Regelmatige Veelvlakken

Tibor Bremer - Tim Klaase - Erwin Westra

Januari 2010

Index

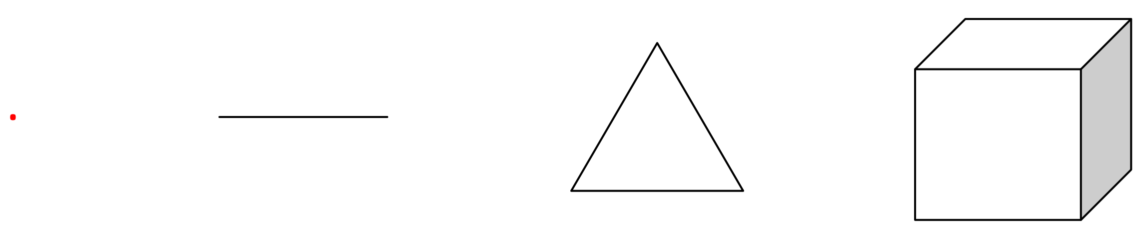
Voorwoord

Regelmatige veelvlakken zijn wiskundige figuren die de wiskundigen al eeuwenbezig houden. De Grieken waren één van de eersten (waarvan geschreven bewijs van bewaard is gebleven) die deze figuren onderzochten. Het is dan ook dat de Platonische veelvlakken naar Plato, een beroemde Griekse filosoof en wiskundige, zijn vernoemd. In dit werk gaan we het onder andere over deze Platonische veelvlakken hebben. Later ook gaan we het hebben over figuren in hogere dimensies dan 3. Maar eerst volgt er uitleg over termen die vaak voorkomen in dit wiskundig gebied.

Polytoop

Een polytoop is een term om figuren in een dimensie te beschrijven. Zo staat de 2-polytoop voor een 2-dimensionaal veelhoek, denk aan: de driehoek, vierhoek, vijfhoek enzovoorts. Hieronder volgt een lijst van een aantal polytopen gerangschikt naar dimensie met daarin de voorkomende figuren en enkele voorbeelden.

- De 0-polytoop is een knooppunt tussen twee lijnstukken in. Het wordt ook wel een vertex genoemd of simpelweg een knoop. Je kunt het je voorstellen als een punt in de ruimte of als het hoekpunt tussen twee lijnen in.
- De 1-polytoop is een lijnstuk. Het is de verbindende lijn tussen twee knooppunten in. Een lijnstuk wordt ook wel een ribbe genoemd als het twee knooppunten van een veelhoek of veelvlak verbindt.
- De 2-polytoop is een veelhoek. Deze wordt ook wel een polygoon genoemd. Waar twee 0-polytopen een lijnstuk kunnen beschrijven, beschrijven minimaal drie 0-polytopen en drie 1-polytopen een veelvlak, namelijk de driehoek. Voeg je meer 0-polytopen en 1-polytopen toe, wat betekent meer hoeken en zijden toe, dan krijg je de vierhoek, vijfhoek enzovoorts.
- De 3-polytoop is een veelvlak. Het wordt ook wel een polyeder of polyhedron genoemd, waarbij de polyhedron algemener voorkomt. Een veelvlak is een driedimensionaal object bestaande uit veelhoeken. Een goed voorbeeld van 3-polytopen zijn de kubus en het pyramide, welke respectievelijk bestaan uit zes vierkanten en vier driehoeken.



Van links naar rechts:

Een 0-polytoop (punt), een 1-polytoop (lijnstuk), een 2-polytoop (driehoek), een 3-polytoop (kubus, weergegeven in 2 dimensies)

Natuurlijk zijn er polytopen in hogere dimensies ook mogelijk, maar het is vaak moeilijk om daar een goede voorstelling van te maken. Hoewel het logisch is dat, aangezien iedere polytoop uit een bepaalde dimensie is opgebouwd uit polytopen met 1 dimensie minder, bijvoorbeeld een 4-polytoop zal bestaan uit allemaal veelvlakken (3-polytopen).

Naamgeving

De etymologie van de term polytoop is Grieks. Waar ‘poly’ voor veel staat en ‘toop’ een afleiding voor vlak/ruimte is. Veel figuren worden dan ook genoemd naar de hoeveelheid vlakken die ze bezitten met de uitgan ‘-eder’ afkomstig van polyeder. Het tellen van deze vlakken gebeurd ook met griekse cijfers.

Vooral van belang zijn de volgende namen van veelvlakken (bestaande uit regelmatige veelhoeken):

- Tetraëder – Bestaande uit 4 driehoeken (pyramide met een driehoekige basis)
- Hexaëder – Bestaande uit 6 vierhoeken (kubus)
- Octaëder – Bestaande uit 8 driehoeken (2 pyramides met een vierhoekige basis aan elkaar)
- Dodecaëder – Bestaande uit 12 vijfhoeken.
- Icosaëder – Bestaande uit 20 driehoeken,

Deze vijf veelvlakken zijn namelijk de Platonische veelvlakken. Later zal hier meer over komen.

