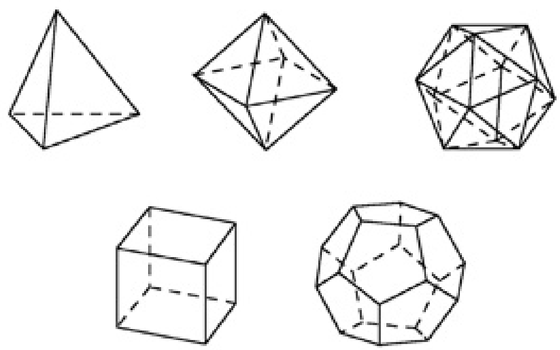
Veelvlakken

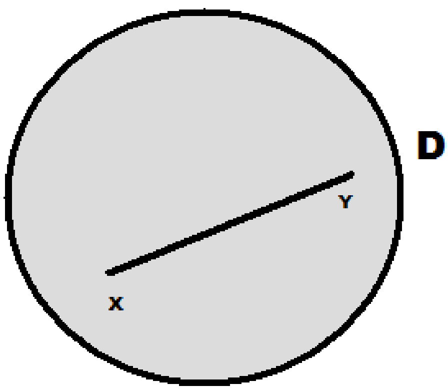
Veelvlakken komen in het leven veel voor. Je kunt ze zien in de natuur, in gebouwen, in de wiskunde en nog een hele hoop andere toepassingen. Wij zullen wat dieper ingaan op de wiskundige kant van veelvlakken en hoe deze worden gebruikt in de bouw van structuren, met name hoe ze kunnen worden gebruikt om stevigheid te garanderen en de kans op instorten zoveel mogelijk verkleinen.

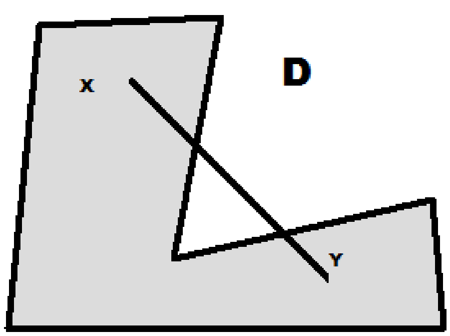


Een veelvlak in $\mathbb{R}^3$ kan gedefiniëerd worden als een begrensd, gesloten deel van deze ruimte zodanig dat de rand bestaat uit een eindig aantal veelhoeken. Wij zullen echter een definitie geven die wat meer gebruik maakt van wiskunde. We beginnen met het in plaats van hebben over een lijnstuk in $\mathbb{R}^1$, een veelhoek in $\mathbb{R}^2$, een veelvlak in $\mathbb{R}^3$, ... etc., het te hebben over een 1-polytoop (een lijnstuk), een 2-polytoop (een veelhoek), een 3-polytoop (een veelvlak), ... etc.

Convex

Een verzameling D $\subset \mathbb{R}^n$ noemt men *convex* als voor alle lijnstukken $\bar{xy}$ waarvan $x, y \in D$ geldt dat deze in hun geheel tot D behoren. In andere woorden dus; dat er geen twee punten x en y te vinden zijn zodat als je een rechte lijn tussen die punten trekt de lijn buiten het veelvlak loopt. De eerste verzameling D is dus een convexe verzameling, de tweede verzamling D echter niet.





Halfruimten

De deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ gegeven door;

$$W = x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b$$

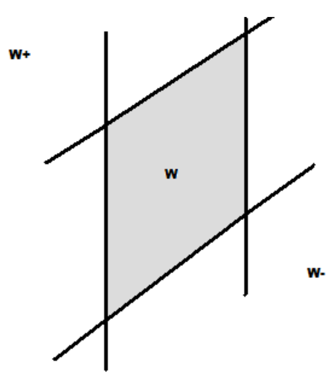
Waarbij $n \in \mathbf{Z} > 0, ena_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}^n$ niet alle gelijk aan nul, en $b \in \mathbb{R}$. Wordt een *hyperoppervlak* in $\mathbb{R}^n$ genoemd. Voor het gemak stellen we dat $\emptyset \subset \mathbb{R}^0 = 0$
De verzamelingen;

$$W^+ = x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} a_i x_i > b$$

$$W^- = x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} a_i x_i < b$$

Worden de *halfruimten* van W genoemd. Zo wordt in $\mathbb{R}^2$ het hyperoppervlak W gegeven door een lijn en zijn de halfruimten de ruimten die aan beide kanten van deze lijn staan.

