dat het dus zonde van zijn tijd zou zijn. Gauss gaf later ook een algemeen bewijs voor de constueerbaarheid van een willekeurige n-hoek. Hij deed dit niet met behulp van Galois theorie, maar baseerde dit op eenheidswortels. Dit bewijs is echter lang en ingewikkeld en we zullen hier verder niet op ingaan.

We zullen beginnen met een algemeen verhaal over constructie problemen. Hierbij hebben wij het even over de Galois theorie en geven wij een paar kleine voorbeeldjes. Hierna zullen we de constructie van het regelmatige 5-vlak behandelen. Deze werd ook genoemd in het artikel dat wij kregen als inleiding, maar hierin werd niet beschreven hoe de uiteindelijke constructie in zijn werk gaat. Vervolgens behandelen we de functie van Euler. We beschrijven de eigenschappen en zullen er ook een aantal van bewijzen. Tot slot de getallen van Fermat. Hier zullen we een link leggen tussen deze getallen en de regelmatige veelvlakken via een stelling en deze stelling ook in n richting bewijzen. We hebben ook het bewijs in de andere richting onderzocht, maar hier bleek vrij ingewikkelde Galois theorie voor nodig te zijn. Ter afsluiting zullen wij het proces nog even evalueren in het nawoord.

Inhoudsopgave

2 De regels van het spel

Dit werkstuk houdt zich bezig met een constructie probleem. Het gaat hierbij om constructies waarbij alleen een passer en liniaal gebruikt worden in het tweedimensionale vlak. De operaties die hierop van toepassing zijn beperken zich tot de volgende:

- Een rechte lijn trekken met behulp van de liniaal door twee punten in het vlak.
- Een cirkel trekken met behulp van de passer met als middelpunt een gegeven punt (O) in het vlak en als straal de afstand $|OP|$ met een punt P in het vlak.
- snijpunt van een lijn en een lijn markeren.
- snijpunten van een lijn en een cirkel markeren.
- snijpunten van cirkel en een cirkel markeren.

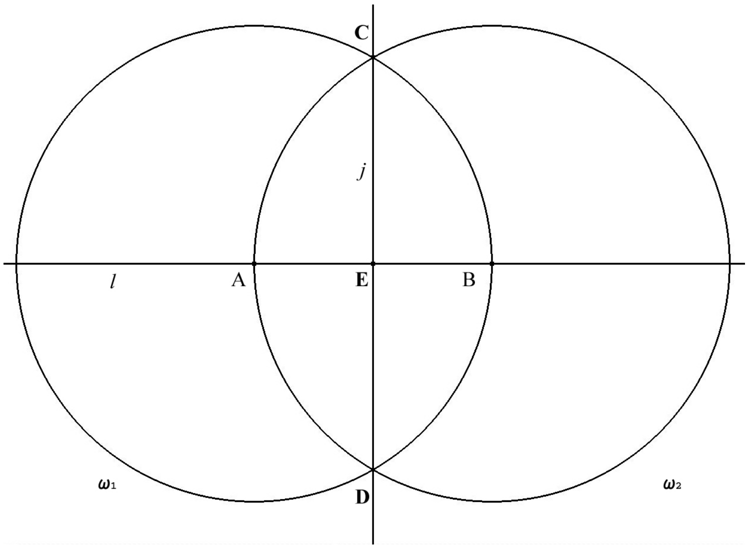
Andere bewerkingen, zoals het gebruiken van een gemarkeerde liniaal of het trekken van een cirkel om een bewegend punt zijn dus niet toegestaan! Voor ons probleem is verder van belang wanneer een punt te construeren is. Uit de definities van de operaties volgt dat een punt alleen in één stap te construeren is als het het snijpunt van twee lijnen, twee cirkels of een cirkel en een lijn is, waarbij gebruikt gemaakt wordt van alle voorgaande punten. Een willekeurig punt P is dan te construeren als er een eindig aantal punten $r_1, \ldots, r_n$ te construeren valt waaruit P in één stap te construeren is, waarbij voor elk punt r_i geldt dat deze in één stap te construeren is uit alle voorgaande punten $r_1, \ldots, r_{i-1}$.
Van een aantal problemen is bekend hoe ze geconstrueerd kunnen worden en in simpele gevallen is het vaak ook zelf gemakkelijk te doorgronden. Het is vaak veel gemakkelijker om te bewijzen dat een constructie correct is dan dat het is om te bewijzen of een bepaalde constructie mogelijk is, als we nog niet weten wat het voorschrift hiervoor is.
We zullen nu een aantal voorbeelden geven om het bovenstaande verhaal wat te verduidelijken. Dit zijn hele simpele voorbeelden en de constructie zelf is dan ook misschien wat minder interessant, maar hieruit blijkt wel de correcte aanpak voor het geven van een constructie voorschrift. Bovendien zullen we deze constructies later in dit werkstuk nog gebruiken bij het maken van ietwat ingewikkelder figuren. In sommige van deze problemen kiezen we een eenheidslengte, zodat we kunnen spreken over lengten van lijnstukken uitgedrukt in de eenheidslengte.
Allereerst de constructie van de het midden van een lijnstuk van een hoek.