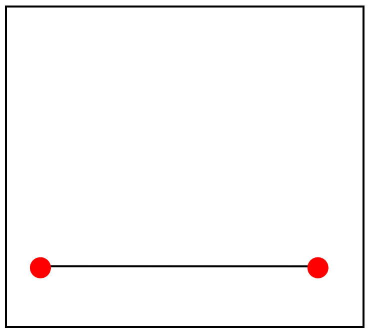
Convex en concaaf

Convex is een term om een bepaalde eigenschap van een figuur aan te duiden. Als je een figuur voorstelt als een verzameling punten in de ruimte, dan is een figuur convex als het volgende geldt:

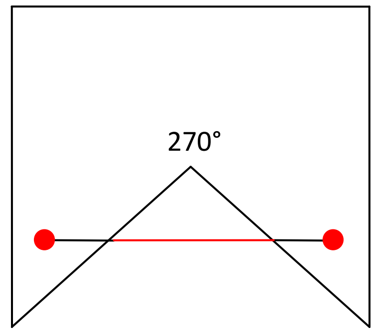
Iedere lijn tussen twee punten die onderdeel zijn van het figuur ligt in zijn geheel ook binnen het figuur.

Dit betekent dat ieder figuur welke niet hol is of op een andere manier naar binnen toe gevormd is een convex figuur is. Voor een veelhoek en ieder figuur dat uit veelhoeken is opgebouwd betekent dit dat geen enkele hoek groter mag zijn dan 180° (van binnen het figuur gemeten). Een driehoek is dus altijd een convex figuur, want de som van de hoeken van de driehoek is 180° en kan dus nooit een enkele hoek bevatten groter dan de som.

Een figuur dat niet-convex is wordt concaaf genoemd.



Een convex vierhoek



Een concaaf vijfhoek
(De lijn valt gedeeltelijk buiten het figuur terwijl de knooppunten wel binnen het figuur liggen)

Regelmatigheid

Regelmatigheid zal worden besproken in twee stukken, voor dimensie 2 en dimensie 3.

Regelmatigheid in 2 dimensies

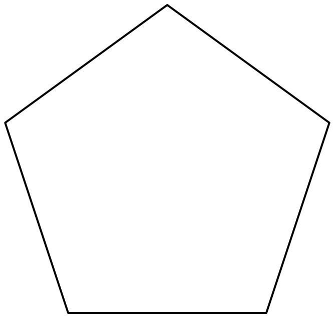
Regelmatigheid in 2 dimensies betekent dat het gaat over de veelhoeken. Een veelhoek is regelmatig als alle zijden even lang zijn en alle hoeken even groot. Iedere regelmatige veelhoek is convex. Dit is af te leiden van de formule om de hoek in graden uit te rekenen van een regelmatige veelhoek:

$$x = 180° - \frac{360°}{n}, \quad n \geq 3$$

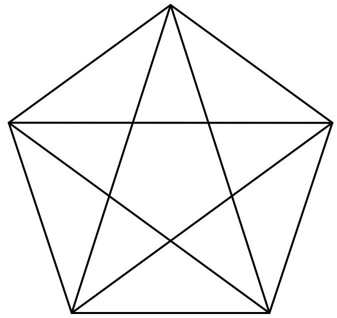
Waarbij n het aantal hoeken is (onder de voorwaarde dat er minimaal drie hoeken zijn, anders kun je geen sluitende 2-dimensionaal figuur vormen) en x de hoek in graden van iedere aparte hoek.

Nu kunnen we hieruit zien dat de hoek x nooit groter kan worden dan 180°. Omdat minstens één hoek in een veelhoek groter moet zijn dan 180° om concaaf te zijn, is een regelmatige veelhoek altijd convex.

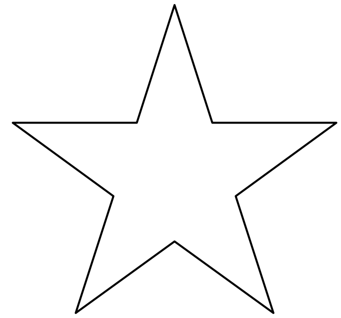
Verder zijn er nog de regelmatige sterveelhoeken (niet te verwarren met een regelmatige veelhoek) of ook wel een stervormige veelhoek genoemd. Net als de regelmatige veelhoek is deze ook veel onderzocht. Een stervormige veelhoek is regelmatig als iedere zijde evenlang is en iedere naar buiten wijzende hoek (de punten van de ster) even groot zijn. Een stervormige veelhoek is te maken door een veelhoek te nemen en verbindingslijnen te maken tussen niet aanliggende hoeken.



Een regelmatige pentagon
(5-hoek, convex)



Een regelmatige pentagram geconstrueerd in een regelmatige pentagon.



Een regelmatige pentagram
(concaaf)

Omdat een regelmatige stervormige veelhoek hoeken bevat die groter zijn dan 180° is deze altijd concaaf. Inderdaad, het volgt dat iedere stervormige veelhoek concaaf is, omdat iedere stervormige veelhoek hoeken van meer dan 180° bevat.

