Veelvlakken

Hanneke Buitenhuis (3484793)
Janneke Hazeleger(3470873)
Kees Vermaat (3511170)

22 maart 2010

Inhoudsopgave

1 Inleiding

Ons werkstuk gaat over polytopen. Polytopen komen voor in elke willekeurige dimensie. Dus van dimensie $\mathbf{R}^1$ tot dimensie $\mathbf{R}^n$. In dimensie $\mathbf{R}^1$ is een polytoop gewoon een lijnstuk. Ook wel een 1-polytoop genoemd. Vanzelfsprekend wordt een polytoop in dimensie $\mathbf{R}^2$ en $\mathbf{R}^3$ respectievelijk een 2-polytoop en een 3-polytoop genoemd.
Een 2-polytoop is een veelhoek. Denk aan een driehoek of vierkant. Een veelhoek kan convex of stervormig zijn.

Definitie 1.1. *Een verzameling $V \subset \mathbf{R}^n$ heet convex als voor alle $P, Q \in V$ het lijnstuk $\overline{PQ}$ bevat in V.*

Wij richten ons in ons werkstuk vooral op de 3-polytoop (veelvlak). Ook binnen de 3-polytoop heb je het onderscheid tussen convex en stervormig. Wij richten ons alleen op de convexe veelvlakken. Dus als dit niet expliciet genoemd wordt kunt u ervan uitgaan dat we het over de convexe veelvlakken hebben.
Een bijzonder soort veelvlak is het regelmatige veelvlak, zoals een piramide of een kubus.

Definitie 1.2. *Een convex veelvlak $T \subset \mathbf{R}^3$ heet regelmatig als er getallen $m, k \in \mathbf{Z}_{>0}$ bestaan zodanig dat elk zijvlak van T een regelmatige m-hoek is, en in elk hoekpunt de zijvlakken een regelmatige k-kegeltop vormen.*

Verder heb je ook nog de half-regelmatige veelvlakken, oftewel de Archimedische veelvlakken.

Definitie 1.3. *Een convex veelvlak heet half-regelmatig (of heet een Archimedisch veelvlak) als alle zijvlakken regelmatige veelhoeken zijn (er kunnen meerdere soorten worden gebruikt), en als alle kegeltoppen in de hoeken onderling gelijk zijn.*

In ons werkstuk zullen wij ons dus richten op de convexe 3-polytoop. Deze verdelen we weer onder in de regelmatige en de half regelmatige veelvlakken. Verder zal de formule van Euler aan bod komen en worden ook de Schläfli symbolen uitgelegd. Welke ingevoerd zijn door Ludwig Schläfli.
Wij hebben zelf ook een tweetal figuren gemaakt. We hebben een dodecaëder (regelmatig veelvlak) gemaakt uit een stuk papier en met rietjes hebben we een 'Romboëdrisch kuboctaëder' (half regelmatig veelvlak) in elkaar gezet. Onze werkwijzes zullen ook in het werkstuk aan bod komen.
Op de volgende pagina staat een schema afgebeeld. Dat is eigenlijk een korte samenvatting van ons werkstuk. Ons hoofdonderwerp is de polytoop. Hierbinnen richten wij ons vooral op de 3-polytoop en dan met name de convexe 3-polytoop. Over de convexe 3-polytoop valt heel veel te vertellen. Wij lichten hier een aantal 'subonderwerpen' uit. Dit zijn de regelmatige veelvlakken, de halfregelmatige of Archimedesveelvlakken, de schläfli symbolen en de formule van Euler.

Polytoop

- 1-Polytoop (Lijnstuk)
- 2-Polytoop (Plat regelmatig vlak)
- 3-Polytoop:
  - Stervormig
  - Convex

Regelmatige veelvlakken:
- Platonische veelvlakken
- Dualiteit
- Bewijs dat er maar 5 zijn
- Figuur maken

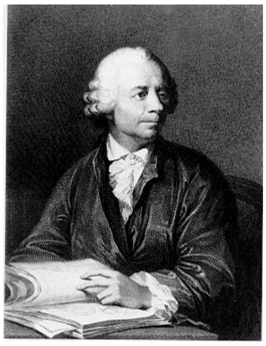
Schläfli symbolen

Formule van Euler:
- Leonhard Euler
- Begrippen
- De formule
- Uitzonderingen op de formule