3 constructies

3.1 Construeren van het midden van lijnstuk $|AB|$

De instructies voor het construeren van het midden van een lijnstuk $|AB|$ op de lijn l:

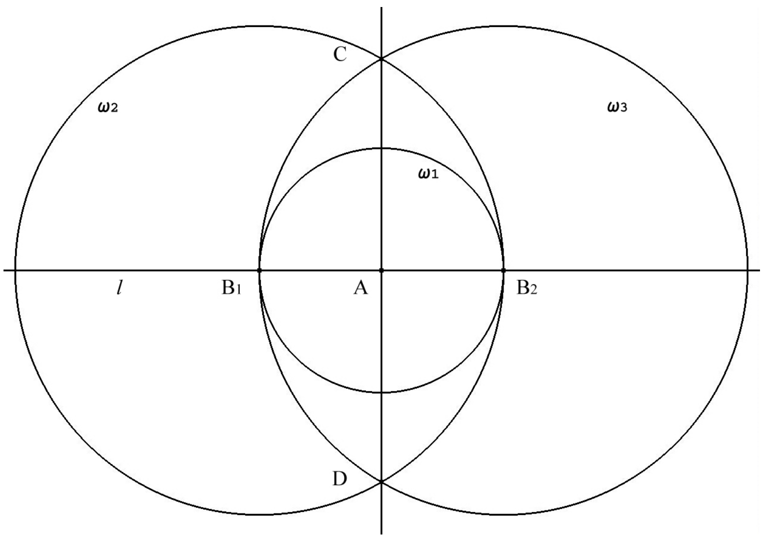
1. Trek een cirkel ω_1 met middelpunt A en straal $|AB|$.
2. Trek een cirkel ω_2 met middelpunt B en straal $|AB|$.
3. Noem de snijpunten van de cirkels ω_1 en ω_2, C en D.
4. Teken de lijn j door de punten C en D.
5. Construeer het midden van het lijnstuk $|AB|$ door het snijpunt E van l en j te markeren.



3.2 Construeren van loodlijn door een gegeven punt

De instructies voor het construeren van een lijn loodrecht op een gegeven lijn l, door het gegeven punt A.

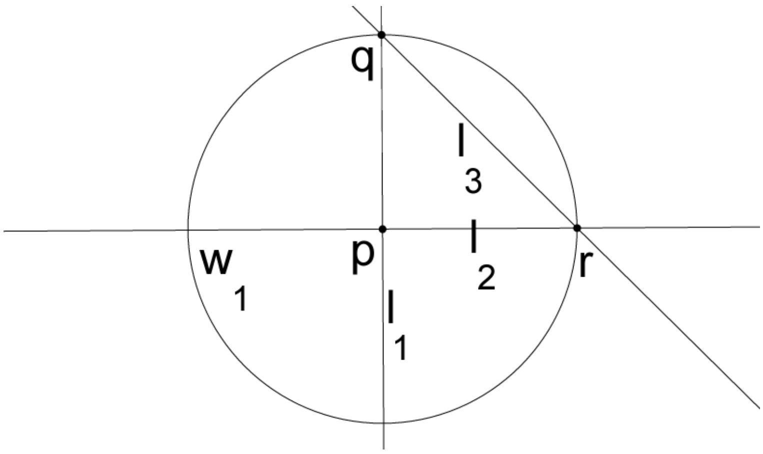
1. Teken een cirkel ω_1 met als midden A en straal R.
2. Markeer de snijpunten B_1 en B_2 van de cirkel ω_1 en de lijn l.
3. Teken een cirkel ω_2 met als midden B_1 en straal $2R$.
4. Teken een cirkel ω_3 met als midden B_2 en straal $2R$.
5. Markeer de Markeer de snijpunten C en D van de cirkel ω_2 en de cirkel ω_3.
6. Construeer de loodlijn van lijn l door het punt A, door de lijn $|CD|$ te tekenen.



3.3 Hoek van 45°

Het Constructie voorschrift voor een hoek van 45°:

1. Trek een cirkel (w_1) met met middelpunt p en straal R.
2. Trek de lijn (l_1) door p en een punt r op de cirkel w_1.
3. Trek nu volgens de instructies van een loodlijn een loodlijn (l_2) door p.
4. Markeer het punt q van intersectie tussen (l_2) en (w_1).
5. Trek de lijn door punt r en punt q.