Regelmatigheid in 3 dimensies

Regelmatig

Bij een 3-dimensionaal figuur zijn de eisen om regelmatig te zijn niet heel erg verschillend met de eisen voor een 2-dimensionaal figuur. Waar een regelmatige 2-dimensionaal figuur gelijke zijden en hoeken als eigenschap heeft, heeft een regelmatige 3-dimensionaal figuur als eigenschap dat het uit allemaal congruente regelmatige veelvlakken bestaat welke een ruimte volledig afsluiten. Dat wil zeggen, het bestaat uit één soort regelmatige veelvlak met gelijke afmetingen die samen een “dicht” figuur maken. Een paar goede voorbeelden zijn het viervlak en het zesvlak, ookwel genoemd de pyramide (vier driehoeken) en de kubus (zes vierkanten). Een kenmerk van het regelmatige veelvlak is dat bij iedere hoekpunt evenveel vlakken (veelhoeken) samenkomen. Alle regelmatige veelvlakken zijn convex.

Er zijn maar vijf regelmatige veelvlakken (in R^3, oftewel 3-D) mogelijk, deze worden de *Platonische veelvlakken* genoemd. Er zijn geen regelmatige veelvlakken te maken met regelmatige sterveelhoeken.

Halfregelmatig

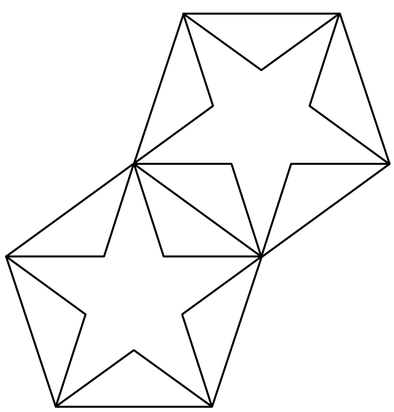
Naast de regelmatige veelvlakken heb je ook nog de halfregelmatige veelvlakken. Deze veelvlakken bestaan uit twee of meer regelmatige veelhoeken. De regelmatige veelvlakken zijn onder te verdelen in drie groepen:

- Prisma's – Twee regelmatige veelhoeken verbonden met elkaar door een hoeveelheid regelmatige vierhoeken die gelijk staat aan het aantal hoeken van de veelhoek.
- Antiprisma's – Twee regelmatige veelhoeken een slag gedraaid ten opzichte van elkaar en verbonden met elkaar door een hoeveelheid regelmatige driehoeken die gelijk staat aan 2 maal het aantal hoeken van de veel hoek.
- Archimedische lichamen – Dertien overige veelvlakken die niet de constructie volgen van een prisma of antiprisma maar bestaan uit drie verschillende regelmatige veelhoeken. Twee van de dertien Archimedische lichamen bestaan maar uit twee verschillende veelhoeken maar hebben toch een andere structuur als een prisma of antiprisma. Deze laatste twee behoren in de Engelstalige wiskunde ook tot de *quasi-regular* (quasi-regelmatige).

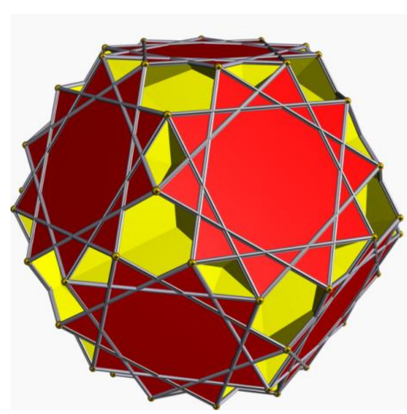
Alle halfregelmatige veelvlakken zijn convex.

Quasi-regelmatig

Een quasi-regelmatig veelvlak is een veelvlak met precies twee verschillende soorten regelmatige veelhoeken, hieronder vallen ook stervormige regelmatige veelhoeken. Als gevolg hiervan is een quasi-regelmatige veelhoek niet altijd convex. Stel je maar voor als je een dodecaëder uit pentagrammen probeert op te bouwen, dus:



Waarin je kunt zien dat het gebied tussen twee sterveelhoeken met een andere regelmatige veelhoek moet gevuld worden. Door de buiging staan deze naar binnen en kun je dus twee punten vinden waarbij de verbindende lijn van punten niet allemaal binnen het figuur liggen.



Er zijn maar twee convex quasi-regelmatige veelvlakken. Dit zijn de kuboctaëder en de icosidodecaëder, welke behoren tot de Archimedische lichamen. Nu we deze termen hebben behandeld kunnen we ingaan op de Platonische veelvlakken.

De Platonische Veelvlakken

Er is een stelling die zegt dat er op gelijkvormigheid na, slechts vijf regelmatige convexe veelvlakken, ook wel platonische veelvlakken genoemd, in R^3 zijn. Voordat we dit kunnen bewijzen is er nog wel wat voorkennis vereist.

