GG15

Algemene inleiding logica

Deel I

S.J. Doorman

TU Delft

Technische Universiteit Delft

Faculteit der Wijsbegeerte en Technische Maatschappijwetenschappen

HOOFDSTUK I INLEIDING

Een tak van wetenschap kan in het algemeen binnen het kader van een inleiding worden beschreven door achtereenvolgens te schetsen met wat voor soort problemen onderzoekers zich bezig houden, welke motieven daartoe hebben geleid en welke methoden bij het zoeken naar oplossingen worden gehanteerd.

Aanduiding van het soort probleem

In het debat over wetenschappelijke, morele, politieke of filosofische kwesties komt het regelmatig voor dat er opmerkingen worden gemaakt van de volgende vorm:
"Wat bedoel je nu precies", "waarop baseer je die conclusie",
"ja, maar uit wat je nú beweert volgt toch (noodzakelijk) ...",
"daaruit (uit die premissen) moeten wij toch concluderen ...", etc.
Laten wij ervan uitgaan dat de deelnemers aan het debat er naar streven elkaars opvattingen zo redelijk mogelijk te onderzoeken. Dit betekent dat zij ernaar streven om hun fundamentele uitgangspunten (de premissen voor het debat) expliciet en nauwkeurig te formuleren, teneinde vervolgens na te gaan welke gevolgtrekkingen uit die premissen kunnen worden getrokken.
De wijze waarop een redelijk debat over een specifieke these tot een beslissing komt zouden wij ons nu als volgt voor kunnen stellen:
Een der debatterende partijen heeft laten zien dat de these logisch voortvloeit uit een aantal premissen. Twee situaties kunnen zich voordoen, aangenomen dat alle gesprekspartners steeds volledige overeenstemming kunnen bereiken over wat wèl en wat niet logisch volgt uit de premissen:
1. Men kan het eens worden over de waarheid van de premissen. De discussie is in het voordeel van de these beslist.

2. Een der deelnemers aan het debat kan laten zien, dat er een voor alle deelnemers onware bewering is, welke nochtans logisch uit de premissen volgt. Daarmede is de these op losse schroeven geplaatst. (Eén der premissen is weerlegd; dit betekent overigens nog niet dat de discutabele these zèlf verworpen moet worden.)

In deze analyse van een redelijk debat hebben wij verondersteld, dat wij een algemeen aanvaardbaar onderscheid kunnen maken tussen logisch correcte en logisch incorrecte argumentaties. Onder een logisch correcte argumentatie verstaan wij hierbij ruwweg het afleiden van een conclusie uit premissen met gebruikmaking van geaccepteerde redeneerbeginselen. Wij willen met zo'n argumentatie in het algemeen laten zien, dat de conclusie *in redelijke mate* door de premissen wordt gesteund. Vaak hebben de debatterende partijen die redeneerbeginselen niet expliciet en systematisch geformuleerd. Maar wij moeten deze situatie vergelijken met taalvaardigheid: Het is immers kennelijk heel wel mogelijk om het Nederlands te kunnen spreken (en derhalve in staat te zijn om correct gevormde volzinnen te onderscheiden van verkeerd gevormde zinnen) zonder te weten hoe een adequate grammatica (d.i. een stelsel regels waarmee dat onderscheid beschreven kan worden) voor het Nederlands er uitziet. Het is de taak van een linguist om een grammaticale beschrijving op te sporen van een taal; hoewel een linguist daarmee niet beschrijft wat er in het hoofd van een vaardige taalgebruiker gebeurt, kan zo'n beschrijving van een gegeven taal indirect de taalvaardigheid verklaren.
Naar analogie hiervan kunnen wij voorlopig stellen dat logici proberen de redeneerbeginselen op te sporen en expliciet te formuleren, welke aan het onderscheid tussen correcte en incorrecte argumentaties ten grondslag liggen.

Wij moeten hierbij bedenken, dat het begrip "argumentatie" hier nog een zeer ruime betekenis heeft. Vaak bestuderen wij specifieke deelklassen; wij noemen twee prominente voorbeelden.
1. *Deductieve argumentaties.* Intuitief gesproken handelt het hierbij om argumentaties, waarbij de conclusie noodzakelijk geaccepteerd moet worden indien wij de premissen eenmaal hebben aanvaard. Denk hierbij aan wiskundige redeneringen.
2. *Inductieve argumentaties.* Wij denken hierbij aan het argumenteren van de aanvaardbaarheid van een algemene hypothese (de conclusie) op grond van geobserveerde data (de premissen).