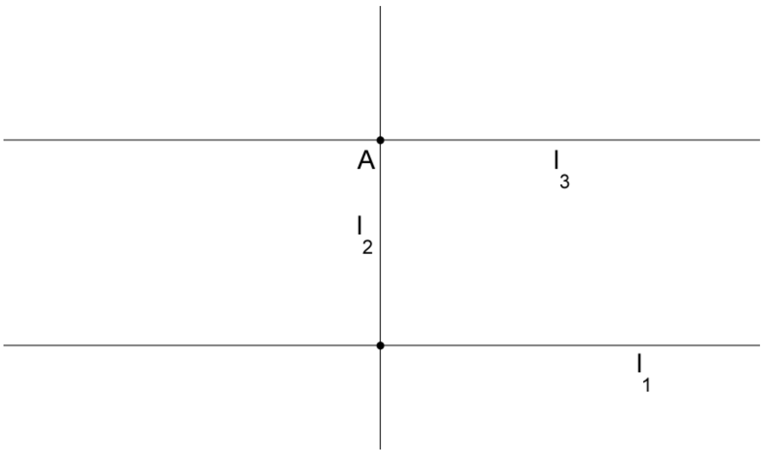
De lijn $|rq|$ maakt een hoek van 45° met de lijn $|pr|$. Wanneer we lengte R als eenheid lengte kiezen, dan heeft lijnstuk $|rq|$ een lengte van $\sqrt{2}$. Dus als we een hoek van 45° kunnen construeren dan kunnen we ook lengte $\sqrt{2}$ construeren. Evenzo kunnen we een hoek van 45° construeren als we $\sqrt{2}$ kunnen construeren. Denk maar aan $cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Deze relatie tussen het construeren van een hoek en een lengte geldt ook voor $\sqrt{3}$ en een hoek van 30°. We zullen later deze relatie gebruiken om te bewijzen dat het niet mogelijk is om met een gegeven cirkel met oppervlakte A een vierkant te construeren met oppervlakte A.

3.4 Construeren van een parallelle lijn

De instructies van het construeren van een parallelle lijn aan een gegeven lijn l_1, door een gegeven punt p. We gebruiken hiervoor de vorige constructie, merk daarbij op dat die constructie ook geldt wanneer het punt A uit het vorige constructie probleem niet op de lijn l ligt, men moet er dan voor zorgen dat de cirkel ω_1 minimaal één snijpunt met de lijn l heeft.

1. Construeer volgens de instructies van 3.2 een loodlijn l_2 op l_3 door het punt A.

2. Construeer een loodlijn l_3 op l_2 door het punt A.

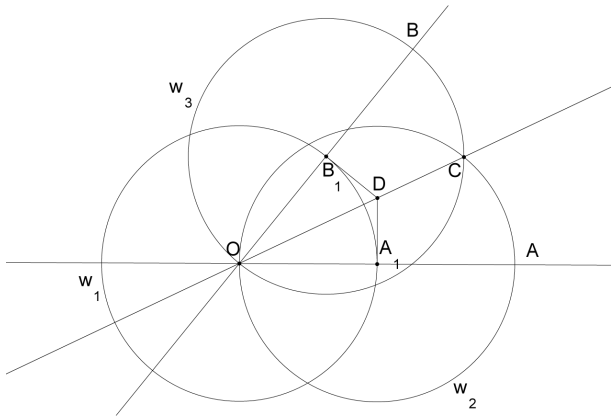


Nu is lijn l_3 parallel aan l_1 en gaat door het punt A

3.5 Bisectie van een gegeven hoek

De bisectie van een gegeven hoek AOB komt overeen met de volgende instructies.

1. Teken een cirkel ω_1 met als midden O en straal R.
2. Markeer het punt van intersectie A_1 van ω_1 en de lijn OA.
3. Markeer het punt van intersectie B_1 van ω_1 en de lijn OB.
4. Construeer de cirkel ω_2 met midden in A_1 en straal R.
5. Construeer de cirkel ω_3 met midden in B_1 en straal R.
6. Markeer het punt van intersectie C van de cirkels ω_2 en ω_3.
7. Teken de bissectrice OC.



Proof Trek de lijnen vanuit A_1 en B_1 loodrecht op respectievelijk OA en OB. Dan geldt $\triangle ODA_1 = \triangle ODB_1$, omdat $OD = OD$, $OA_1 = R = OB_1$ en $\angle OA_1D = \angle OB_1D$. Dus $\angle DOA_1 = \angle DOB_1$

3.6 Constructie van een regelmatige vijfhoek

Voor het construeren van een regelmatige vijfhoek hebben we per aannamen een cirkel(ω) met middelpunt in O en straal 1 en een punt P_0 op de cirkel.