Half regelmatige veelvlakken:
- Figuur maken

2 Formule van Euler

2.1 Leonhard Euler



Leonhard Euler (15 april 1707 - 18 september 1783) was van oorsprong een Zwitser. Nadat hij in 1726 in de wiskunde afstudeerde aan de Universiteit van Basel, werd hij in 1727 benoemd aan de Academie voor Wetenschap in St. Petersburg. Daar volgde hij in 1730 zijn vriend Daniel Bernoulli op als professor in de wiskunde en vestigde hij zijn grote reputatie.
Vanaf 1738 verslechterde zijn gezichtsvermogen, naar hij zelf zei: vanwege te grote belasting van de ogen bij kartografie.
In 1741 werd Euler door Frederik de Grote (koning van Pruisen) naar Berlijn gehaald om een Academie voor Wetenschap te stichten. In 1768 keerde hij terug naar St. Petersburg, daar werd hij na een ziekte volledig blind, maar zijn wetenschappelijke productiviteit leed er (dankzij een fenomenaal geheugen) nauwelijks onder. Hij overleed in 1783 aan een hersenbloeding.
Leonhard Euler wordt beschouwd als de belangrijkste wiskundige van de 18^e eeuw en als een van de belangrijkste allertijden. In bijna alle takken van de wiskunde heeft hij zijn sporen nagelaten, denk maar aan de getallen i, e en π voor respectievelijk de imaginaire eenheid, het grondtal van de natuurlijke logaritme en de verhouding tussen omtrek en middellijn van de cirkel. Ook de huidige namen van bijvoorbeeld de goniometrische functies sinus, cosinus en tangens zijn van hem[1].

2.2 Begrippen

Om de formule uit de meetkunde van Euler, gaande over (regelmatige) veelvlakken in $\mathbf{R}^3$, aan te tonen en te bewijzen, voeren we eerst een aantal begrippen in. In het algemeen kun je zeggen dat een veelvlak een ruimtelijk figuur is, begrensd door convexe vlakke veelhoeken (*zijden*). De hoekpunten van de zijden zijn ook de *hoekpunten* van het veelvlak. Twee aangrenzende zijden snijden elkaar volgens een *ribbe*. Hoekpunten verbonden door een ribbe zijn *buren*. Een lijnstuk dat twee hoekpunten verbindt die geen buren zijn, heet een *diagonaal* van het veelvlak. Ligt een diagonaal op een zijde, dan heet het een *zijdediagonaal*, anders een *lichaamsdiagonaal*. Een kubus heeft bijvoorbeeld 6 zijden, 12 ribben, 8 hoekpunten, 12 zijdediagonalen en 4 lichaamsdiagonalen.

[1] http://www.math4all.nl/Wiskundegeschiedenis/Wiskundigen/Euler.html

Een overzicht van het aantal ribben, zijden en hoekpunten van de vijf regelmatige veelvlakken:

Veelvlak	Z*(zijden)*	R*(ribben)*	H*(hoekpunten)*
Tetraëder	4	6	4
Kubus	6	8	12
Octaëder	12	8	6
Dodecaëder	12	30	20
Icosaëder	20	30	12

2.3 De formule van Euler

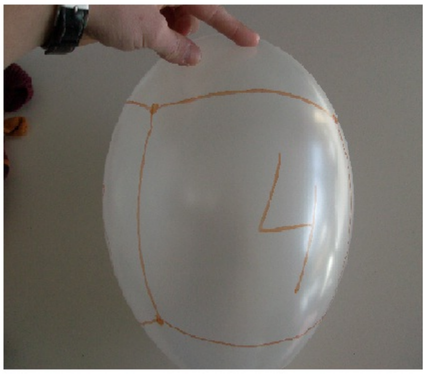
Stelling 2.3.1. de formule van Euler, $n = 3$: *Voor een convex veelvlak* $T \subset \mathbf{R}^3$ *geldt:* $H - R + Z = 2$

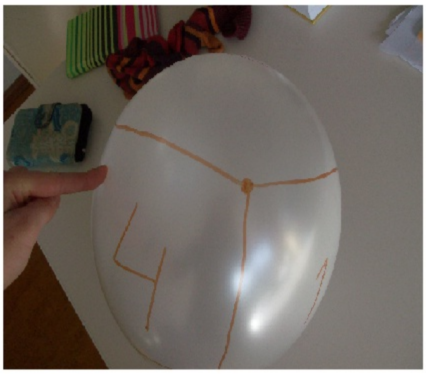
De formule van Euler voor veelvlakken is bijzonder, omdat deze formule geen gebruik maakt van meetkundige eigenschappen: loodrechte stand en evenwijdigheid. Verder maakt de formule ook geen gebruik van metrische eigenschappen: grootte van hoeken of lijnstukken, oppervlakte van zijvlakken, of over verhoudingen daartussen. Alle stellingen tot dan toe gingen over meetkundige of metrische eigenschappen, dat maakte de formule van Euler bijzonder voor die tijd.

Voor het bewijs van de formule van Euler maken we gebruik van inductie: inductiehypothese, inductiestap en volledige inductie.

Het onderstaande bewijs vraagt om een goed inzicht in driedimensionale figuren. Om alle stappen makkelijker te kunnen volgen is het handig om er ballonnen bij te pakken: teken op de eerste ballon het beginfiguur. Vervolgens teken je op de tweede ballon wat er gebeurd is, als de eerste stap is uitgevoerd. En zo ga je verder, totdat je bij het einde van het bewijs bent. Wat je precies moet doen bij elke stap staat duidelijk in het onderstaande bewijs geschreven.