In al deze gevallen bestuderen logici argumentaties inzoverre als het publieke objecten zijn: Een logicus is niet geinteresseerd in wat er omgaat in iemands brein (logica is géén denk-leer!); logici onderzoeken argumentaties voorzover zij in de taal zijn uitgedrukt. Deze taal kan een deel zijn van de gewone omgangstaal; ook is het mogelijk dat de bestudeerde argumentaties uitgedrukt worden in een meer formele taal (vgl. wiskunde, mathematische fysica). Wèl gaat het steeds om *informatief* taalgebruik: Wij beschouwen slechts beweringen (declaratieve volzinnen), welke informatie over standen van zaken coderen. Andere vormen van taalgebruik (bevelen, rhetorische uitroepen, gevoelsuitingen zoals "Bah!", e.d.) blijven in het vervolg derhalve buiten beschouwing.

Een correcte argumentatie legt vast, dat de conclusie "in redelijke mate" wordt gesteund door de premissen. De kwalificatie "in redelijke mate" heeft overigens een verschillende betekenis ten aanzien van de diverse subklassen van argumentaties. Voor deductieve argumentaties betekent de kwalificatie: Wie de premissen aanvaardt, *moet* de conclusie aanvaarden. Bij inductieve argumentaties is daarentegen sprake van "mate van waarschijnlijkheid". Logici bestuderen ook deze kwalificaties. Bovendien onderzoeken zij of deze beoordeling van de steun, welke de argumentatie aan de conclusie geeft, algemeen gerechtvaardigd kan worden.

Samenvattend: Logici bestuderen de verschillende soorten van argumentaties met de bedoeling om:

1. het onderscheid tussen correcte en incorrecte argumentaties te preciseren;
2. de principes welke aan dat onderscheid ten grondslag liggen expliciet en systematisch te formuleren;
3. te analyseren in hoeverre de veronderstelde "redelijke mate van steun", welke de premissen in een correcte argumentatie aan de conclusie geven, gerechtvaardigd is.

De uitvoering van de programmapunten (1) en (2) culmineert in de precieze definitie van "logische gevolgelijkheid" voor het beschouwde argumentatie-gebied; het derde programmapunt behoort in belangrijke mate tot de filosofie van de logica.

Motieven

In onze eeuw is logica vooral ontwikkeld in de contekst van wiskundige bewijstheorie. Wiskundigen formuleren en analyseren "bewijzen". Juist daarom wordt wiskunde door velen beschouwd als de deductieve wetenschap "par excellence". Grondslagencrises in de wiskunde, teweeggebracht door onvoorziene paradoxen (vgl.: in de Griekse oudheid door de ontdekking van irrationale getallen; omstreeks 1900 door de ontdekking van paradoxen in de verzamelingenleer) stimuleerden expliciet onderzoek naar de structuur van wiskundige bewijzen. Het is derhalve niet zo vreemd, dat logici zich vooral bezig hielden met deductieve argumentaties. De axiomatische methode in de wiskunde (Euclides, Hilbert) kunnen wij in dit verband opvatten als een analyse van het begrip "deductief redeneren". Met de constatering dat logica zich vooral als studie van deductieve argumentaties heeft ontwikkeld is overigens niet gesteld, dat logica zich tot die wiskundige contekst moet beperken. In deze syllabus zullen wij ons echter uitsluitend met deductieve argumentaties bezig houden.

Wij noemen nog enkele directe aanleidingen om logische problemen te bestuderen:

1. Het optreden van paradoxen (tegenstrijdigheden).
2. Beter begrip van het formele karakter van wiskunde.
3. Algemene analyse van formele talen; beter begrip van de logisch-semantische structuur van het informatieve gedeelte van natuurlijke talen.
4. Het eventueel zodanig verbeteren van onze uitdrukkingsmiddelen, dat opvattingen welke met die uitdrukkingsmiddelen formuleerbaar zijn, beter toegankelijk worden voor kritiek.

Gebruikte onderzoeksmethoden

Moderne logici bestuderen logische problemen met mathematische middelen. Hiermee wordt bedoeld, dat logici zich enerzijds bedienen van symbolische representaties, zoals dat onder wiskundigen reeds lang goed gebruik was.

Anderzijds zullen wij in het vervolg zien, dat onderzoek naar de verschillende eigenschappen van bijvoorbeeld de logische gevolgelijkheidsrelatie een sterk, zij het elementair, wiskundig karakter heeft. Logica wordt daarom tegenwoordig ook wel aangeduid als mathematische logica. Het zou echter onjuist zijn om hieruit te concluderen, dat mathematische logica alleen over wiskundige redeneringen gaat!