1. Trek een lijn (l) loodrecht op de lijn OP_0 door het punt O.
2. Markeer het midden tussen O en de snijpunten van (l) en (ω). Noem deze punten A_1 en A_2
3. Teken de bissectrice van $\angle OA_1P_0$ tot het snijpunt A_3 met OP_0. De bissectrice van $\angle OA_2P_0$ heeft ook snijpunt A_3 met OP_0.
4. Teken nu de lijn loodrecht op OP_0 door A_3 tot het snijpunten P_1 en P_1' met (ω)

Nu beweren we dat de punten P_1 en P_1' met P_0 hoekpunten van een regelmatige vijfhoek met middelpunt O zijn.
Bewijs: Volgens de stelling van pythagoras heeft de lijn A_0P_0 lengte $\sqrt{5}/2$. Door een eigenschap van een hoek bissectrice geldt,

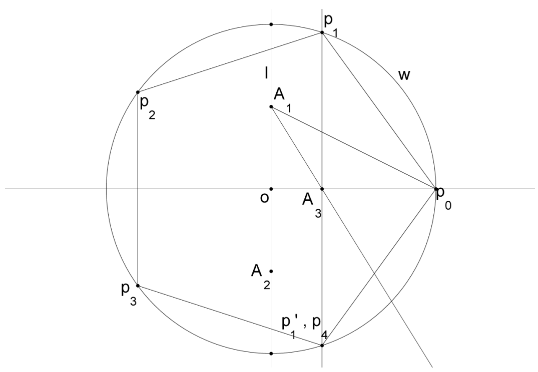
$$OA_0/A_0P_0 = OA_3/A_3P_0 = \frac{1/2}{\sqrt{5}/2} \tag{1}$$

Ook geldt: $OA_3 + A_3P_0 = 1$

Hieruit volgt:

$$OA_3 = \frac{1}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \cos \pi/5 \tag{2}$$

Ofwel P_1 en P_0 zijn hoekpunten van een regelmatige vijfhoek met middelpunt O. Het punt P_1' levert een andere oplossing.



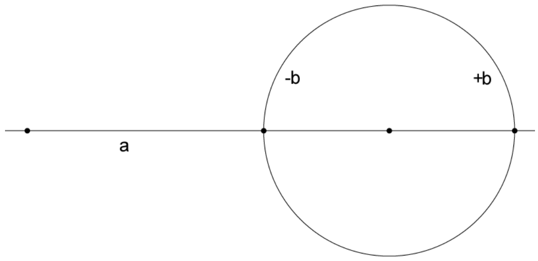
We zien dus dat we een hoek van 72° kunnen construeren dan en slechts dan als we een lengte van $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ kunnen construeren. We gaan nu bewijzen wanneer een bepaalde lengte te construeren is en ook wanneer niet. Dit is equivalent aan het al dan niet construeren van bepaalde punten.

4 Wanneer is een punt te construeren

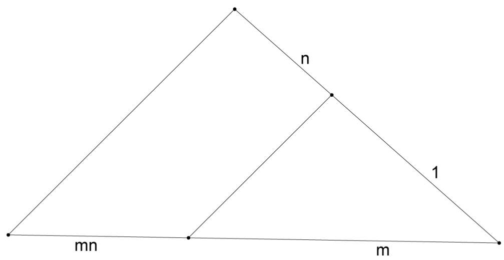
Proposition 4.1 *Een punt is construeerbaar dan en slechts dan als het te construeren is uit construeerbare punten volgens de bewerkingen:*$(+, -, \div, \times, \surd)$

Eerst bewijzen we dat het voldoende is aan de hand van constructies. Vervolgens dat het ook noodzakelijk is.

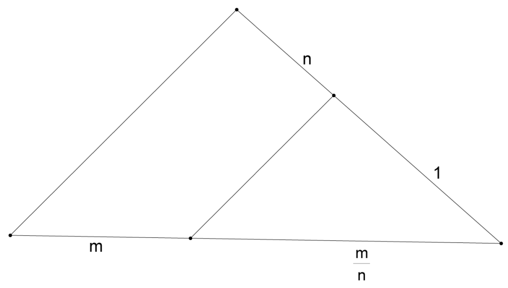
Proof Het op en aftellen van twee punten is eenvoudig te bereiken met een lijn door de twee punten en door met de passer de betreffende lijnstukken te kopiren:



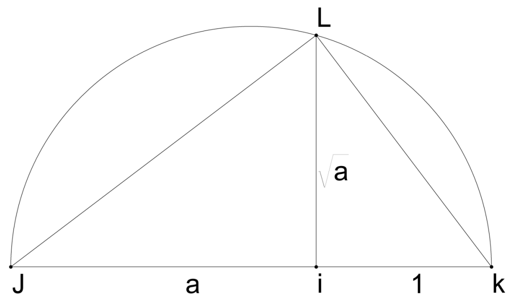
Het vermenigvuldigen en delen vereist een iets ingewikkeldere constructie. Hiervoor moeten we een parallelle lijn kunnen teken. De constructie met passer en liniaal hiervan hebben we al eerder behandeld. We hebben hier geven een lijnstuk m, n en een eenheid lijnstuk. En met de volgende constructie maken een lijnstuk met lengte mn.