En in $\mathbb{R}^3$ wordt het hyperoppervlak W gegeven door een vlak en zijn de halfruimten de ruimten die aan beide kanten van dit vlak staan.



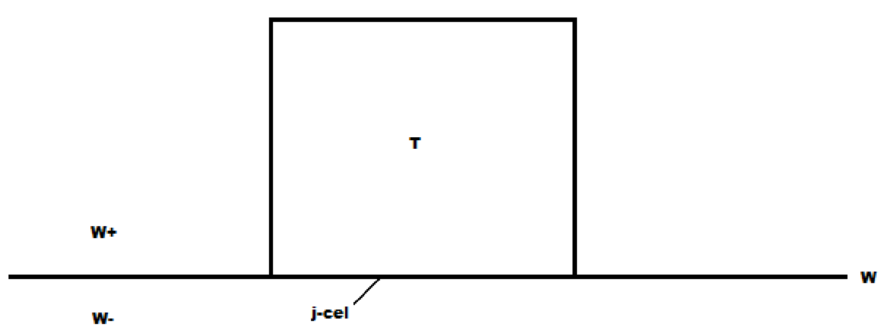
J-Cellen

Zij gegeven $n \in \mathbb{N}$ en de punten $P_1, \cdots, P_m \in \mathbb{R}^n$, niet alle gelegen in een hypervlak W. De kleinste convexe verzameling T die deze punten bevat heet een *convex-n-polytoop.* Een convex 3-polytoop $T \subset \mathbb{R}^3$ heet een convex veelvlak en zo heet een convex 2-polytoop $T \subset \mathbb{R}^2$ een convex veelhoek.

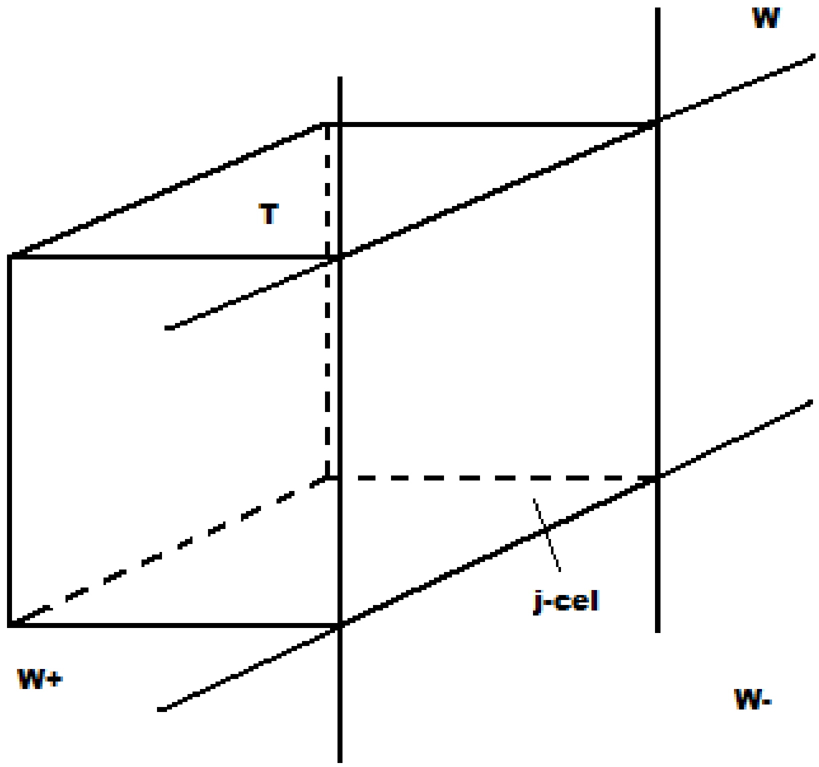
Convexe polytopen zijn begrensd. Zo is een convex 1-polytoop een lijnstuk dat wordt begrensd door de twee hoekpunten die hij verbind. Een convex 2-polytoop wordt begrensd door de lijnen die hem opspannen. En een convex 3-polytoop wordt begrensd door een eindige hoeveelheid veelhoeken (de zijvlakken).