Deze syllabus is bedoeld als inleiding in de theorie van elementaire talen en hun formele semantiek (zgn. Tarski-semantiek). Toepassingen liggen op het gebied van het karakteriseren van wiskundige structuren. In het laatste hoofdstuk wordt ingegaan op enkele beperkingen waaraan het uitdrukkingsvermogen van elementaire talen onderworpen is. De theorie van de zogenaamde Turing-berekenbare functies blijft achterwege; wij verwijzen hiervoor naar het college a124 (Form.Syst.) van prof.dr.ir. W.L. van der Poel.

HOOFDSTUK II INTUITIEVE SEMANTISCHE OPBOUW VAN DE ELEMENTAIRE LOGICA

§1 *Deductieve argumentaties*

De taak van een logicus werd beschreven als het analyseren en beoordelen van argumentaties. Wij zullen eerst na moeten gaan wanneer wij een argumentatie logisch aanvaardbaar respectievelijk logisch verwerpelijk noemen.

Met een deductieve argumentatie of redenering beogen wij een bewering, de zogenaamde conclusie, aanvaardbaar te doen zijn op basis van bepaalde aanname's, de zogenaamde premissen. De argumentatie construeert een relatie tussen de beschouwde premissen en de conclusie, Deze relatie, ook wel aangeduid als "logische gevolgelijkheid", gaan wij nader omschrijven.

Eerste intuitieve omschrijving:

Indien iemand verdedigt, dat de conclusie C krachtens een correcte deductieve argumentatie logisch volgt uit de premissen $P_1, \ldots, P_n$, dan wordt daarmee bedoeld: Als men (eventueel op niet-logische gronden) aanneemt, dat de beweringen $P_1, \ldots, P_n$ alle waar zijn, dan moet onder die aanname de conclusie C waar zijn. De taak van een logicus laat zich nader omschrijven als de studie van deductieve argumentatieproblemen. De kwalificatie "deductief" is nodig, aangezien wij bijvoorbeeld ook wetenschappelijke redeneringen van niet strikt deductief karakter beschouwen als argumentaties. (Denk aan het argumenteren van de aannemelijkheid van een hypothese op grond van de beschikbare evidenties.) In het vervolg zullen wij echter steeds stilzwijgend veronderstellen, dat wij ons bezighouden met deductieve argumentatieproblemen.

Een argumentatieprobleem heeft de algemene vorm:

"Volgt de conclusie C logisch uit de premissen $P_1, \ldots, P_n$?"

Notatie: Een argumentatieprobleem wordt aangeduid met de zogenaamde sequent

$$P_1, \ldots, P_n \mid C$$

De sequent kunnen wij beschouwen als een argumentatieclaim.

Voorbeeld: Wij beschouwen de volgende sequent:

Ik koop alleen dan een auto, als mijn salaris is verhoogd (P_1)
Als ik niet een auto koop, dan blijf ik fietsen (P_2)
Mijn salaris is niet verhoogd (P_3)

Derhalve: Ik blijf fietsen (C)

Het woordje "derhalve" markeert de overgang van de premissen P_1, P_2 en P_3 naar de conclusie C.

Een logicus zal deze sequent als logisch correct accepteren. Dit betekent, dat hij het met deze sequent aangeduide argumentatieprobleem

$$P_1 , P_2 , P_3 \mid C$$

bevestigend beantwoordt. Hij doet zulks ongeacht de mogelijke omstandigheid, dat een of meer der premissen heel wel feitelijk onjuist kunnen zijn. De vorm van de beweringen, die in deze sequent optreden, is echter zodanig, dat de argumentatie van $P_1, \ldots, P_n$ naar C uitsluitend krachtens die vorm correct is, ongeacht de specifieke omstandigheden, welke zich voordoen met betrekking tot het feitelijk waar of onwaar zijn van de in die argumentatie voorkomende beweringen. Wat kan hier nu bedoeld zijn met het woord "vorm"?

Ruwe omschrijving van het begrip "vorm":

Wij bekijken de sequent uit het voorbeeld meer gedetailleerd. Een bewering als

ik blijf fietsen

verwijst onmiddellijk naar een stand van zaken, die feitelijk al dan niet optreedt. De bewering

mijn salaris is verhoogd (zie P_1)

kan ook als zodanig worden beschouwd. De bewering

mijn salaris is niet verhoogd (d.i. P_3)

is uit de zojuist genoemde bewering geconstrueerd door toevoeging van het woordje "niet". Wij kunnen P_3 derhalve beschouwen als een complexe bewering; de waarheidswaarde van P_3 wordt ondubbelzinnig bepaald door enerzijds de waarheidswaarde van de niet-complexe, onmiddellijk verwijzende bewering

mijn salaris is verhoogd

en anderzijds de semantische eigenschappen van het woordje "niet". Wij kunnen het woordje "niet" beschouwen als een niet-verwijzend taalelement:

Het woordje verwijst niet naar een extra-linguistisch object of feit. De status van het woord "niet" laat zich het best aanduiden met de term "waarheidsfunctie". Wij komen daar later op terug.