De parallelle lijn deelt de zijden van de driehoek in gelijke verhoudingen. Daarom geldt $n : 1 = mn : m$. Hiermee hebben een lijnstuk met length mn geconstrueerd.
Delen gaat op vergelijkbare wijze.



Voor het worteltrekken van een gegeven lijnstuk a leggen we a en een eenheid lijnstuk in elkaar verlengde. Dan construeren we een cirkel met als middelpunt het midden van het lijnstuk $|a1|$. Deze constructie hebben we ook al eerder behandeld. De hoek $\angle jlk$ is $90°$. Volgens de stelling van pythagoras hebben we nu een lijnstuk met lengte $\sqrt{a}$ gemaakt. Er geldt immers $JL^2 + Lk^2 = Jk^2$, evenzo $Ji^2 + iL^2 = JL^2$ en $ik^2 + iL^2 = Lk^2$. Ofwel $ik^2 + iL^2 + Ji^2 + iL^2 = Jk^2$, vul de betreffen lengtes in: $2iL^2 + a^2 + 1 = a^2 + 2a + 1$. Dus $iL = \sqrt{a}$.



Nu de andere kant van het bewijs.

Definition Een lichaam is een verzameling met de bewerkingen: optellen, aftrekken, vermenigvuldiging en deling, waarbij de verzameling voor deze bewerkingen gesloten is.

Stel je hebt een lichaam F van construeerbare punten. Leg hierin een cartesisch assenstelsel aan. Dan heeft een lijn door twee punten van dit lichaam coëfficiënten die elementen zijn van F. De vergelijking van een lijn door twee punten $A(p,q)$ en $B(r,s)$ zou er als volgt uit kunnen zien:

$$\frac{x-p}{r-p} = \frac{y-q}{s-q} \tag{3}$$

Hieruit volgt dat een snijpunt tussen twee lijnen door punten uit het lichaam F, een element is van F. Aangezien de oplossingen van een eerstegraads vergelijking volledig in termen van de coëfficiënten is. Het wordt iets anders als we er een cirkel bij betrekken. De vergelijking van een cirkel met middelpunt (m,n) en straal w is:

$$(x-m)^2+(y-n)^2=w^2 \tag{4}$$

Stel dat $D=(x_0,y_0)$ een snijpunt is van een construeerbare lijn en cirkel. Dan kunnen we de vergelijkingen van een lijn en een cirkel oplossen naar x_0 en y_0. Als we deze oplossen naar x_0 krijgen we de volgende vergelijking.

$$(x_0-m)^2+(\frac{(s-q)}{(r-p)}(x_0-p)+q-n)^2-w^2=0 \tag{5}$$

Dit is een kwadratische vergelijking met coëfficiënten uit F en x_0 is een nulpunt van deze vergelijking. Ofwel x_0 kan uitgedrukt worden in elementen van F en een wortel van elementen van F. Precies hetzelfde argument geldt voor y_0 en een vergelijkbaar argument gaat op voor een snijpunt tussen een lijn en een cirkel. Ook dit is een kwadratische vergelijking. Hieruit volgt dat alle construeerbare punten verkregen kunnen worden uit construeerbare punten volgens de bewerkingen:$(+,-,\div,\times,\sqrt{})$

Example We kunnen zonder verlies van algemeenheid aannemen dat we een eenheid cirkel met middelpunt $(0,0)$ hebben. Dan is de oppervlakte van deze cirkel π. Om een vierkant met oppervlakte π te construeren moeten we $\sqrt{\pi}$ kunnen construeren. Het getal π is zoals we weten een transcendent getal en is dus geen nulpunt van een polynoom. Het is daarom onmogelijk om $(\sqrt{\pi},0)$ uit $(1,0)$ te construeren met de bewerkingen $(+,-,\div,\times,\sqrt{})$.

5 Euler's ϕ-functie

In de getaltheorie is een belangrijke eigenschap van een natuurlijk getal n het aantal positieve gehele getallen kleiner dan n die relatief priem zijn met n, dit wordt aangegeven met $\phi(n)$. De $\phi - functie$ is ook bekent als "Euler's functie", genoemd naar de bekende Zwitserse wiskundige Leonhard Euler.[1] Die een van de eerste was die de belangrijke eigenschappen van deze functie opmerkte.