In de wiskunde wordt echter niet gesproken van een "hoekpunt, ribbe, zijvlak" van een veelvlak in $\mathbb{R}^3$, maar van de *cellen* van een polytoop. Neem aan dat er een convex n-polytoop $T \subset \mathbb{R}^n$ en een convex j-polytoop $Y \subset T$ is, zodat er een hypervlak $W \subset \mathbb{R}^n$ is zodat $Y = W \cap T$ en zodat een va de halfruimten van W geen punten van T bevat. T ligt in zijn geheel aan een kant van W. In dit geval wordt Y een cel van T genoemd, namelijk een j-cel. Een $(n-1)$-cel van een n-polytoop wordt een zijcel genoemd.

Een voorbeeld hiervan in $\mathbb{R}^2$ is hieronder te zien. Het hypervlak W wordt gegeven door een lijnstuk. De j-cel wordt gegeven door de zijlijn van het T, waar deze een subset is van het hypervlak W. En het T valt volledig in de halfruimte W^+ waardoor de n-polytoop T zich inderdaad aan een kant van het hypervlak bevind.



Nog een voorbeeld in $\mathbb{R}^3$ is hieronder weergegeven. Hier wordt het hypervlak W gegeven door een vlak. De j-cel is het zijvlak van T en eveneens een subset van het hypervlak W. Eveneens valt T wederom volledig in de halfruimte W^+.



Simplex en Hyperkubus

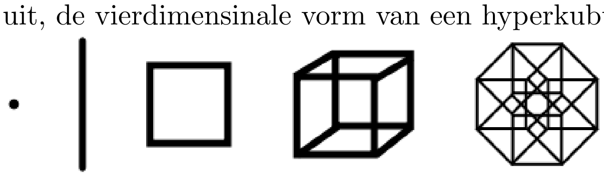
Er zijn drie polytopen die in elke dimensie regelmatig zijn, namelijk de n-simplex, de n-hyperkubus en de n-dipiramide.

De n-simplex is de polytoop die op elke aanwezige dimensionale as op hoogte 1 een hoekpunt heeft, en al deze hoekpunten zijn met elkaar verbonden. Zo is de 2-simplex een rechthoekige driehoek met hoekpunten in de oorsprong (de 0-dimensionale as) en $(1, 0)$ en $(0, 1)$ en een 3-simplex wordt ook wel een 3-zijdige piramide genoemd.

Een n-hyperkubus wordt verkregen door alle punten in $\mathbb{R}^n$ waar elke coördinaat gelijk is aan +1 of -1 te nemen, en het convexe omhulsel hiervan wordt de n-hyperkubus genoemd.