De structurele, niet-verwijzende elementen, waarmede in de beschouwde sequent de premissen als complexe beweringen zijn geconstrueerd uit direct-verwijzende beweringen, geven wij hieronder in volgorde:

alleen dan ---, als ...
als ..., dan ---
niet: ...

Wij noemen deze structurele bestanddelen "logische voegwoorden" of "logische connectieven". In de beschouwde sequent kunnen wij derhalve onderscheid maken tussen enerzijds de niet-logische bestanddelen, te weten simpele, onmiddellijk verwijzende beweringen, en anderzijds de logische bestanddelen, te weten logische voegwoorden zoals de implicatie (als ..., dan ---) en de negatie (niet ...).

Wij kunnen het verschil tussen vorm en inhoud van een redenering alleen zichtbaar maken door voor alle niet-logische bestanddelen variabelen te introduceren. Voor ons voorbeeld betekent dit, dat ik voor de bewering

Ik koop een auto

de variabele φ introduceer. Vervolgens wordt voor de bewering

Mijn salaris is verhoogd

de variabele ψ geintroduceerd. Tenslotte wordt voor de uitspraak

Ik blijf fietsen

de variabele χ ingevoerd. De sequent ziet er nu als volgt uit:

Alleen dan φ, als ψ
Als niet φ, dan χ
Niet ψ
Derhalve: χ

Wij zouden deze laatste sequent de <u>vorm</u> kunnen noemen van de eerste sequent. Wij hebben afgezien van de specifieke inhoud van de eerste redenering. In feite is de precieze vorm in de zojuist gegeven versie nog enigszins gemaskeerd. Dit is het gevolg van het feit, dat wij twee verschillende frasen gebruiken als aanduiding voor de implicatie, te weten:

"Alleen dan ..., als ---" en "Als ..., dan ---"

De bewering:

Ik koop alleen dan een auto, als mijn salaris is verhoogd

laat zich evenwel als volgt herformuleren met behoud van dezelfde waarheidswaarde:

Als ik een auto koop, dan is mijn salaris verhoogd

Opmerking: Indien de lezer twijfelt over de vraag of dit een adequate parafrase is, moet hij wel bedenken, dat de tijdsvolgorde van de verschillende gebeurtenissen hier geen relevantie heeft. Van belang is slechts de vraag hoe de waarheidswaarde van de complexe bewering afhangt van de waarheidswaarden van de twee simpele beweringen. (Zie ook pag.13).

De precieze vorm van de sequent uit het voorbeeld is derhalve:

Als φ, dan ψ

Als niet φ, dan χ

Niet ψ

Derhalve: χ

Wij kunnen vervolgens constateren, dat, indien wij willekeurige, doch specifieke beweringen invullen voor de letters φ, ψ en χ, de ontstane redenering steeds aanvaardbaar is. Iedereen die enige training heeft gehad in deductief denken zal met het accepteren van deze argumentatie geen enkele moeite hebben.

Laten wij aan de hand van het beschouwde voorbeeld onze eerste intuitieve omschrijving van een logisch correcte argumentatie thans wat verfijnen. Met de frase

"Als P_1, P_2 en P_3 alle waar zijn, dan moet C waar zijn"

wordt bedoeld, dat voor iedere omstandigheid, waaronder P_1, P_2 en P_3 ware beweringen representeren, geldt dat ook C een ware bewering representeert. Een omstandigheid kunnen wij nu definiëren als een specifieke substitutie van (feitelijk ware of onware) beweringen voor φ, ψ en χ in de beschouwde sequent.

De beschouwde argumentatie is logisch correct dan en slechts dan als er geen substitutie van specifieke beweringen voor φ, ψ en χ is aan te geven, waaronder P_1, P_2 en P_3 in ware beweringen overgaan, en C in een onware bewering overgaat.

Wij drukken dit ook wel uit door te zeggen, dat de beschouwde argumentatie een logische gevolgelijkheid representeert. Een uiterst voorlopige omschrijving van dit begrip zou kunnen zijn: De argumentatie is "onder alle omstandigheden geldig". Ook zeggen wij wel eens: de argumentatie heeft krachtens haar vorm "onbeperkte geldigheid". De bedoeling van deze zegswijzen is om tot uitdrukking te brengen, dat de argumentatie onder al die omstandigheden waarin de premissen waar zijn, steun geeft aan de waarheid van de conclusie C.