Example Voor $n=9$ zijn er zes getallen die minder dan negen zijn en relatief priem ten opzichte van negen, namelijk:1,2,4,5,7 en 8. Dus $\phi(9)=6$

De ϕ-functie heeft een aantal opmerkelijke eigenschappen. Een daarvan was door Euler zelf ontdekt:

Proposition 5.1 Als m en n relatief priem zijn, dan geldt $\phi(mn)=\phi(m)\phi(n)$

Proof Volgens de Chinese rest stelling geldt voor een geheel getal a: $ggd(a,mn)=1$ dan en slechts dan als $ggd(a,m)=1$ en $ggd(a,n)=1$. Ofwel $\phi(mn)$ is gelijk aan het aantal paren (μ,υ), waarin μ relatief priem is ten opzichte van m en υ relatief priem is ten opzichte van n. Dit komt neer op: $\phi(mn)=\phi(m)\phi(n)$

[1]Leonhard Euler (1707-1783) wordt beschouwd als een van de belangrijkste wiskundige allertijden en is bovendien de meest productieve allertijden. Hij heeft aan vrijwel elk aspect van wiskunde een bijdrage geleverd.

Proposition 5.2 *Bovendien geldt voor p is priem:* $\phi(p^m) = p^{m-1}(p-1)$

Proof Omdat er $p^m - 1$ getallen kleiner dan p^m zijn, hiervan zijn alleen de getallen $p * 1, p * 2, ..., p * (p^{m-1} - 1)$ niet relatief priem met p^m,dus:

$$\phi(p^m) = p^m - 1 - (p^{m-1} - 1) = p^{m-1}(p-1) \tag{6}$$

Wat heeft deze prachtige functie nou met de construeerbaarheid van regelmatige veelhoeken te maken? Het is te bewijzen dat: wanneer $\phi(n) = 2^l$, met l een niet negatief geheel getal, dan is een n-hoek te construeren. Er geldt echter ook dat deze conditie noodzakelijk is.

6 Fermat Getallen

Een Fermat[2] getal is een getal van de vorm $2^{2^k} + 1$ waarbij k een natuurlijk getal is. Fermat dacht zelf dat alle Fermat getallen priem waren. De eerste 5 zijn dat ook inderdaad, maar Euler toonde later aan dat F_6 geen priem is. Tegenwoordig is bekend dat F_n geen priem is voor $5 \leq n \leq 32$. Voor grotere waarden van n is het nog onbekend.

Nu bestaat de volgende stelling:

Een regelmatig n-vlak is construeerbaar dan en slechts dan als n van de volgende vorm is: $n = 2^s p_1 ... p_j$ *waarbij s een natuurlijk getal is en* p_1 *tot en met* p_j *verschillende Fermat priemen.*

Om deze stelling hard te bewijzen is Galois theorie nodig. Vooral bewijzen dat het feit dat n van bovenstaande vorm is ook voldoende is om het n-vlak te construeren is erg moeilijk. Daarom beperken we ons tot het aantonen dat het noodzakelijk is dat n van bovenstaande vorm is.

Om dit te bewijzen hebben we het volgende lemma nodig:

Lemma 6.1 *Het aantal mogelijk resultaten van een constructie bestaande uit k stappen is altijd* 2^l *met l een natuurlijk getal en* $l \leq k$.

Dit lemma vergt enige uitleg. Bij constructie hebben we slechts twee handelingen: het trekken van een lijn door twee punten of het maken van een cirkel met als middelpunt een bepaald punt en als straal de afstand van het middelpunt tot een ander punt. Nieuwe punten kunnen dan op 3 manieren ontstaan, namelijk als het snijpunt van twee lijnen, de snijpunten van een cirkel en een lijn en de snijpunten van twee cirkels. De laatste twee manieren leveren dus mogelijk twee verschillende punten die gelijkwaardig zijn. Als deze punten bij latere stappen en rol spelen moeten kunnen de betreffende stappen dus voor beide punten worden uitgevoerd wat dus via twee verschillende paden tot een resultaat leid. Mocht dit bij een latere stap weer voorkomen splitsen de paden zich opnieuw en krijgen we 4 verschillende paden. Met k stappen zijn er dus maximaal 2^k verschillende resultaten mogelijk. Nu hebben we nog te maken met de mogelijkheid dat verschillende paden elkaar weer opheffen, bijvoorbeeld: een

[2] De getallen van Fermat zijn genoemd naar Pierre de Fermat die leefde in de eerste helft van de 17e eeuw. Hij was jurist aan het hof van Toulouse en daarnaast bedreef hij in zijn vrije tijd wiskunde. Aan hem worden een aantal vroege ontwikkelingen toegeschreven die uiteindelijk geleid hebben tot de differentiaalrekening.

lijn uit pad 1 valt exact samen met een lijn uit pad 2. Als dit gebeurt, gebeurt dit altijd op een dusdanige manier, dat het uiteindelijk aantal paden nog steeds van de vorm 2^l is met $l \leq k$. Dit kan bewezen worden met Galois theorie. Wij hebben gezocht naar dit bewijs, maar hebben niets kunnen vinden en hebben ook zelf geen bewijs kunnen bedenken.