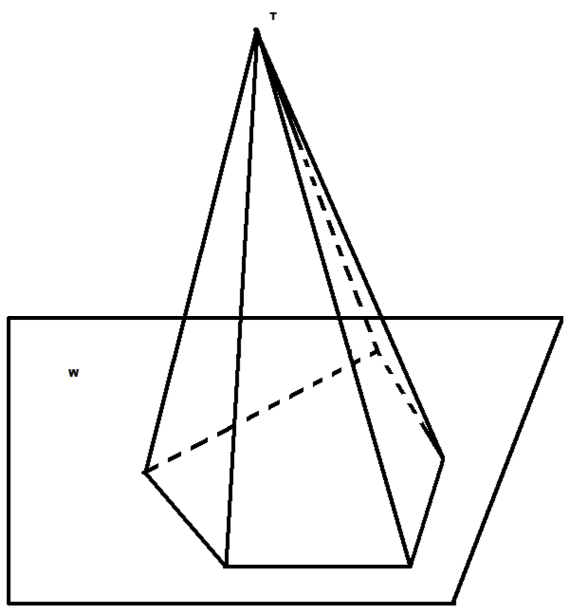
De n-dipiramide wordt verkregen door de zwaartepunten de nemen van een n-hyperkubus, en hiervan het convexe omhulsel wordt de n-dipiramide genoemd.

Hieronder valt de weergave van een n-hyperkubus te zien, beginnende met links de weergave van een n-hyperkubus in de nul-dimensie tot en met de n-hyperkubus in de vierde-dimensie.
Hierin valt goed te zien hoe een hyperkubus zichzelf opbouwt uit de vorige dimensie. Beginnende bij de nul-dimensie is het een punt. Als je dit punt neemt en het een bepaalde lengte schuift krijg je een lijn, de een dimensionale vorm van een hyperkubus. Als je deze lijn neemt en hem loodrecht op zijn eigen richting dezelfde lengte beweegt, wordt er een vierkant opgespannen, oftewel de twee dimensionale vorm van een hyperkubus. Ditzelfde valt te doen in de derde dimensie en hierdoor wordt een kubus verkregen. Doet men dit nogmaals in de vierde dimensie dan komt er een tesseract uit, de vierdimensinale vorm van een hyperkubus.



Kegeltop

Zoals we in een vlak spreken van een hoek, hebben we het in de ruimte over een kegeltop. Een kegeltop wordt gedefiniëerd door het volgende;
Neem een vlak W en een punt T, zodat T niet in W valt, neem ook nog een veelhoek in W. De kegeltop wordt dan voorgesteld door het figuur dat wordt begrensd door alle lijnen die in T beginnen en door een punt in de veelhoek gaan. Als je een veelhoek hebt met k hoekpunten, dan wordt de kegeltop ook wel een k-kegeltop genoemd.



Er valt redelijk makkelijk na te gaan dat een kegeltop alleen convex is als de veelhoek eveneens convex is. Neem namelijk elke niet convexe veelhoek, hier valt dus een lijn te trekken tussen 2 punten in de veelhoek, waarbij de lijn zelf gedeeltelijk niet door de veelhoek gaat. Als hier een kegeltop van wordt gemaakt dan zal deze lijn nog steeds bestaan en is de kegeltop eveneens niet convex.

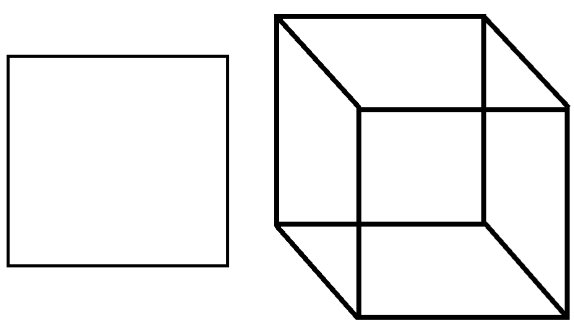
Regelmatigheid

Veelhoeken, veelvlakken en kegeltoppen hebben een paar simpele regels waaraan ze moeten voldoen om regelmatig te zijn.
Een kegeltop is regelmatig wanneer er een lijn is door het punt T, de top, zodat als de k-kegeltop over een hoek van $2\pi/k$ om die lijn wordt gedraait, je weer precies hetzelfde figuur krijgt.

Eveneens valt er over een veelhoek (m-hoek) te zeggen dat hij regelmatig is als door draaiing over een hoek van $2\pi/m$ ook in zichzelf veranderd. Voor een veelhoek valt er echter ook te zeggen dat hij regelmatig is als alle zijden een gelijke lengte hebben en alle hoeken gelijk zijn.