Logica houdt zich bezig met die eigenschappen van de vormen van redeneringen welke ervoor verantwoordelijk zijn, dat argumentaties soms uitsluitend krachtens hun vorm de hierboven beschreven eigenschap hebben. Om nu tot dergelijke vaststellingen te komen heeft de logica een techniek ontwikkeld, die hier in twee punten wordt samengevat:

(1) Door de introductie van variabelen (voor beweringen zoals boven, of voor eigenschappen, voor relaties, etc.) kan een scherp onderscheid worden gemaakt tussen de vorm en de inhoud van beweringen en argumentaties.

Voorbeelden:

(a) Het hierboven gegeven voorbeeld is een voorbeeld waarbij variabelen werden geintroduceerd voor feitelijke beweringen.

(b) Beschouw de uitspraak "Alle mensen zijn sterfelijk". Stel wij willen de vorm vaststellen van deze uitspraak. In de bewering komt de eigenschap mens voor zowel als de eigenschap sterfelijk te zijn. Bovendien worden die eigenschappen toegekend aan individuen. De uitspraak zegt derhalve: "Voor alle individuen geldt: Als zij de eigenschap hebben mens te zijn, dan hebben zij ook de eigenschap sterfelijk te zijn". De algemene vorm kunnen wij als volgt construeren:

zij "M(x)" de bewering: "x is een mens";
zij "S(x)" de bewering: "x is sterfelijk";

de vorm van de genoemde uitspraak ziet er dan als volgt uit:

"Voor alle x geldt: Als M(x), dan S(x)".

In dit geval hebben wij de volgende variabelen geintroduceerd: de variabelen M en S voor eigenschappen, en de variabele x voor individuen.
De vorm van de genoemde bewering is nu volledig expliciet gemaakt. Het geven van een specifieke inhoud komt tot stand door voor M en voor S specifieke eigenschappen te introduceren, en vervolgens voor het waardengebied van de variabele x een willekeurig gebied van individuen aan te wijzen.

(2) Methoden worden ontwikkeld op grond waarvan de logicus het begrip logische gevolgelijkheid zodanig nauwkeurig kan definiëren, dat men van een redenering de logische gevolgelijkheid kan vaststellen, ongeacht de specifieke inhoud van die redenering.

Wij zullen in de volgende paragrafen deze beide punten wat nauwkeuriger beschouwen.

§2 *Logische operatoren en quantoren*

Het begrip "formele taal" komt op natuurlijke wijze voort uit een zodanig systematisch introduceren van variabelen, dat de logische vorm van beweringen en argumentaties volledig expliciet is gemaakt. In zekere zin is dit met de wiskunde reeds in een veel vroeger stadium gebeurd. Op het moment dat in de omgangstaal geschreven optel- en vermenigvuldigingshandelingen werden omgezet in een formele notatie, kon zich het vak algebra gaan ontwikkelen. Een wet als de volgende:

$$\text{voor alle } x \text{ en } y \text{ geldt: } x + y = y + x$$

kon pas tot uitdrukking worden gebracht toen voor individuele telgetallen de variabelen x en y waren geïntroduceerd. De wet

$$x + y = y + x$$

brengt de algemene vorm tot uitdrukking van specifieke beweringen als "2 + 3 = 3 + 2", "5 + 89 = 89 + 5", etc.

Bij de logica gaat het uiteraard om het introduceren van een geschikte notatie voor typisch logische voegwoorden. Want juist zoals in de wiskunde voor de typisch wiskundige operatoren passende symbolen werden geïntroduceerd ($+$, $.$, $\surd$, $\frac{\partial}{\partial x}$, etc.) om de wiskundige vormen makkelijk leesbaar te maken, krijgen ingewikkelde logische uitspraken een heldere overzichtelijkheid door het introduceren van geschikte logische symbolen; mede daardoor kunnen logische vormen tot object van onderzoek worden gemaakt.
Voor het in §1 besproken voorbeeld van een redenering volstaat het symbolisme van de zogenaamde propositielogica (of beweringslogica).

De invoering van het symbolisme van de propositielogica geschiedt in twee stappen. In de eerste plaats worden letters φ, ψ, χ, ... ingevoerd als variabelen voor beweringen. Vervolgens worden vaste symbolen geintroduceerd voor logische voegwoorden; die symbolen worden opgevat als logische operatoren, waarvan de "werking" nauwkeurig wordt vastgelegd. Wij bekijken deze twee stappen wat preciezer door eerst aan te geven wat wij onder beweringen verstaan, en vervolgens de logische operatoren daadwerkelijk in te voeren.