Bewijs. Neem een convex veelvlak $T \subset \mathbf{R}^3$. Neem een punt P binnen het veelvlak, en een bol B, die T bevat. Projecteer het oppervlak van T vanuit P op het boloppervlak. We krijgen een structuur met kromme lijnen, 'hoekpunten' en 'veelhoeken' op dat boloppervlak. Zo'n structuur heeft een Euler-karakteristiek $(X(T))$ gelijk aan $H - R + Z$. Op dit Euler-karakteristiek gaan we inductie toepassen door één voor één de hoekpunten te verwijderen, met de daarbij behorende ribben. Totdat we twee 'veelhoeken'op het boloppervlak overhouden. Bekijk een van de 'hoekpunten' op het boloppervlak B en verwijder dat hoekpunt met alle ribben die daar samenkomen. Het verwijderen van een hoekpunt is de inductiestap. De nieuwe structuur die ontstaat heeft Euler-karakteristiek $H' - R' + Z'$. Dit is een nieuwe karakteristiek, die ontstaat door het weghalen van een hoekpunt, waardoor het aantal hoekpunten, ribben en zijden is veranderd. Met de inductiestap is er 1 hoekpunt weggehaald, dus $H = H' + 1$.
Als er k ribben in het weg te halen hoekpunt samenkomen, dan geldt: $R = R' + k$. Voor het aantal zijden geldt: $Z = Z' + k - 1$, want het aantal ribben dat samenkomt in het weg te halen hoekpunt is gelijk aan het aantal zijden dat samenkomt in het weg te halen hoekpunt. Maar door het weghalen van een hoekpunt ontstaat er een nieuwe zijde. Dus je krijgt: $Z - k + 1 = Z'$. We zien dat: $H - R + Z = H' + 1 - R' - k + Z' + k - 1$, dus: $H - R + Z = H' - R' + Z'$. We herhalen deze inductiestap (:een 'hoekpunt' weghalen) totdat we uitkomen bij een structuur op het boloppervlak B, die verdeeld is in nog maar twee stukken. Die twee stukken zijn twee 'veelhoeken', gescheiden door een cyclische keten van m ribben; in dat geval geldt: Euler-karakteristiek $(X) = m - m + 2$. Hieruit volgt dat (X) gelijk is aan 2. $X(T) = H - R + Z$ en die is dus gelijk aan 2. Hieruit volgt de formule van Euler $H - R + Z = 2$. □





2.4 Uitzonderingen op de formule van Euler

De formule van Euler is niet voor alle convexe veelvakken juist. Een voorbeeld hiervan is de 'la Grand Arche' in Parijs. Het tellen van ribben, hoekpunten en zijden van dit 'tunnelveelvlak' levert op: $H - R + Z = 0$. Dat komt door het volgende. Als je het veelvlak als een ballon zou kunnen opblazen, moet er een bol uitkomen. Bij een ring is dit niet het geval, dan blijft er altijd een gat inzitten. Een ring en 'la Grand Arche' zijn voorbeelden van veelvlakken die niet met deze formule van Euler beschreven kunnen worden.
Wanneer een veelvlak wel en niet beschreven kan worden met deze formule van Euler ($H - R + Z = 2$) zullen we niet verder uitwerken in dit werkstuk. Die uitzonderingen kunnen een heel werkstuk appart vormen, wat niet onze bedoeling is.

3 Schläfli symbolen

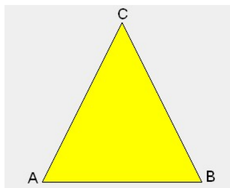
De schläfli-symbolen[2]komen van meneer Ludwig Schläfli. Hij heeft bedacht hoe hij de regelmatige veelvlakken kon classificeren. Daarvoor heeft hij de schläfli-symbolen bedacht. Aan de hand van de dimensies willen wij per dimensie stil staan en uitleggen hoe de schläfli-symbolen werken.

3.1 Dimensie $\mathbf{R}^1$

In de eerste dimensie zijn er geen schläfli-symbolen, omdat alleen een lijnstuk behoort tot $\mathbf{R}^1$.

3.2 Dimensie $\mathbf{R}^2$

In dimensie 2 krijg je een regelmatige veelhoek. Dat is dus in een plat vlak. Het schläfli-symbool in $\mathbf{R}^2$ wordt gegeven door de letter $\{n\}$. $\{n\}$ staat voor het aantal zijden dat een regelmatige veelhoek heeft. Zo krijg je dan voor een gelijkzijdige/regelmatige driehoek $\{n\} = \{3\}$ (zie afbeelding hiernaast) en voor een regelmatige vierhoek/vierkant $\{n\} = \{4\}$.