Bewijs Stel nu dat een bepaald n-vlak construeerbaar is. We gaan er vanuit dat een cirkel met middelpunt O en als straal de afstand $|OH_0|$ hebben. We nemen nu H_0 als het eerste hoekpunt van ons n-vlak. Om het n-vlak nu helemaal te kunnen construeren is het voldoende om een van beide aanliggende hoekpunten van H_0 te vinden die we H_1 noemen. We kunnen immers met behulp van de passer de overige hoekpunten gemakkelijk construeeren. Volgens het lemma is dit punt H_1 op 2^m verschillende manieren te construeren met m een natuurlijk getal. Dit hoekpunt H^1 is echter niet het enige hoekpunt van waaruit de andere te construeren zijn.

Voorbeeld met n = 10

Laten we als voorbeeld een regelmatig 10-vlak nemen, met een omschreven cirkel v met een omtrek van 1. Stel dat we H_1 gevonden. We kunnen vervolgens H_2 construeren door een cirkel te trekken met middelpunt H_1 en straal $|H_0H_1|$. Een van beide snijpunten van deze cirkel met de cirkel v valt samen met punt H_0, het andere snijpunt noemen we H_2. H_3 is nu te vinden door H_2 als middelpunt van een cirkel te nemen met straal $|H_0H_1|$ etc. Zo begonnen we met hoekpunt met index nummer 0, vervolgens construeerden we 1, dan 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 en tot slot komen we dan weer in hoekpunt 0 uit. Als we de cirkel zouden doorlopen leggen we tussen elk hoekpunt dan de afstand 1/10 af (de cirkel had een omtrek van 1).

We hadden echter ook hoekpunt 3 als eerst kunnen construeren. Een nieuw hoekpunt creren we op dezelfde manier als wanneer we begonnen met hoekpunt 1. De volgorde waarop we de punten creren is nu echter anders. We begonnen natuurlijk weer met punt 0, vervolgens construeerden we punt 3, dan 6, 9, 2, 5, 8, 1, 4 en 7. Als we nu de punten op deze volgorde langs de cirkel aflopen leggen we tussen elk punt 3/10 af.

Er zijn ook beginpunten waarvoor dit niet werkt. Stel we kiezen hoekpunt 2 als eerste punt. De punten komen dan in de volgorde 0, 2, 4, 6, 8, 0 en dan hebben we een probleem, aangezien we nog niet alle punten gecreerd hebben en we al terugkeren op een punt dat al geconstrueerd was. Dat betekend dat als we doorgaan, deze volgorde zich keer op keer zal herhalen en de punten die nog niet geconstrueerd zijn dus ook nooit geconstrueerd zullen worden.

Algemeen

Noodzakelijk is dus, dat we niet op een reeds geconstrueerd punt mogen terugkomen, voordat alle punten geconstrueerd zijn. Wat betekend het om op een punt terug te komen dat reeds geconstrueerd is? We hebben dan langs de cirkelboog de totale omtrek een aantal keer afgelegd. Voor een n-vlak met n hoekpunten in onze cirkel met omtrek 1 betekend dit dat als we de punten doorlopen langs de cirkelboog op volgorde van constructie de totale afgelegde afstand een geheel getal is dan en slechts dan als we langs n hoekpunten zijn gekomen (of een veelvoud van n). Na n hoekpunten komen we immers altijd op een reeds bestaand hoekpunt uit, aangezien alle construeerbare hoekpunten dan al geconstrueerd zijn. Voor een n-vlak waarbij we met het a-de punt zijn begonnen is de afstand tussen de punten a/n. Als we deze afstand met een natuurlijk getal x vermenigvuldigen mag hier alleen een geheel getal uit komen als

x een veelvoud van n is ofwel a en n hebben geen gemeenschappelijke priemfactoren dus n en a zijn relatief priem. De hoeveelheid hoekpunten die we als eerst kunnen construeren om een oplossing te vinden is dan dus $\phi(n)$. Dat maakt het totale aantal mogelijkheden om een n-vlak te construeren:
$2^m\phi(n)$
Nu is het volgens het lemma noodzakelijk dat dit een macht van 2 is. Noodzakelijk voor de constructie van een n-vlak is dus het volgende:

$$2^m\phi(n) = 2^l, \text{ met } l \text{ een natuurlijk getal.} \tag{7}$$

Aangezien $\phi(n) \geq 1$ is, geldt vergelijking (7) alleen wanneer:

$$\phi(n) = 2^s, \text{ met } s \text{ een natuurlijk getal.} \tag{8}$$

Relatie met Fermat Priemen
Laten we nu n ontbinden in zijn priemfactoren:

$$n = p_1^{q_1} p_2^{q_2} \dots p_r^{q_r} \tag{9}$$

Gebruik makend van de eigenschappen van de functie van Euler:

$$\begin{aligned} \phi(n) &= \phi(p_1^{q_1})\phi(p_2^{q_2})\dots\phi(p_r^{q_r}) \\ &= p_1^{q_1-1}p_2^{q_2-1}\dots p_r^{q_r-1}(p_1-1)(p_2-1)\dots(p_r-1) = 2^s \end{aligned} \tag{10}$$

Wegens uniciteit van priemfactorisatie (Hoofdstelling van de Rekenkunde) moeten alle termen aan de linkerkant van de vergelijking enkel de priemfactor 2 bevatten. Als we dus te maken hebben met een oneven priem moet gelden $q_i = 1$ en $p_i = 2^l + 1$. Bovendien kan $2^l + 1$ alleen priem zijn als er geen oneven getal $m > 1$ is dat l deelt, aangezien $2^{l/m} + 1$ dan $2^l + 1$ deelt. Met andere woorden: l mag geen oneven priemfactoren hebben dus l is een macht van 2. Alle oneven priemen p_i moeten dus van de vorm $2^{2^k} + 1$ zijn: Fermat priemen. Als een n-vlak construeerbaar is moet n dus van de volgende vorm zijn:

$$n = 2^s p_1 \dots p_j, \text{ waarbij } p_1 \text{ tot en met } p_j \text{ verschillende Fermat priemen zijn.} \tag{11}$$

7 Galois

Het gebied van de wiskunde dat uitspraken doet over de construeerbaarheid van punten is bekend als Galois[3] theorie. De theorie werd geboren uit de volgende vraag:

Waarom is het niet mogelijk een formule te vinden voor de wortels van een 5^e-graads polynoom met de bekende algebraische technieken (optellen aftrekken, vermenigvuldigen, delen en het gebruik van meervoudige wortels)?

Vervolgens legde hij de basis voor Galois theorie, een theorie die dus

[3] Galois theorie heeft zijn naam te danken aan de franse wiskundige Évariste Galois (1811-1832. Hij overleed op 20-jarige leeftijd aan duelwonden.)

oorspronkelijk bedoeld was om de nulpunten van polynomen mee te bestuderen. Hoe is Galois theorie dan verbonden met constructie? Dat komt doordat een cirkel voorgesteld kan worden door een vergelijking van de volgende vorm:

$$(x+u)^2 + (y+v)^2 = w^2 \tag{12}$$

waarbij x en y variabelen zijn en u, v en w van te voren bepaalde constanten. Aangezien per definitie alle punten (met uitzondering van het allereerste punt wellicht) een snijpunt zijn van twee cirkels, twee lijnen of een lijn en een cirkel kan dus elk construeerbaar punt (x, y) worden weergegeven door middel van een polynoom. Met behulp van Galois theorie kan dus de vraag of bepaalde punten te construeren zijn met passer en liniaal op deze manier dus vaak beantwoord worden. Wij hebben Galois theorie bestudeerd en hij komt ons vrij complex voor. We zijn vaak niet instaat te volgen wat er precies gebeurd in bewijzen met behulp van deze theorie.

8 Nawoord

Een beroemde vraag die dan nog overblijft is: zijn er oneindig Fermat priemen en dus een oneindig aantal contrueerbare regelmatige veelvlakken? Deze vraag blijft tot op de dag van vandaag onbeantwoord. Wat die vraag moeilijk te onderzoeken maakt is natuurlijk het feit dat de getallen van Fermat razendsnel groter worden. Het zou wellicht een interessante vraag zijn om later verder te onderzoeken en er valt ongetwijfeld grote wiskundige roem mee te behalen.

Hiermee komen we aan het einde van dit verslag en rest ons alleen nog het proces te evalueren. Het merendeel van het werk hebben we gedurende de kerstvakantie gedaan. Hiervoor hadden we eerst een lijstje opgesteld met de punten die we wilden behandelen in het verslag. Deze hebben we verdeeld al naar gelang onze sterke punten. Verder was er nog enige communicatie via msn messenger, waardoor we goed hebben kunnen samen werken. Hierdoor hebben we vrij efficient kunnen werken.

Al met al zijn we vrij tevreden met het uiteindelijk resultaat. We hopen dat het, ondanks dat we uiteindelijk een man minder bleken te hebben, toch een voldoende diepgaand en omvangrijk verslag is geworden. Wij vonden het in ieder geval een interessant onderwerp om ons in te verdiepen.