Beweringen (ook wel genoemd: bewerende volzinnen, declaratieve volzinnen, proposities) zijn uitdrukkingen welke iets welbepaalds stellen (asserteren). Een bewering is een uitdrukking, welke waar of onwaar is.

Voorbeeld: Beschouw de volzin:

Ik koop een auto.

Deze volzin is een propositie. Daarentegen is de formule

$$x + 3 = 7$$

geen bewerende volzin. Immers, zonder te weten wat x is kunnen wij geen antwoord geven op de vraag of de formule een waarheid dan wel een onwaarheid uitdrukt.

Beweringen kunnen enkelvoudig (atomisch) of samengesteld (complex) zijn. In het laatste geval is er sprake van een uitdrukking, welke met behulp van één of meer logische voegwoorden uit één of meer enkelvoudige beweringen is opgebouwd.

Wij gaan nu een aantal logische operatoren introduceren. Wij noemen eerst het desbetreffende logische voegwoord; vervolgens wordt de notatie voor de ermee corresponderende logische operator aangegeven.

(1) "Als ..., dan ---".
Symbool: " $\rightarrow$ " , te plaatsen tussen twee beweringen in. Wij noemen deze operator de "implicatie".

(2) "Niet ... ".
Symbool: " $\neg$ " , te plaatsen vóór de bewering, die wordt ontkend. Deze operator wordt "negatie" genoemd.

Voorbeeld: Wij schrijven nogmaals de redenering uit ons voorbeeld op, nu in de volgende vorm:

premisse 1 : $\varphi \rightarrow \psi$
premisse 2 : $\neg\varphi \rightarrow \chi$
premisse 3 : $\neg\psi$
conclusie : χ

Wij kunnen deze redenering ook weergeven in de oorspronkelijke sequentenvorm; aldus:

$$\varphi \rightarrow \psi\ ,\ \neg\varphi \rightarrow \chi\ ,\ \neg\psi\ \mid\ \chi$$

Het specifieke geval verkrijgen wij door de volgende substitutie: substitueer "ik koop een auto" voor φ, "mijn salaris is verhoogd" voor ψ en "ik blijf fietsen" voor χ.

Naast implicatie en negatie worden in de propositielogica ook nog de volgende logische operatoren geintroduceerd:

(3) " ... en --- ".
Symbool: " $\wedge$ " , te plaatsen tussen twee beweringen in. Wij spreken in dit geval van de "conjunctie".

(4) " ... of --- ".
Symbool: " $\vee$ " , te plaatsen tussen twee beweringen in. Deze operator wordt aangeduid als "disjunctie".

In de propositielogica worden de eigenschappen van deze logische operatoren bestudeerd met de bedoeling om een nauwkeurige karakterisering te geven van de volgende concepten:
(a) "wet van de propositielogica"
(b) "logische gevolgelijkheid" voor argumentatieproblemen, geformuleerd in de propositielogica.

Belang van het gebruik van een symbolische taal:

Wij komen nog eenmaal terug op de opmerking op pag.9. Wij doelden er reeds op, dat de beweringsvorm

alleen dan ... als ---

door sommige taalgebruikers zou kunnen worden opgevat als

dan ... als ---.

Deze toehoorders interpreteren premisse 1 uit ons voorbeeld als

$$\psi \to \varphi$$

De bestaande dubbelzinnigheid wordt door de formele representatie van het gezegde onthuld. Het formele vertaalproces dwingt ons om ondubbelzinnig uitdrukking te geven aan datgene, wat wij in de gewone omgangstaal vaak dubbelzinnig, onhelder en met niet precies vastgelegde bedoelingen formuleren. Wij wijzen er tenslotte op, dat de ingevoerde operator " $\to$ " in feite staat voor een aantal verschillende zegswijzen in de gewone omgangstaal, zoals daar zijn:

"ψ is de noodzakelijke voorwaarde voor φ"
"φ is voldoende voorwaarde voor ψ"
"φ, dus ψ"

Voorbeelden:

(a) "Opdat het gaat regenen en koud wordt, is het een noodzakelijke voorwaarde dat de zon verdwijnt".
Introduceer nu de volgende variabelen:
φ =: het gaat regenen
ψ =: het wordt koud
χ =: de zon verdwijnt.
Vertaling: $(\varphi \wedge \psi) \to \chi$

(b) "Als de zon opgaat, dan wordt het warm of val ik dood".
Ga zelf na, dat voor een geschikte keuze van variabelen φ, ψ en χ de logische vorm van deze zin er aldus uitziet: $\varphi \to (\psi \vee \chi)$.