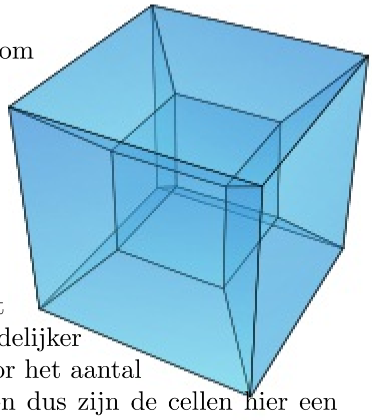
3.3 Dimensie $\mathbf{R}^3$

In deze dimensie hebben we het over regelmatige veelvlakken (zie de afbeelding op de voorzijde of op pagina 6). In het hoofdstuk 'regelmatige veelvlakken' wordt bewezen dat er maar vijf regelmatige veelvlakken zijn. In deze dimensie hebben we met een schläfli-symbolen te maken dat bestaat uit twee elementen, namelijk $\{n, k\}$. Hierbij staat de n voor het aantal hoeken van een regelmatig veelvlak en k voor het aantal vlakken wat in één hoek samenkomt. We weten dat de regelmatige veelvlakken zijn opgebouwd uit de regelmatige veelhoeken. Bij de regelmatige veelhoeken zijn de zijden even lang en de hoeken even groot. Denk hierbij aan de gelijkzijdige driehoek. Dus de zijden en hoeken van de veelvlakken zijn congruent/hetzelfde. In de afbeelding hiernaast zie je de tetraëder. De tetraëder is opgebouwd uit vier regelmatige driehoeken. De regelmatige driehoek heeft drie gelijke hoeken en daarom krijg je $n = 3$. In elk hoekpunt komen een k-aantal zijvlakken bij elkaar. In onze afbeelding hiernaast zie je de tetraëder. Bij dit figuur komen in elk hoekpunt 3 vlakken samen, dus $k = 3$. Met dit $\{n, k\}$ schläfli-symbool wordt het regelmatige veelvlak dus vastgelegd, want elk hoekpunt en zijvlak wordt beschreven door het symbool $\{n, k\}$. Samengevat: Het schläfli-symbool $\{n, k\}$ staat voor het aantal hoeken, n, van de regelmatige veelhoek en het k-aantal zijvlakken die samenkomen in elke hoek van het regelmatige veelvlak. Hiermee worden de regelmatige veelvlakken vastgelegd. Hieronder vindt u het overzicht van de andere 4 regelmatige veelvlakken.

[2]http://nl.wikipedia.org/wiki/SchlC3A4fli-symbool

Veelvlak	Z	R	H	Schläflisymbool
Tetraëder	4	6	4	$\{3,3\}$
Kubus	6	8	12	$\{4,3\}$
Octaëder	12	8	6	$\{3,4\}$
Dodecaëder	12	30	20	$\{5,3\}$
Icosaëder	20	30	12	$\{3,5\}$

3.4 Dimensie $\mathbf{R}^4$



In de vierde dimensie wordt het een stuk lastiger om het zelf te begrijpen, omdat wij mensen eigenlijk alleen in de derde dimensie denken. Toch kunnen we iets zeggen over hoe de schläfli-symbolen in de vierde dimensie zijn opgebouwd. Het schläfli-symbool is $\{p, q, r\}$ waar de p staat voor het aantal zijden die elk vlak heeft, de $\{p, q\}$ staan voor de cellen en de r staat voor het aantal cellen rondom de rand. Om dat het moeilijk is dit te visualiseren, neem ik één voorbeeld om het duidelijker te maken. De hyperkubus $\{4, 3, 3\}$: de p staat voor het aantal zijden die elk vlak heeft en dat zijn er hier 4. En dus zijn de cellen hier een kubus, want $\{p, q\}$ zijn hier $\{4, 3\}$. De r is hier een 3, dat wil zeggen dat elke rand/rib verbonden is met drie cellen. En als je goed naar de hiernaast afgebeelde hyperkubus kijkt, dan zie je dat het klopt. In totaal zijn er 6 regelmatige 4-polytopen, wat we niet gaan bewijzen maar aannemen. In de tabel hieronder staan ze alle zes, met het aantal hoeken (H), aantal ribben (R), aantal zijvlakken (Z) en aantal cellen (C) en het schläfli-symbool.

4-polyeder	H	R	Z	C	Schläfli-symbool
4-simplex	5	10	10	5	{3,3,3}
4-hyperkubus	16	32	24	8	{4,3,3}
4-bipiramide	8	24	32	16	{3,3,4}
24	24	96	96	25	{3,4,3}
600	600	1200	720	120	{5,3,3}
1200	120	720	1200	600	{3,3,5}

3.5 Dimensie $\mathbf{R}^5$ en hoger

Je kan zo verder gaan met steeds hogere dimensies, maar wij richten ons in dit werkstuk vooral op de 3^e dimensie. Het zou voor een volgend werkstuk wel interessant zijn om dat te onderzoeken.

4 Regelmatige veelvlakken

4.1 Platonische veevlakken

Er zijn precies vijf regelmatige veelvlakken, die ook wel Platonische veelvlakken worden genoemd. Dat het er precies vijf zijn wordt in een volgende alinea bewezen. De vijf Platonische veelvlakken zijn: tetrader, kubus, octader, dodecader en de icosader.