Schläfli-symbool

Platonische veelvlakken kunnen worden beschreven met behulp van Schläfli-symbolen. Voor platonische veelvlakken bestaat het Schläfli-symbool uit twee getallen. Het eerste getal is het hoeken dat een zijvlak heeft en het tweede getal is het aantal ribben dat in een hoekpunt samenkomt. Een andere manier om een veelvlak te beschrijven is door het aantal hoekpunten, ribben en zijvlakken te geven. Deze laatste notatie wordt ook gebruikt in de formule van Euler: H+Z=R+2. De Schläfli-symbolen kunnen worden omgezet in de tweede notatie met de formules:
(n, k) is het Schläfli-symbool

- $R = 2kn/(2n+2k–kn)$
- $H = 2R/k$
- $Z = 2R/n$

Om te bewijzen dat deze formules kloppen berekenen we eerst n en c uit H, R en Z en combineren dat dan met de formule van Euler.

Bewijs voor: $c= 2R/H$

- Iedere ribbe verbindt twee hoekpunten met elkaar.
- Als we iedere ribbe in tweeën delen dan zit aan een ribbe nog maar één hoekpunt vast.
- Nu hebben we twee keer zoveel ribben (2R).
- Aan een hoekpunt zitten meer ribben vast.
- Nu delen we het aantal ribben dat we hebben door het aantal hoekpunten.
- Dit levert het aantal ribben op dat samenkomt in een hoekpunt.

Bewijs voor: $n=2R/Z$

- Iedere ribbe wordt gedeeld door 2 zijvlakken.
- Dus als we de zijvlakken allemaal los zouden maken hebben we opeens twee keer zoveel ribben (2R).
- Door regelmatigheid weten dat een zijvlak meerdere ribben heeft en dat alle zijvlakken evenveel ribben hebben.
- Je deelt het totaal aantal ribben door het aantal zijvlakken.
- Dit levert het aantal ribben dat een zijvlak heeft.
- Omdat een veelhoek altijd evenveel ribben als hoeken heeft hebben we nu n berekend.

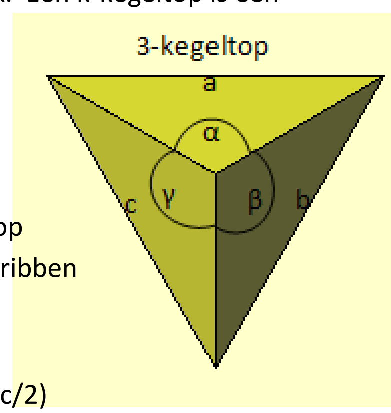
Bewijs voor: R=2cn/(2n+2k–kn)

- Vul H=2R/k en Z=2R/n in, in de formule van Euler.
- Dit levert: 2R/k + 2R/n = R+2
- Vermenigvuldig alles met cn om de breuken weg te krijgen.
- Dit levert: 2Rn + 2Rk = Rkn +2kn
- Breng Rcn naar rechts.
- Dit geeft: 2Rn +2Rk – Rkn = 2kn
- Haal R buiten de haakjes:
- R(2n+2k–kn)=2kn
- Deel beide kanten door (2n+2k–kn) om de formule te verkrijgen.

Zowel de Schläfli-symbolen als H,R,Z zeggen alleen maar iets over de vorm van een figuur, niks over de grootte. Oftewel alle figuren die dezelfde vorm hebben, hebben hetzelfde Schläfli-symbool. Dus alle gelijkvormige figuren hebben dezelfde Schläfli-symbolen. Hiermee is ook bewezen dat als twee figuren hetzelfde Schläfli-symbool hebben dan zijn ze gelijkvormig.

Kegeltoppen

Een kegeltop uit een veelhoek die in één vlak liggen en een punt dat niet in het vlak ligt, dit is het toppunt van de kegeltop. De kegeltop is bestaat uit de driehoeken die gevormd worden door één ribbe van de veelhoek en de lijnen die de hoeken die aan de ribbe zitten en de toppunt verbinden. Het aantal zijden van de veelhoek is ook het aantal ribben dat samenkomt in de tophoek. Een k-kegeltop is een kegeltop waar k ribben samenkomen in de tophoek.



Er zijn twee stellingen met betrekking tot kegeltoppen die wel handig zijn:

1. Van een 3-kegeltop zijn de tophoeken van de zijvlakken α,β en γ, dan geldt α < β +γ
    - Maak een driehoek zodanig dat de hoeken van die driehoek op afstand 1 van de toppunt zitten en gepositioneerd zijn op de ribben van de kegeltop.
    - Noem de ribben van de driehoek a,b en c.
    - Nu geldt dat α=2*arcsin(a/2), β=2*arcsin(b/2) en γ=2*arcsin(c/2)
    - Uit de driehoeksongelijkheid (a<b+c) en het feit dat arcsin altijd stijgend is op het interval (0,π) volgt dat 2*arcsin(a/2)< 2*arcsin((b+c)/2)
    - Dus α < β +γ
2. Van een convexe k-kegeltop is de som de tophoeken van de zijvlakken kleiner dan 2π
    - Dit kan op 2 manieren:

    i. Beredeneerd:
        - Maak een cirkel.
        - Als je hier een kegel van probeert te maken zal een gedeelte van de cirkel moeten overlappen.