N.B.: Merk op, dat wij hier terloops haakjes hebben ingevoerd. Haakjes worden in het vervolg steeds beschouwd als hulpsymbolen welke nodig zijn om de juiste lezing van een op zich dubbelzinnige volzin of formule te garanderen. In dit opzicht kunnen zij vergeleken worden met een leesteken zoals een komma! Wij hadden overigens ook een plaatsing van de connectieven kunnen kiezen, welke dubbelzinnigheden bij voorbaat elimineert. De hier ingevoerde notatie wordt echter algemeen gebruikt.

Wij gaan de propositielogica vervolgens uitbreiden tot de zogenaamde predicatenlogica. Stel dat wij de logische vorm willen aangeven van de uitspraak:

"Alle mensen zijn onsterfelijk".

Naast de logische operatoren moet nu een notatie worden ingevoerd voor de logische quantor "voor alle x geldt".
De uitbreiding van propositielogica naar predicatenlogica wordt gemarkeerd door de invoering van twee logische quantoren:

(5) "Voor alle x geldt: --- "
Symbool: " $\forall x$ " , te plaatsen voor de uitdrukking waarin de variabele x optreedt. Deze quantor wordt "universele quantor" genoemd.

(6) "Er is tenminste één x zodanig dat ... "
Symbool: " $\exists x$ " , eveneens te plaatsen voor de uitdrukking waarin x optreedt. Deze quantor noemen wij de "existentie-quantor" (ook wel: "existentiële quantor").

Voorbeelden: · Stel dat wij voor de uitdrukking "x is een mens" en "x is sterfelijk" handhaven de respectievelijke uitdrukkingen M(x) en S(x). De vorm van de beschouwde bewering wordt dan:

$$\forall x\{ M(x) \rightarrow \neg S(x) \}$$

Deze algemene formule moet dan aldus worden gelezen: "Voor alle individuen x geldt: als x de eigenschap M heeft, dan heeft x niet de eigenschap S".

Zij voorts P(x) de aanduiding voor de zin "x is een paard" en Z(x) de uitdrukking voor "x is een zoogdier". De zin:

"Er is een paard dat geen mens is"

is vertaalbaar in de logische vorm:

$$\exists x\{ P(x) \wedge \neg M(x) \}$$

De bewering:

"Sommige sterfelijken zijn zoogdieren"

wordt naar zijn logische vorm vertaald in

$$\exists x\{ S(x) \wedge Z(x) \}.$$

Het deel van de logica dat zich uitsluitend bezig houdt met de karakterisering en bestudering van de hierboven aangegeven logische operatoren en quantoren ($\rightarrow$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\forall$, $\exists$) wordt de predicatenlogica (eigenschaps-, relatielogica) genoemd.

Terzijde kan worden opgemerkt, dat alle regels volgens welke wij zulke uitdrukkingen netjes moeten vormen, zo kunnen worden geformuleerd, dat het verifiëren van de juiste toepassing strikt mechanisch kan geschieden. Wij komen hier later op terug.

Het verdient aanbeveling om zich met enige voorbeelden te oefenen. Soms blijkt daarbij tot grote verrassing van de beginnende student, dat de gewone omgangstaal aanzienlijk veel dubbelzinniger is dan hij of zij op het eerste gezicht zou vermoeden. Bij vertaling in de formele taal treedt dit aan het licht, zodra participanten in een discussie ruzie krijgen over de vraag wat nu de juiste vertaling is.

□ *Opgave:*

Vertaal zelf de volgende beweringen:

(i) "Paarden zijn niet sterfelijk".

(ij) "Sommige zoogdieren zijn onsterfelijk".

(iij) "Mensen die geen paarden zijn, zijn ook geen zoogdieren".

(iv) "Geen paarden zijn mensen".

(v) "Sommige paarden zijn zoogdiéren als zij tenminste nòch mensen nòch onsterfelijken zijn".

Vergelijk na vertaling het resultaat met uw collega's. U zult ongetwijfeld verschillen ontdekken. Deze verschillen kunnen twee oorzaken hebben. Ten eerste is het mogelijk, dat u weliswaar verschillende logische vormen heeft weergegeven, maar dat nauwkeurige inspectie laat zien, dat de twee gevonden logische vormen equivalent zijn. Ten tweede is het mogelijk, dat u inderdaad van mening verschilt over de precieze vorm van de beweringen. De moraal van die eigenaardige ervaring is, dat de logische vorm van onze wat meer ingewikkelde zegswijzen vaak ondoorzichtig is. Helderheid brengen in onze uitdrukkingsmiddelen is een belangrijke functie van de logica. In feite ziet u hier in het klein wat de methodologie in het groot doet bij analyse van het wetenschappelijk theoretiseren. Ook daar wordt geprobeerd vaak verhulde wijzen van uitdrukken te saneren door soortgelijke verheldering.