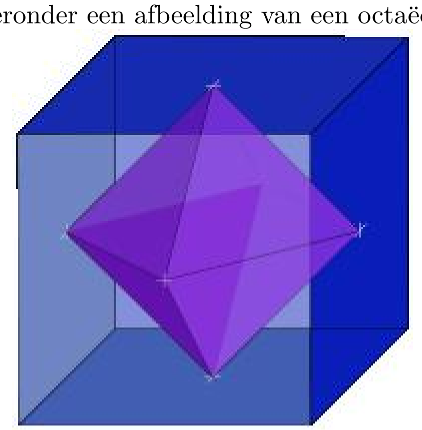
4.2 Dualiteit

Binnen de Platonische veelvlakken is er een bepaalde dualiteit. Als je van de kubus alle zwaartepunten van elke zijde met elkaar verbindt, ontstaat een octaëder en als je van een octaëder alle zijden verbindt ontstaat de kubus weer. Deze dualiteit geldt ook voor de dodecaëder en de icosaëder. Het blijkt ook uit de volgende tabel, met daarin gegevens van de vijf platonische veelvlakken:

Veelvlak	Z	R	H	Schläflisymbool
Tetraëder	4	6	4	$(3,3)$
Kubus	6	8	12	$(4,3)$
Octaëder	12	8	6	$(3,4)$
Dodecaëder	12	30	20	$(5,3)$
Icosaëder	20	30	12	$(3,5)$

Het aantal zijden van een kubus is precies gelijk aan het aantal hoekpunten van een octaëder (6). En het aantal zijden van een octaëder is precies gelijk aan het aantal hoekpunten van een kubus (8). Verder is het aantal ribben van beide veelvlakken gelijk (12).Dezelfde dualiteit zie je ook terug bij de dodecaëder en de icosaëder.

Ook in het uitschrijven van Schläfli-symbolen komen we een bepaalde dualiteit tegen. Er geldt het volgende voor dualiteit van veelvlakken. Neem T is een convex veelvlak, en neem het convex omhulsel van de zwaartepunten van de zijvlakken (zoals hierboven beschreven). Dit is een convex veelvlak wat we noteren als $\delta(T)$. We noemen $\delta(T)$ het duale veelvlak van T. Als T regelmatig is, dan is $\delta(T)$ ook regelmatig; als in dat geval geldt dat $s(T)$ (het Schläfli-symbool van $T) = (n, k)$, dan geldt $s(\delta(T)) = (k, n)$. Bovendien is $\delta(\delta(T))$ weer gelijkvormig met T. Deze twee vormen van dualiteit maken de platonische veelvlakken nog meer bijzonder. Hieronder een afbeelding van een octaëder in een kubus.



4.3 Bewijs dat er maar 5 regelmatige veelvlakken zijn in $\mathbf{R}^3$

Er zijn precies vijf convexe regelmatige veelvlakken, op gelijkvormigheid na (zie de afbeelding op pagina 6). Hiervoor is een bewijs, die gebruik maakt van de 'formule van Euler'.

Stelling 4.3.1. *Neem aan dat $T \subset \mathbf{R}^3$ een convex veelvlak is (niet noodzakelijk een regelmatig veelvlak) zodanig dat elk zijvlak een n-hoek is, en zó dat in elk hoekpunt k vlakken bijeen komen. Bewering: Dan is de combinatie (n, k) een van de volgende mogelijkheden:* $(3,3),(4,3),(3,4),(5,3),(3,5)$

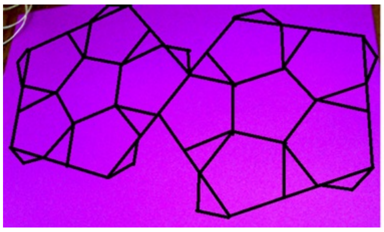
Bewijs. We gaan bij dit bewijs uit van de formule van Euler. We hebben de vergelijking: $H - R + Z = 2$
De volgende vergelijkingen kunnen worden opgesteld n.a.v. de bovenstaande aanname. $H = \frac{2R}{k}$
Elke ribbe (R) heeft twee hoekpunten (H). Maar een hoekpunt van een ribbe is tegelijk ook een hoekpunt van twee of meer andere ribben. Hoeveel ribben een hoekpunt 'delen' wordt gegeven door k. Want het aantal zijden dat in een hoekpunt bijeen komt, is gelijk aan het aantal ribben dat in hetzelfde hoekpunt bijeen komt. $Z = \frac{2R}{n}$
Een zijde heeft een x-aantal ribben. Elke ribbe behoort bij twee zijden. Als n het aantal hoeken is van een bepaalde zijde, dan is n gelijk aan het aantal ribben van die bepaalde zijde. Hieruit volgt, dat Z vermenigvuldigt met n gelijk is aan 2 maal het aantal ribben van het veelvlak. Dus: $Zn = 2R$; beide kanten delen door n levert: $Z = \frac{2R}{n}$.
Dit levert 3 vergelijkingen met daarin 4 onbekenden. Dit is op te lossen, doordat alle oplossingen positief moeten zijn. Als we H en Z invullen in de eerste vergelijking, volgt: $\frac{2R}{k} - R + \frac{2R}{n} = 2$
Dus: $\frac{2R}{k} + \frac{2R}{n} = 2 + R$; Nu volgt: $\frac{1}{k} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{R} > \frac{1}{2}$
De laatste vergelijking is groter dan $\frac{1}{2}$, omdat R een positief geheel getal is. Uit deze ongelijkheid volgt het gevraagde. We weten $n \geq 3$ en $k \geq 3$. Want een zijde heeft altijd meer dan 2 ribben en in een hoekpunt van een veelvlak komen altijd meer dan 2 zijden bij elkaar. Voor $n = 3$ geldt: $\frac{1}{k} > \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Hieruit volgt: $3 \leq k \leq 5$. Voor $4 \leq n \leq 5$ geldt: $\frac{1}{k} > \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, respectievelijk $\frac{1}{k} > \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$. Hieruit volgt: $3 \leq k \leq 3$ Voor $n > 5$ geldt: $\frac{1}{k} > \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$. Hieruit volgt: $k < 3$. Dat is een tegenspraak: we hebben net laten zien, dat $k \geq 3$.
Hieruit volgen de vijf mogelijkheden van de combinatie (n, k):
$(3,3),(4,3),(3,4),(5,3),(3,5)$[3] □