De regelmatigheid van het convex veelvlak $V \subset \mathbb{R}^3$ van beide eerdergenoemde definities. Namelijk als er getallen m en k, beide gehele getallen groter dan nul, bestaan zodat elk zijvlak van V een regelmatige m-hoek vormt en in elk hoekpunt de zijvlakken een regelmatige k-kegeltop zijn.

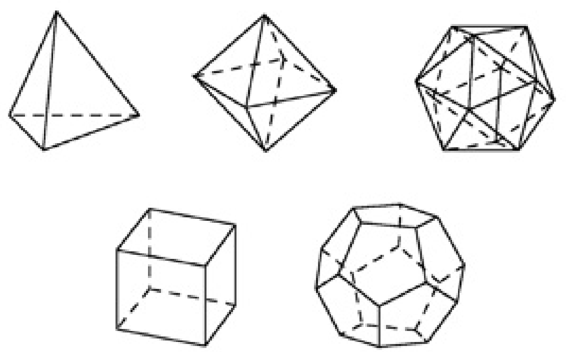
Aan de hand van onderstaand plaatje valt wat makkelijker na te gaan wat er precies met de draaiing over een m-hoek wordt bedoeld en hoe de hoekpunten kegeltoppen vormen.
Bij een vierhoek is m gelijk aan vier. En aangezien de hoek $2\pi/4 = 1/2\pi$ gelijk is aan een hoek van 90 graden. Valt er na te gaan dat als je een vierkant 90 graden draait hij weer in zichzelf overgaat. Evenals valt er voor de kubus te zien dat de hoeken 3-kegeltoppen zijn, met als veelhoek voor de basis van deze kegeltoppen een driehoek.



Voor regelmatige polytopen is er ook een notatie, namelijk het *Schläfli-symbool*. Voor een regelmatig veelvlak V dat bestaat uit zijvlakken die regelmatige m-hoeken zijn en waarvan de hoekpunten k-kegeltoppen zijn zeggen we dat het *Schläfli-symbool* van V gelijk is aan; $s(T) = (m, k)$.
Dus voor een kubus wordt het *Schläfli-symbool* $(4, 3)$, omdat hij is opgebouwd uit regelmatige vierhoeken en de hoekpunten 3-kegeltoppen vormen.

Regelmatige veelvlakken

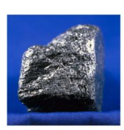
Er valt redelijk makkelijk te zeggen dat er 5 regelmatige veelvlakken zijn, zonder een bewijs hiervan zegt dit echter niet zoveel, dus daarom wordt hieronder het bewijs van deze stelling geleverd.

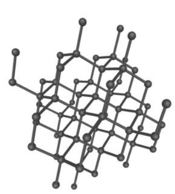
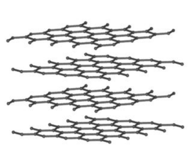


Stelling: Op gelijkvormigheid na zijn er precies 5 regelmatige veelvlakken.
Bewijs: Elk hoekpunt in een veelvlak is een samenkomst van minimaal 3 verschillende vlakken. Elk veelvlak levert zijn ëigen”hoek binnenhoek. De som van de binnenhoeken die in een hoekpunt van een veelvlak samenkomen moet kleiner zijn dan 360 graden, omdat anders of in het vlak samengekomen wordt (zoals bij regelmatige 6-hoeken) of er treedt zelfs overlapping op!
Omdat alle regelmatige veelhoeken met 6 of meer zijdes een binnenhoek hebben van 120 graden of meer kunnen slechts met gelijkzijdige driehoeken, vierkanten en pentagonen gewerkt worden (3 keer 120 is immers al de verboden 360). De binnenhoek van een regelmatig pentagon is 108 graden. Een regelmatig veelvlak met pentagonen kan dus enkel gemaakt worden zolang niet meer (en per definitie niet minder) dan 3 pentagonen tegelijk samenkomen. Dat geeft maar 1 mogelijke (starre) vorm, een dodecader. Een vierkant heeft een binnenhoek van 90 graden en heeft dus ook de beperking van maximaal en minimaal een samenkomst van 3 vlakken. Dit geeft maar n mogelijk vorm en dat is de kubus. De enige andere regelmatige veelhoek met minder dan 6 zijdes is de regelmatige driehoek. Deze heeft hoeken van 60 graden en kan dus per 3, 4 en 5 samenkomen en nog steeds aan de eisen voldoen. Dit geeft een tetrader, een octader en een icosader. Dit zijn de basisvormen die aan de eisen voldoen. Alle andere vormen zijn per definitie veelvouden van deze vormen, en dus gelijkvormig.