§3 *Precisering van het begrip "logische gevolgelijkheid"*

Wij zullen thans moeten proberen een wat preciezere definitie te geven van het begrip "logische gevolgelijkheid van een redenering", in het vervolg ook wel aangeduid met de uitdrukking "logische bewijskracht van een redenering". Het is in zulke gevallen vaak een goede procedure om voor zo'n begrip een betrekkelijk vage aanzet te geven en vervolgens tot een meer exacte definitie te komen. Zo'n definitie zal overigens altijd getoetst moeten worden in die zin, dat moet worden nagegaan of oorspronkelijk vage bedoelingen in de definitie inderdaad op een heldere en nauwkeurige manier hun neerslag gevonden hebben.

In §1 werd reeds gesteld, dat logische bewijskracht geidentificeerd mag worden met zoiets als "onbeperkte geldigheid". Wij hebben dat laatste wat nauwkeuriger omschreven door te spreken van "geldigheid onder alle omstandigheden". Dit begrip wordt wederom iets scherper omlijnd door aan te geven, dat hiermede bedoeld wordt "geldig ongeacht de specifieke inhoud, d.w.z. slechts krachtens de vorm". Het begrip "vorm" is verduidelijkt met behulp van de introductie van variabelen. Wij bekijken nu weer een voorbeeld van een redenering. Wij kiezen ditmaal een redenering die geen logische bewijskracht heeft. Door vervolgens dat geval te vergelijken met ons eerste voorbeeld, kunnen wij wellicht tot de gewenste definitie van "logische gevolgelijkheid" komen.

Stel, iemand redeneert als volgt:

premisse 1 : "Als de zon schijnt, dan is het warm".
premisse 2 : "Het is warm".
conclusie : "Derhalve schijnt de zon".

De feitelijke omstandigheid dat premissen èn conclusie op dit moment heel wel waar kúnnen zijn (hetgeen vervolgens aan de redenering een zeker plausibel karakter kan geven) is toch niet voldoende om de redenering onbeperkt geldig te noemen. Wij kunnen zelfs laten zien dat deze redenering niet als algemeen correct gekwalificeerd kán worden. Daartoe construeren wij een redenering die precies dezelfde vorm heeft als de beschouwde argumentatie:

premisse 1 : "Als er leven is op de maan, dan is daar het element stikstof aanwezig".

premisse 2 : "Het element stikstof is aanwezig op de maan".

conclusie : "Er is leven op de maan".

Deze redenering nu kan beschouwd worden als een <u>tegenvoorbeeld</u> ten aanzien van een eventueel veronderstelde onbeperkte geldigheid van de oorspronkelijke redenering. Het tegenvoorbeeld bestaat uit een specifieke substitutie van beweringen voor de beweringsvariabelen φ en ψ in de sequent

$$\varphi \rightarrow \psi,\ \psi \mid \varphi$$

Wij noemen deze specifieke substitutie een tegenvoorbeeld, omdat de beide premissen door ons beschouwd worden als ware uitspraken, terwijl onder die substitutie de conclusie overgaat in een uitspraak die door ons wordt opgevat als onwaar.

Zo'n constatering kan leiden tot een algemene definitie. Beschouw in het algemeen een redenering

$$P_1, \ldots, P_n \mid C.$$

Definitie: Een tegenvoorbeeld ten aanzien van deze redenering is een substitutie voor alle in de redenering voorkomende beweringsvariabelen, waarbij de premissen in ware uitspraken overgaan en waarbij de conclusie overgaat in een onware uitspraak.

Thans zijn wij in staat om een algemeen criterium voor logische bewijskracht van een redenering te formuleren. Dat criterium luidt dan als volgt:
<u>Een redenering heeft logische bewijskracht dan en slechts dan als zij geen tegenvoorbeeld toelaat.</u>

Voorbeelden:

(a) premisse 1 : "Sommige mannen zijn kaalhoofdig".
premisse 2 : "Sommige kaalhoofdigen zijn oud".
conclusie : "Sommige mannen zijn oud".

Deze redenering heeft geen logische bewijskracht. Het tegenvoorbeeld ziet er als volgt uit:

premisse 1 : "Sommige mannen zijn mensen".
premisse 2 : "Sommige mensen zijn vrouwen".
conclusie : "Sommige mannen zijn vrouwen".