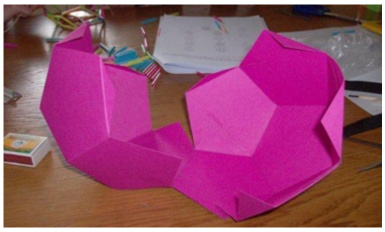
Deze vijf mogelijke combinaties zijn ook de enige vijf, dat hebben we net bewezen. Deze vijf combinaties (n, k) komen overeen met Schläfli-symbolen. Daarover staat meer geschreven in een eerder hoofdstuk. Deze vijf Schläfli-symbolen komen overeen met de vijf regelmatige veelvlakken. Hieruit volgt dat er dus ook precies vijf regelmatige veelvlakken zijn.

[3]Caleidoscoop B, 15-I-1997, Utrecht

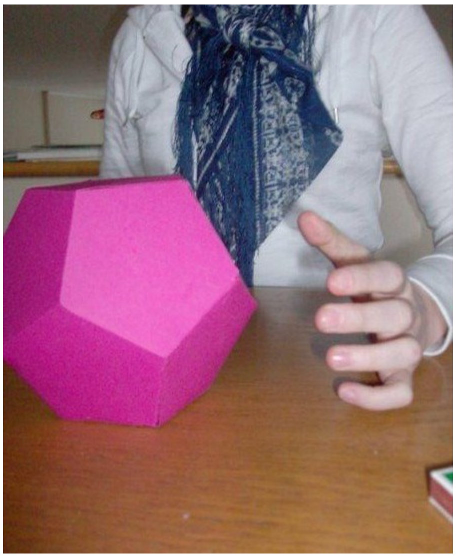
4.4 Het maken van een figuur

We hebben van papier een dodecaëder gemaakt. Een dodecaëder heeft 12 'vijfhoekige' (het construeren van een vijfhoek wordt verderop uitgelegd) zijden. Ons doel was om deze figuur uit één stuk papier te maken. We hadden al gezien dat de dodecaëder eigenlijk uit 2 delen bestaat, 2 'hoedjes' van 6 vijhoeken. Zo'n hoedje bestaat uit een vijfhoek als 'kapje' met aan elke zijde weer een vijfhoek, die ook weer met elkaar verbonden zijn. Als je van één zo'n hoedje een plattegrond maakt krijg je in het midden een vijfhoek met ook aan elke zijde een vijfhoek. Als je twee van zulke plattegrondjes verbindt heb je de plattegrond van de hele dodecaëder.

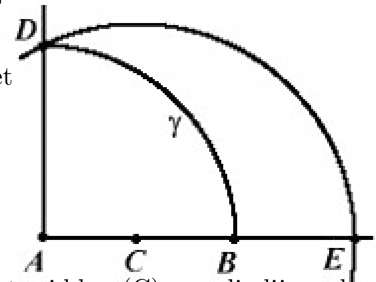




Vervolgens hebben we deze hele plattegrond, inclusief plakrandjes (dat zijn de driehoekjes tussen de vijfhoeken en de uitstekende driehoekjes), uitgeknipt en in elkaar gezet. Met als resultaat dat we een dodecaëder hebben die gemaakt is uit één stuk papier!



4.4.1 Het construeren van een vijfhoek



Het maken van een regelmatige vijfhoek is niet zo eenvoudig. We hebben hiervoor gebruik gemaakt van de gulden snede en nog andere meetkundige regels.
Het maken van een regelmatige vijfhoek gaat als volgt:

- Teken een lijn AB (5 cm). En bepaal het midden (C) van die lijn m.b.v. een passer
- Teken een lijn loodrecht omhoog vanuit A
- Teken een cirkel met middelpunt A, die door B gaat en de loodrechte lijn (l) uit A snijdt in punt D
- Teken een cirkel met middelpunt C, die door D gaat en het verlengde van lijnstuk AB in E snijdt.