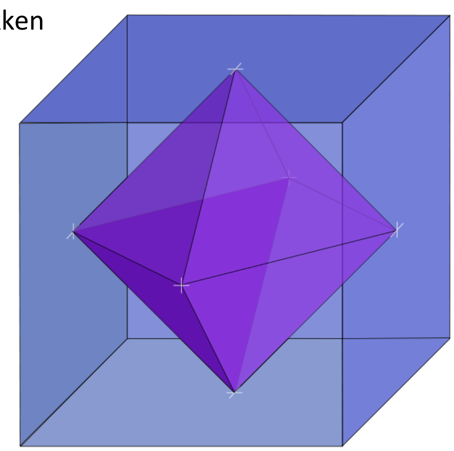
- Wil je dat het niet overlapt dan moet je een taartpunt uit de cirkel halen.
- De hoek van de cirkelboog die je overhoud is de som van de tophoeken in een kegeltop.
- Deze som is dus altijd kleiner dan 2π

ii. Wiskundig

- Notatie uitleg:
  - K staat voor het aantal zijvlakken van de kegeltop.
  - Het grondvlak heeft k hoeken.
  - Een hoek van het grondvlak noemen we α
  - De i in α_i staat voor welke hoek we bedoelen
  - i loopt van 1 t/m k.
  - De hoeken van het grondvlak zijn dus $\alpha_1,\alpha_2\ldots\alpha_k$
  - Een zelfde verhaal geldt voor β, γ en ϕ
  - β is steeds de rechter onderhoek van het zijvlak.
  - als je het i^{de} zijvlak bekijkt dan zijn de hoeken van dat zijvlak ϕ, γ_i en β_{i+1}
  - Hierdoor liggen α_i, β_i en γ_i rondom hetzelfde hoekpunt van het grondvlak.
- Noem de hoeken het grondvlak van de kegeltop α_i
- De som van alle α_i (dit wordt genoteerd als $\sum \alpha_i$) is $(k-2)\,\pi$
- Noem de tophoeken van de zijvlakken ϕ
- Noem de andere twee hoeken van de zijvlakken β_{i+1} en γ_i ($\beta_{k+1}=\beta_1$)
- Nu vormen α_i, β_i en γ_i de tophoeken van een kegeltop met toppunt de i^{de} hoek van het grondvlak.
- De som van de hoeken van een zijvlak ($\phi+\beta_{i+1}+\gamma_i$) is π
- Dus $\sum \varphi_i+\sum \beta_i+\sum \gamma_i=k\pi$
- Dus $\sum \varphi_i=k\pi-\sum \beta_i-\sum \gamma_i$
- Uit de eerste stelling volgt nu dat dit kleiner is dan $k\pi - \sum \alpha_i = 2\pi$
- Dus $\sum \varphi_i<2\pi$, stelling bewezen.

Dualiteit

Uit regelmatige veelvlakken kun je nieuwe/andere regelmatige veelvlakken construeren. Dit principe heet dualiteit omdat als je het twee keer toepast je een gelijkvormig figuur terugkrijgt met het eerste figuur. Het duale veelvlak van een veelvlak is het veelvlak dat je verkrijgt uit het oorspronkelijke veelvlak door dualiteit.



Je verkrijgt het duale veelvlak op de volgende manier uit een regelmatig veelvlak:

- Pak de zwaartepunten van de zijvlakken, dit worden de hoekpunten van het duale veelvlak.
- Verbind de zwaartepunten van aangrenzende veelhoeken met elkaar, dit zijn de ribben van het duale veelvlak.
- Haal de oude figuur weg en je houd het duale veelvlak over.

Wat er eigenlijk gebeurd is dat de Schläfli-getallen omgedraaid worden:

- In het duale veelvlak komen precies zoveel ribben samen in een hoekpunt als het aantal ribben van een zijvlak van het oorspronkelijke veelvlak.
    - Een hoekpunt (zwaartepunt) wordt verbonden met ieder zwaartepunt van een aangrenzend veelhoek.
    - Een veelhoek heeft precies zoveel aangrenzende veelhoeken als het ribben heeft.
    - Dus het eerste Schläfli-getal van het oorspronkelijke veelvlak is het tweede Schläfli-getal van het duale veelvlak.
- In het duale veelvlak komen heeft een zijvlak evenveel ribben als er ribben samenkomen in een hoekpunt van het oorspronkelijke veelvlak.
    - Maak een kegeltop met een hoekpunt van het oorspronkelijke veelvlak als tophoek.
    - Verbind deze tophoek met de zwaartepunten van de zijvlakken waar deze tophoek deel van maakt.
    - De ribben die de zwaartepunten verdelen vormen de ribben van een zijvlak van het duale veelvlak.
    - Omdat het duale veelvlak evenveel hoekpunten heef t als er zijvlakken samenkomen in een hoek van het oorspronkelijke veelvlak heeft is hiermee bewezen dat de door dualiteit de Schläfli-getallen omdraaien.