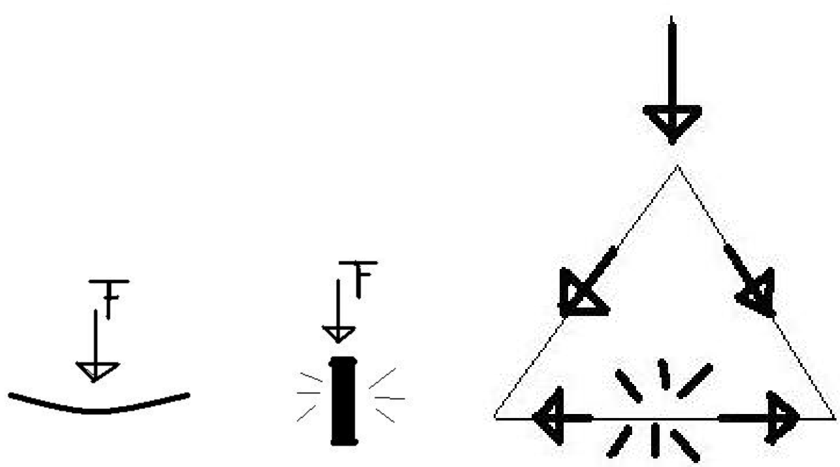
Starheid

Veelvlakken worden in de bouw en de architectuur veel gebruikt vanwege hun uiterlijke schoonheid en vooral hun speciale eigenschappen. Zo zijn sommige veelvlakken van nature erg star en daarom uitermate geschikt om efficint mee te bouwen. Als je in een veelvlak de ribben een vaste lengte geeft, en de hoek waarmee de ribben samenkomen variabel maakt kun je er achterkomen of een veelvlak star is. Wanneer de hoek niet variabel kan zijn (of in ieder geval niet geleidelijk kan veranderen zonder verbindingen te verbreken) noem je de veelvlak star. Van de regelmatige veelvlakken is alleen de kubus niet star, deze kan immers zonder al te veel moeite veranderen in een parallellepipedum. Een veelvlak is niet star zolang het minimaal 2 gelijke veelhoeken bevat die parallel aan elkaar zijn geplaatst en verbonden zijn door middel van loodrechte lijnen tussen corresponderende hoeken. Daarmee zijn alle prisma's dus ongeschikt in onze zoektocht naar starre veelvlakken. Dit geldt natuurlijk alleen als het betreffende prisma niet aan beide kanten is verbonden met de rest van het veelvlak. Het probleem met veelvlakken is dat de verschillende vlakken niet langs elkaar mogen kunnen schuiven als je het star wilt maken. Lokaal mogen er dus geen prisma's te vinden zijn. Dit is natuurlijk niet al te ingewikkeld, je kunt alle aanwezige prisma's in je veelvlak immers vervangen door antiprisma's en hij is star, maar daar kom je in alledaagse problemen nog niet zo ver mee.
In de natuur komen we dit voorbeeld erg duidelijk tegen bij het koolstofelement. Zowel de diamanten boorkop van de tandarts als het grafiet in je potlood zijn pure koolstof. Het gebruik van de twee is echter radicaal anders. De een wordt gebruikt omdat het de hardste stof op aarde is, de ander omdat het zo makkelijk afbrokkelt dat het een dun laagje achter laat op papier. Dit komt omdat grafiet bestaat uit opgestapelde laagjes van koolstofverbindingen, terwijl diamant zeer veel onderlinge verbindingen heeft die juist niet als laagjes te definiren vallen. Hoewel dit niet direct in verband staat met veelvlakken, heeft het als je een klein deel van de structuur bekijkt juist een sterke overeenkomst. Grafiet is dan een prisma met een regelmatige 6-hoek als basis en diamant bestaat uit octahedria en tetrahedra.

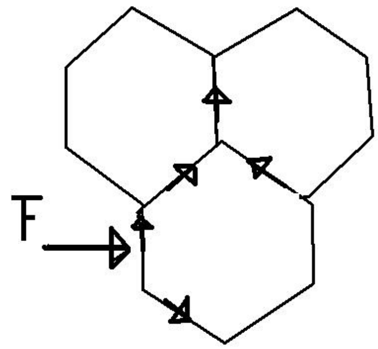



In het dagelijks leven gebruiken we starre veelvlakken omdat het zeer voor de hand ligt te bouwen in prisma's. Zo ga je immers het efficintst om met de aanwezige ruimte, door te bouwen in blokken(al dan niet met een licht schuin dak voor de regen) kun je overal in je ruimte voldoen aan de eis voor sta-ruimte zonder materiaal te verspillen. Voor laagbouw levert dit doorgaans weinig problemen op, maar als je meer de hoogte in wilt bouwen gaat het fout. Efficint bouwen levert 4 pilaren in de hoeken met minder sterke(want niet dragende) verbindende vlakken en een dak dat niet sterker is dan noodzakelijk. Als de hoek tussen het grondvlak en de verticale muren echter maar een klein beetje van de 90 graden afwijkt verschuift het hoogste punt van de structuur radicaal. Hierdoor kan het zwaartepunt zo ver verschuiven dat deze "naast"het grondvlak komt te liggen, waardoor de constructie omvalt. Een sterke verankering op de ondergrond compenseert dit tot op zekere hoogte, maar er komt erg veel druk te liggen op de verbinding met het ankerpunt. Volgens de eerdere theorie over starre veelvlakken ligt het voor de hand te bouwen in antiprisma's maar deze zijn weer moeilijk naast elkaar te rangschikken. Iedereen die wel eens naar een hijskraan heeft gekeken weet dat de gangbare oplossing schuine dwarsbalken tussen de pilaren worden gebruikt om benodigde kracht te genereren. In essentie verdeelt deze methode elke "muurïn driehoeken. Dit komt omdat een (gelijkzijdige) driehoek in het 2d-vlak de "stevigsteöf "stijfste"vorm is. Kracht uitgeoefend op de hoekpunten wordt langs de ribben doorgegeven en uitgeoefend als trekkracht op de overstaande zijde. Omdat de hoekpunten als scharnieren werken wordt de kracht altijd loodrecht langs de aanliggende zijden doorgegeven, waardoor de kans op doorbuigen van de zijden word verkleind. De trekweerstand van de meeste materialen is erg groot terwijl de drukweerstand minder groot is (vergelijk maar eens hoe moeilijk het is om een vel papier uit elkaar te trekken met hoe makkelijk het om hem op te rollen). Daarnaast heeft een driehoek de bijkomstigheid dat het 2 driehoeken samen een rechthoek kunnen vormen waardoor we zonder al te veel bouwmateriaal extra terug zijn gekomen bij onze eerdere blokkendozen. Dankzij deze methode kun je ook dwarsbalken maken die een relatief licht gewicht hebben omdat je niet een dikke balk met een hoge drukweerstand hoeft te hebben. Je kunt nu immers een raamwerk van driehoeksconstructies bouwen.



De driehoek is van alle veelhoeken dus het meest praktisch, en omdat je met driehoeken een kubus stevig kunt maken is van de veelvlakken de doos-vorm het handigst. Maar daar houdt de toepassing van veelvlakken niet op. Hoewel driehoeken de zijden van een veelvlak kunnen verstevigen zijn er bij bijvoorbeeld een gebouw bepaalde eisen die interne driehoeksconstructies lastig maken. Schuine muren maken het inrichten van een flatgebouw er niet efficinter op en de uiterlijke vorm van een gebouw kan uitkomst bieden door met slechts zijn raamwerk al star te zijn. De versteviging van de zijden is in praktijk ook dan nog noodzakelijk maar wanneer je bedenkt dat de wind op 200 meter boven de grond gemakkelijk snelheden van meer dan 120 kilometer per uur kan bereiken zie je in dat alle beetjes helpen. Je komt nu onvermijdelijk bij een veelvlak uit dat niet convex is omdat het grondoppervlak bij hoogtebouw beperkt dient te blijven en er vaak geen ruimte is om boven de grond alsnog uit te dijen (zoals je bijvoorbeeld zou krijgen met een voetbalstructuur). Een bekende oplossing is het stapelen van zeer grote trapezia. Naast de aerodynamisch voordelige eigenschappen van deze vorm zijn zowel de individuele trapezia als de volledige vorm stijf omdat een trapezium geen prisma is.

In de natuur komen ongelooflijk veel veelvlakken voor. Bekend is natuurlijk de honingraatstructuur waarmee enorme bijennesten gemaakt kunnen worden. De structuur heeft als voordeel dat de kracht gelijkmatig verdeeld wordt door de structuur. Het interessante is dat een honingraat bestaat uit vele gestapelde prisma's. Je zou dus verwachten dat de structuur niet stijf is. Dit zou het geval zijn als het ging om een raamwerk. Elk prisma is slechts aan 1 kan öpen". Dit heeft als gevolg dat er heel veel wanden zijn die de structuur verstevigen. Omdat de wanden van de prisma's staan 3 verschillende kanten op. Net als bij het eerdere voorbeeld zorgt druk op de korte kant van een staaf of wand voor meer weerstand dan druk op de lange kant. Omdat de wanden zo veel kanten op staan wordt verschuiving in alle richtingen goed opgevangen. Het slechtste geval, volledige druk op een lange kant, betekent dat de druk doorgegeven wordt op de korte kanten van andere wanden, omdat overstaande wanden tegendruk geven. Op deze manier gebeurt het dat een driedimensionaal object zich exact hetzelfde gedraagt als een tweedimensionale vorm. De structuur van regelmatige 6-hoeken kan echter alleen in stand gehouden worden als zij in "platenöpgehangen wordt. Er is namelijk geen veelvlak te maken van enkel regelmatige 6-hoeken omdat in een veelvlak minimaal 3 vlakken samen moeten komen in een hoekpunt en de hoeken van de individuele vlakken samen minder moeten zijn de 360 graden om een veelvlak te vormen en niet een (onregelmatig) veelhoek.



Als laatste willen we nog één heel speciaal soort veelvlak behandelen. Speciaal omdat de ruimtelijke vorm een bijzonder grote structurele kracht verzorgt. Een geodetische bol combineert plaatselijk de stijfheid van een driehoek en alle erop uitgevoerde kracht wordt gelijkmatig over de structuur verdeeld. Puntdruk op een bol wordt namelijk langs alle kanten doorgegeven (en in essentie dus ”verdundäls het gaat om stres per volume-eenheid materiaal) tot de ëvenaarïs bereikt. Dit maximale gebied is waar het materiaal de echte stres ”meemaaktömdat de tegendruk (die ontstaat omdat de bol niet wegrolt) effectief wordt uitgeoefend. Zo wordt het verdelende karakter van een bol (dat voornamelijk drukweerstand van het materiaal vraagt) gecombineerd met het verdelende karakter van de driehoeksvorm (dat die drukkracht deels omzet naar trekkracht, die bij staal veel hoger ligt).

Door:
Koen Jeene
Tom Bruisten