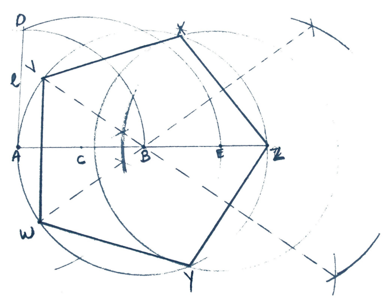
Nu geldt dat punt B lijnstuk AE volgens de gulden snede verdeelt. Met deze drie punten gaan we verder.

- Teken een cirkel (γ)met middelpunt B, die door punt A gaat. Deze cirkel (γ) snijdt het verlengde van lijnstuk AE in punt Z. Z is een van de vijf hoeken van de regelmatige vijfhoek.
- Teken een cirkel (μ) met middelpunt E en straal AB.
- De twee snijpunten van de cirkels γ en μ zijn de punten X en Y. De punten X en Y zijn hoeken van de regelmatige vijfhoek
- Teken de lijnen XZ en YZ. Dit zijn twee zijden van de regelmatige vijfhoek

Nu zijn de overige 3 hoeken vrij eenvoudig te bepalen.

- Bepaal de middelloodlijn door lijnstuk XZ. (Deze middelloodlijn moet door punt B gaan.) Het snijpunt van deze middelloodlijn met cirkel γ is het punt W, een hoek van de regelmatige vijfhoek.
- Bepaal ook de middelloodlijn door lijnstuk YZ. (Deze middelloodlijn moet ook door punt B gaan.) Het snijpunt van deze middelloodlijn met cirkel γ is het punt V, een hoek van de regelmatige vijfhoek

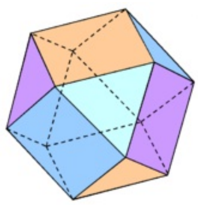
De lijnstukken XZ, ZY, YW, WV, VX zijn de vijf zijden van de regelmatige vijfhoek. Doordat alle zijden even lang zijn en alle hoekpunten zich op één cirkel bevinden is dit een regelmatige vijfhoek.



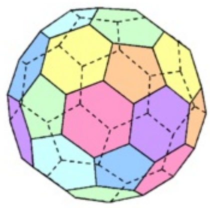
5 Half regelmatige of Archimedische veelvlakken

Archimedische veelvlakken of halfregelmatige veelvlakken. Dit omdat een Archimedisch veelvlak uit meerdere regelmatige veelvlakken bestaat. Denk aan kuboctader met 6 vierkanten en 8 gelijkzijdige driehoeken. Het is niet zomaar een Archimedische veelvlak, want het moet wel aan deze drie voorwaarden voldoen:

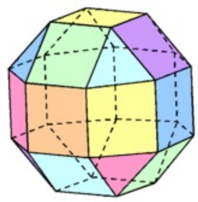
1. alle zijvlakken moeten regelmatige veelhoeken zijn
2. alle hoekpunten moeten op een bol liggen
3. in elk hoekpunt komen evenveel lijnen bij elkaar



Kuboctaëder



Afgeknotte Icosaëder



Romboëdrisch Kuboctaëder

Naast de Archimedische veelvlakken zijn er nog twee andere soorten, waar we in dit werkstuk niet dieper op ingaan, maar wel willen benoemen. Het zijn de regelmatige prisma's en anti-prisma's.
Regelmatige prima's bestaan uit twee regelmatige veelvlakken. Want bij een regelmatige prisma zijn het grondvlak en bovenvlak gelijk. En dus zijn de opstaande vlakken allemaal vierkant. In 4.3 is bewezen dat er hooguit 5 regelmatige veelvlakken zijn, dus zijn er vijf soorten prisma's.
De regelmatige anti-prisma's ontstaan door de regelmatige prisma's. Je moet dan het bovenvlak van de regelmatige prisma zo draaien dat de hoekpunten van de bovenvlak recht boven het midden van een zijde van het ondervlak. Ook nu zijn de grondvlak en bovenvlak hetzelfde. Maar de opstaande vlakken zijn nu niet vierkant maar zijn nu gelijkzijdige driehoeken. Omdat de lengte van de ribben gelijk moeten zijn.
Maar hoe zit dat dan bij de Archimedische veelvlakken. Daar willen wij meer over vertellen in het volgende stuk over de dertien Archimedische veelvlakken.