Nu zien we ook meteen dat als je het duale veelvlak van het duale veelvlak neemt je een veelvlak gelijkvormig aan het oorspronkelijke veelvlak krijgt.

Bewijs voor hoogstens vijf platonische veelvlakken

Een regelmatig veelvlak heeft zijvlakken die minimaal 3 hoekpunten hebben (met 2 hoekpunten zou het een lijnstuk zijn en geen veelhoek) en er komen minimaal 3 ribben samen in een hoekpunt (met slechts 2 ribben samenkomend in een hoekpunt kunnen alleen veelhoeken gevormd worden).

Bewijs via meetkunde

De zijvlakken van een regelmatig veelvlak is een regelmatige veelhoek. Dus alle hoeken zijn even groot. De grootte van deze hoek geven we aan met ϕen kan berekent worden door $(n-2)*\pi/n$.

- Als n=3 dan ϕ=$\frac{1}{3}\pi$. Uit kegeltop stelling 2 volgt nu dat k maximaal 5 kan zijn. Je kan dus de volgende Schläfli-symbolen hebben: (3,3), (3,4) en (3,5).
- Als n=4 dan ϕ=$\frac{1}{2}\pi$. Uit kegeltop stelling 2 volgt nu dat k maximaal 3 kan zijn. Je kan dus alleen het Schläfli-symbool (4,3) krijgen.
- Als n=5 dan ϕ=$\frac{3}{5}\pi$. Uit kegeltop stelling 2 volgt nu dat k maximaal 3 kan zijn. Je kan dus alleen het Schläfli-symbool (5,3) krijgen.
- Als n≥6 dan is ϕminimaal $\frac{2}{3}\pi$. Uit kegeltop stelling 2 volgt nu dat k maximaal 2 kan zijn. Je kan dus geen regelmatig veelvlak met n≥6 en k≥3 vormen.
- De mogelijke regelmatige veelvlakken zijn dus (3,3), (3,4), (4,3), (3,5) en (5,3).

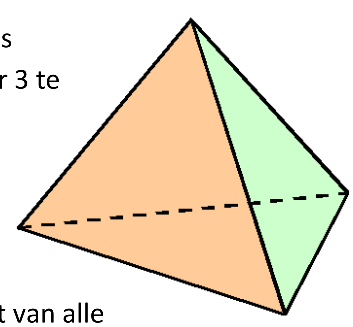
Bewijs via de formule van Euler

We pakken de formules die we bij het schläfli-getal bewezen hebben en krijgen: $\frac{2R}{k} + \frac{2R}{n} = R + 2$. Nu delen we alles door 2R en krijgen: $\frac{1}{k} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{R}$. Omdat R positief moet zijn kunnen we concluderen dat $\frac{1}{k} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$. Hieruit halen we weer dat $\frac{1}{k} > \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$.

- Als n=3 dan geldt $\frac{1}{k} > \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Nu is te zien dat k maximaal 5 kan zijn, dus we krijgen weer (3,3), (3,4) en (3,5) als Schläfli-symbolen.
- Als n=4 dan geldt $\frac{1}{k} > \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. Nu is te zien dat k maximaal 3 kan zijn, dus we krijgen (4,3) als Schläfli-symbool.
- Als n=5 dan geldt $\frac{1}{k} > \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$. Nu is te zien dat k weer maximaal 3 kan zijn, dus (5,3) is het enige Schläfli-symbool mogelijk.
- Als n=6 dan geldt $\frac{1}{k} > \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$. Nu is te zien dat k maximaal 2 kan zijn. Dit mag niet aangezien k minimaal 3 moest zijn dus er is geen regelmatig veelvlak mogelijk met n≥6 en k≥3.
- De mogelijke regelmatige veelvlakken zijn dus weer (3,3), (3,4), (4,3), (3,5) en (5,3).

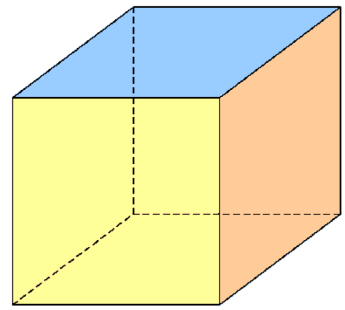
Bewijs voor precies vijf platonische veelvlakken

Het bewijs dat de vijf mogelijke platonische veelvlakken ook bestaan is makkelijk: maak ze gewoon. Het is zelfs nog simpeler: je hoeft er maar 3 te maken, de andere 2 verkrijg je via dualiteit.

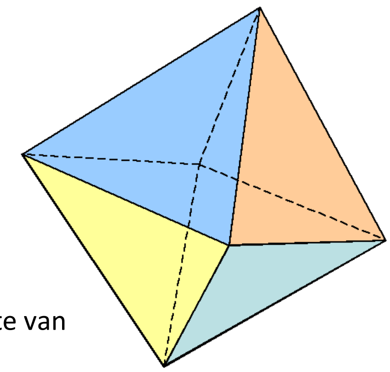


- (3,3) tetraëder
    - Maak een gelijkzijdige driehoek met ribben van lengte 1.
    - Neem een punt boven de driehoek die op lengte 1 ligt van alle

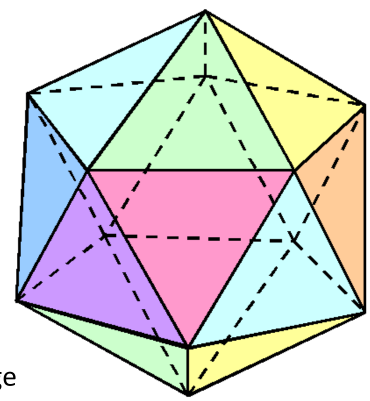
hoeken van de driehoek.
    - Verbind dat punt met de hoeken van de driehoek.
    - Je hebt een tetraëder.

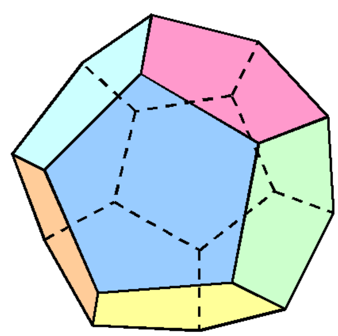


- (3,4) octaëder en (4,3) kubus
    - We maken een kubus:
    - Maak een vierkant met ribben van lengte 1.
    - Maak hiervan een prisma zodanig dat de hoogte ook 1 is.
    - Je hebt een kubus.
    - Via dualiteit kunnen we de octaëder maken.



- (3,5) icosaëder en (5,3) dodecaëder
    - Maak 2 regelmatige vijfhoeken met ribben van lengte 1.
    - Plaats ze parallel boven elkaar zodanig dat de lijn door de middelpunten van de vijfhoeken loodrecht op de vijfhoeken staat.
    - Zorg dat de ene vijfhoek $\frac{1}{10}$ slag gedraaid is ten opzichte van de andere.
    - Verbind de hoekpunten van de ene vijfhoek met de 2 dichtstbijzijnde hoekpunten van de andere vijfhoek.
    - Zorg dat de afstand tussen de vijfhoeken precies zo is zodat alle ribben lengte 1 hebben.
    - De zijvlakken van dit antiprisma zijn nu regelmatige driehoeken met ribben van lengte 1.
    - Kies nu een punt boven de bovenste vijfhoek op afstand 1 van elk hoekpunt van de vijfhoek.
    - Verbind dat punt met de hoeken van de vijfpunt.
    - Deze kegeltop die we nu hebben bestaat uit vijf regelmatige driehoeken met ribben van lengte 1.
    - Kies nu zo'n zelfde punt onder de onderste veelhoek.
    - We hebben nu een icosaëder.
    - Via dualiteit kunnen we de dodecaëder maken.





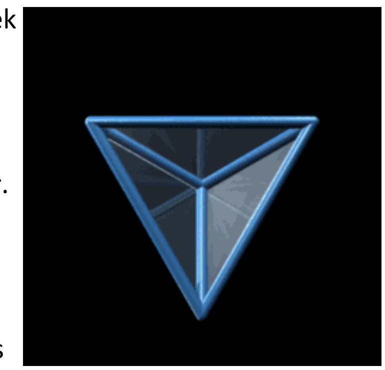
En hiermee zijn we aangekomen op de uiteindelijk vijf Platonische veelvlakken. Nu we deze behandeld hebben kunnen we overgaan naar hogere dimensies en welke figuren je daar nog (wiskundig) tegenkomt.

Polytopen in hogere dimensies: de vierde dimensie

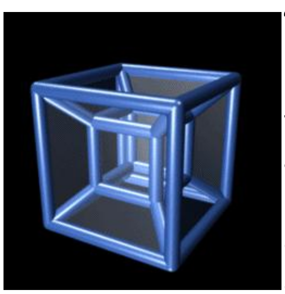
In de vierde dimensie zijn er 6 regelmatige polytopen. Deze 4-polytopen zijn:

- 4-simplex
- 4-hyperkubus
- 4-bipiramide
- 24 cel
- 120 cel
- 600 cel

4-simplex



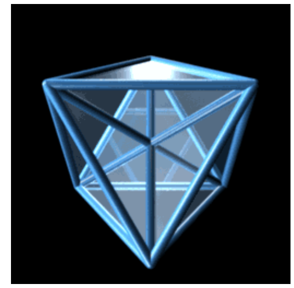
De 4-simplex is de vierdimensionale versie van een piramide met een driehoek als grondvlak (tetraëder). Hij kan opgebouwd worden door alle hoekpunten van een tetraëder te verbinden met een vierde punt. De 4-symplex bevat 5 tetraëders, elke combinatie van vier punten uit de 4-simplex vormt namelijk een tetraëder. De driedimensionale analogie van de 4-simplex is de tetraëder. Hiernaast zie je een 4-simplex die afgebeeld word in de derde dimensie (die dan weer word afgebeeld op de tweede dimensie van dit computerscherm/blaadje), terwijl hij draait in de vierdimensionale ruimte. Doordat hij beweegt in de vierdimensionale ruimte (een ruimte die moeilijk is voor te stellen voor ons driedimensionale mensen) lijkt het alsof de zijden door elkaar gaan, alsof hij vervormd en het lijkt alsof de 5 tetraëders elkaar kruisen. In de vierde dimensie is dit allemaal niet aan de hand, in de vierde dimensie draait hij alleen rond.



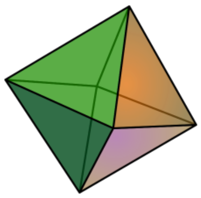
4-hyperkubus

De 4-hyperkubus is de vierdimensionale versie van de kubus. Hij kan opgebouwd worden door van 2 kubussen de hoekpunten te verbinden. De 4-hyperkubus bevat 8 kubussen. De driedimensionale analogie van de 4-hyperkubus is de kubus. Het plaatje hiernaast is (net zoals bij de 4-simplex) een plaatje van de 4-hyperkubus die afgebeeld word op de derde dimensie (en die weer op de tweede) terwijl hij draait in de vierdimensionale ruimte. Net zoals bij het plaatje van de 4-simplex lijkt het alsof het figuur vervormd en de lengtes van zijden veranderen. Dat komt doordat een vierdimensionaal figuur word weergegeven in de vierde dimensie.

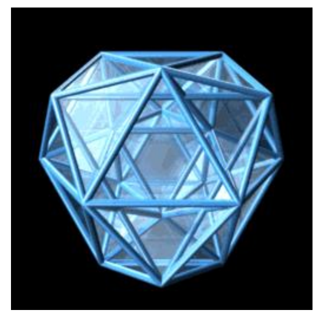
4-bipiramide



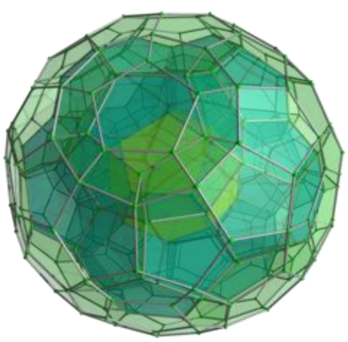
De 4-bipiramide kan gecreëerd worden door de punten waarvan 1 coordinaat plus of min 1 is en de andere coordinaten 0 zijn. De 4-bipiramide bevat 16 tetraëders. De driedimensionale analogie van de 4-bipiramide is de octaëder (zie plaatje hieronder).



24 cel



De 24 cel is uniek in dat hij alleen bestaat in de vierde dimensie en geen driedimensionale versie heeft zoals de anderen die hebben. De 24 cel bevat 24 octaëders(zie plaatje hierboven).

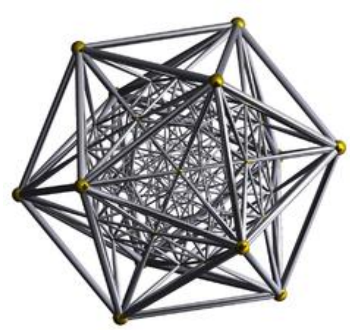


120 cel

De 120 cel bevat 120 dodecaëders. De driedimensionale analogie van de 120 cel is de dodecaëder.

600 cel

De 600 cel bevat 600 tetraëders. De driedimensionale analogie van de 600 cel is de icosaëder.



Polytopen in hogere dimensies: de vijfde dimensie en hoger

In de dimensies vijf en hoger heeft elke n'de dimensie nog maar drie regelmatige n-polytopen:

- n-simplex
- n-hyperkubus
- n-bipiramide

De n-simplex kan gemaakt worden door de simplex van 1 dimensie lager uit te breiden met een punt dat evenver is van alle andere punten en zodat de afstand tussen elk paar punten evengroot is. Verbind dit nieuwe punt met alle oude punten.

De n-hyperkubus kan gemaakt worden door alle punten te nemen waarvan alle coordinaten of plus of min 1 is en de punten te verbinden die 1 coordinaat verschillend hebben.

De n-bipiramide bestaat uit alle punten waarvan 1 coordinaat plus of min 1 is en de andere coordinaten 0.

Dit kan doorgaan voor alle volgende dimensies. Waar het in de 4^{e} dimensie nog wel mogelijk is om concaaf regelmatige polytopen te maken (10 in totaal, door middel van sterpolytopen) is het in dimensie 5 en hoger niet meer mogelijk om concaaf regelmatige polytopen te maken. [i]

[i] Afbeeldingen gebruikt zijn van www.wikipedia.org