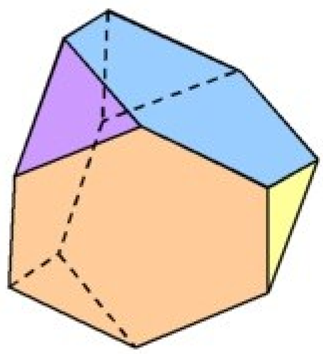
Het bijzondere aan Archimedische veelvlakken is dat er maar dertien zijn en dat is best weinig. In de tabel hieronder staan de dertien Archimedische veelvlakken die we verderop waar we verder op willen laten zien dat ze bestaan en hoe!

Naam	Vlakken
Afgeknotte tetraëder	8 (4 driehoeken en 4 zeshoeken)
Cubo-octaëder	14 (8 driehoeken en 6 vierkanten)
Afgeknotte octaëder	14 (6 vierkanten en 8 zeshoeken)
Afgeknotte hexaëder	14 (8 driehoeken en 6 achthoeken)
Icosidodecaëder	32 (20 driehoeken en 12 vijfhoeken)
Afgeknotte dodecaëder	32 (20 driehoeken en 12 tienhoeken)
Afgeknotte icosaëder	32 (12 vijfhoeken en 20 zeshoeken)
Romboëdrisch kuboctaëder	26 (8 driehoeken en 18 vierkanten)
Afgeknotte kubocaëder	26 (12 vierkanten, 8 zeshoeken en 6 achthoeken)
Romboëdrisch icosidodecaëder	62 (20 driehoeken, 30 vierkanten en 12 vijfhoeken)
Afgeknotte icosidodecaëder	62 (30 vierkanten, 20 zeshoeken en 12 tienhoeken)
Stompe hexaëder	38 (32 driehoeken en 6 vierkanten)
Stompe dodecaëder	92 (80 driehoeken en 12 vijfhoeken)

Nu willen we laten zien hoe deze Archimedische veelvlakken ontstaan. Het is belangrijk om eerst te vermelden dat half-regelmatige veelvlakken ontstaan uit de vijf regelmatige veelvlakken. We weten dat de regelmatige veelvlakken door een bol omschreven kunnen worden.

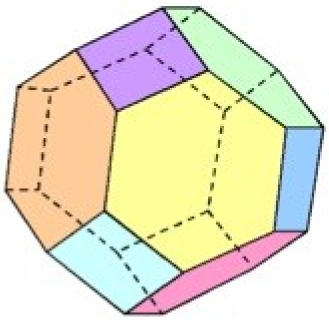
5.1 Afgeknotte tetraëder

Deze afgeknotte tetraëder bestaat uit 4 gelijkzijdige driehoeken en 4 gelijkzijdige zeshoeken. Deze afgeknotte tetraëder is ontstaan door de vier punten van de tetraëder af te snijden totdat de vier zijvlakken van de tetraëder totdat er vier regelmatige zeshoeken overblijven. De vier regelmatige driehoeken ontstaan vanuit de vier hoekpunten waar je begint met afknotten. In elke hoek komen evenveel ribben bij elkaar, een voorwaarde voor een (half)regelmatig veelvlak. Maar ook de hoeksamenstelling is hetzelfde. Zo is hier de hoeksamenstelling: driehoek,zeshoek,zeshoek ook wel (3,6,6). En dit kan je voor elk halfregelmatig veelvlak doen.
Als we nog verder gaan met afknotten tot het midden van de ribben van de regelmatige zeshoek, krijg je weer de tetraëder, waar je mee begonnen bent.



5.2 Afgeknotte octaëder

Deze afgeknotte octaëder ontstaat ongeveer op dezelfde wijze als de afgeknotte tetraëder. Je begint vanuit de vier hoekpunten met afknotten tot het midden van de ribben van de octaëder. Zo worden de driehoeken dan zeshoeken en tussen de zeshoeken krijg je vierhoeken. En zo heb je zes zeshoeken en acht vierhoeken. Ook hier komen drie ribben samen in een hoek en de hoeksamenstelling is (4,6,6) ofwel (vierkant,zeshoek,zeshoek).
Als je doorgaat met het afknotten van de afgeknotte octaëder krijg je de kuboctaëder. Dat ook weer een halfregelmatig veelvlak is.



Op deze manier ontstaan alle dertien half-regelmatige veelvlakken uit regelmatige of uit andere half-regelmatige veelvlakken.

5.3 Het maken van een figuur

We hebben van rietjes een Romboëdrisch kuboctaëder in elkaar gezet. Een Romboëdrisch kuboctaëder is een figuur met 18 vierkanten en 8 driehoekjes, dus in totaal 26 vlakken. We zijn simpelweg begonnen met een heel lang touw en daar eerst een vierkant van rietjes mee geconstrueerd. Nu hadden we twee lange uiteinden touw en konden we aan beide zijden verder gaan met het in elkaar zetten van het figuur. Halverwege kwamen we erachter, dat het touw 2 keer door elk stuk rietje ging. Hiervan werd het figuur ook steviger. We hebben ook verschillende kleuren rietjes gebruikt. Uiteindelijk was het figuur helemaal symmetrisch, zelfs zo dat 2 vierkantjes met dezelfde kleur precies tegenover elkaar zaten.
Hieronder het eindresultaat: