Op de NWD van 2005 stonden vier lezingen met wel hele korte titels op het programma: e, π, 0 en i. De laatste titel behoorde bij onderstaand verhaal van **Joop Doorman**. Van de 'numeri absurdi' naar de 'Theory of Everything'; de weg loopt via i.

De realiteit van '$\sqrt{-1}$'

Waar gaat wiskunde over?

Tijdens mijn HBS-tijd kwam voor mij de introductie van $\sqrt{-1}$ als een volkomen verrassing, die zelfs een geur had van oplichterij: eerder geleerde regels over het product van twee negatieve getallen werden hier met voeten getreden. Met enige urgentie drong zich, overigens niet voor de eerste keer, de vraag aan mij op: Waar gáát wiskunde toch over?
Wat mag eigenlijk wel en wat niet? Met deze vraag wordt één van de kernproblemen uit de filosofie van de wiskunde aan de orde gesteld: wanneer en in welke zin 'bestaat' een getal? Reeds in de Griekse oudheid werden verschillende antwoorden op deze vraag gegeven: Wiskundige entiteiten (dat wil zeggen getallen en geometrische figuren) 'zijn reëel' respectievelijk 'bestaan' als zij het resultaat zijn van een abstractie ten aanzien van de fysische realiteit (in het geval van een getal) òf van passer-en-liniaalconstructies (meetkunde). Naast dergelijke intuïtieve bestaansnoties zouden de volgelingen van Pythagoras (± 530 v.Chr.) volgens Aristoteles de sterk metafysische opvatting hebben gehuldigd dat getallen eigenlijk werkelijk bestaande entiteiten zijn waaruit al het overige in de kosmos voortkomt.

Met name deze intuïtieve bestaansnoties creëerde in de geschiedenis van de wiskunde een veelheid van sceptische bedenkingen tegen de invoering van 'nieuwe' getallen; bekende voorbeelden hiervan zijn het getal 0 en de negatieve getallen. Michael Stifel, een Duitse volgeling van Luther die zich na een mislukte voorspelling van het einde van de wereld de rest van zijn leven aan wiskunde wijdde, duidde in 1544 negatieve getallen aan als 'numeri absurdi'. De grote Arabische wiskundige al-Khwarizmi (780-850) ontzegde reeds eerder aan negatieve getallen iedere betekenis: alleen positieve getallen telden mee als mogelijke oplossingen voor kwadratische vergelijkingen. Negatieve getallen werden derhalve niet toegelaten als mogelijke wortels van algebraïsche vergelijkingen.

De weerstand tegen *complexe getallen* blijkt uit de diverse kwalificaties, die zij vanaf hun eerste optreden uitlokten: 'subtiel maar nutteloos', 'quantitates sophisticae' of zelfs 'onmogelijke getallen'; Descartes noemt hen 'imaginaires' ofwel slechts 'gedachteconstructies' en Euler spreekt in 1770 over 'Zahlen, welche ihrer Natur nach unmöglich sind'. Overigens verrijkte diezelfde Euler desondanks de wiskunde met zijn door Richard Feynman in 1966 als 'jewel for physicists' gekwalificeerde befaamde formule[1]. Het betreft hier de door fysici veelvuldig gebruikte formule:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Enkele historische opmerkingen

Het debat over de vraag of $(\sqrt{-1})^2$ als een getal geaccepteerd kan worden, explodeert als een bijproduct van de oplossingsmethode voor de kubische vergelijking, die Girolamo Cardano in 1545 publiceert in zijn *Ars Magna*[3].

Girolamo Cardano (1501 - 1576)

Cardano ontdekte een verontrustende stand van zaken bij de toepassing van de methode op de vergelijking:

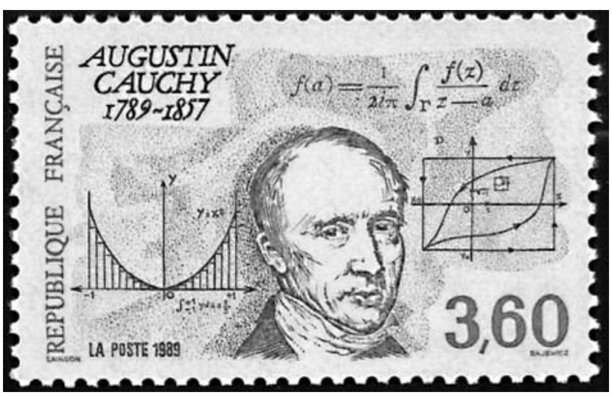
$$x^3 = 15x + 4 \qquad (*)$$

Het algoritme geeft hier namelijk als oplossing:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \qquad (**)$$

Gegeven het optreden van de uitdrukking $\sqrt{-121}$ in (**) kan dit resultaat niet als een oplossing van (*) worden opgevat. Toch is direct in te zien dat $x = 4$ een reële oplossing is voor (*)! Navraag bij collega's leverde Cardano

overigens geen bevredigende verklaring op voor deze kennelijke anomalie van het oplossingsalgoritme. In 1560 kreeg de Italiaanse wiskundige Rafaël Bombelli echter naar eigen zeggen ‘een woeste inval’: hij introduceerde rekenregels voor de behandeling van het symbool i, met behulp waarvan $\sqrt{-121}$ te schrijven is als 121i. Voorbeelden van zulke regels zijn (bi)(ci) = -bc en (-bi)(ci) = bc. De betekenisloze uitdrukking $\sqrt{-121}$ wordt in feite geëlimineerd; wij beschikken slechts over een symbool ‘i’ waarvan de betekenis *uitsluitend* door de rekenregels is bepaald. De grootheid i noemde hij weliswaar een sofisme, doch met slim gebruik van zijn regels kwam hij tot het inzicht, dat de somtermen uit de oplossing (**) gelijk zijn aan 2 + i en 2 – i; hiermee is de anomalie van Cardano verklaard: 2 + i + 2 – i = 4!
Voor het vervolg is een opmerking van Boyer et al van belang: ‘The solutions of the cubic and quartic equations were *in no sense* ... of any value to engineers and mathematical practitioners’ (mijn cursivering).
In 1629 formuleerde de Franse wiskundige Albert Girard als eerste het fundamentele theorema van de algebra. Dit dwong hem tot het gebruik van complexe getallen die ook door hem als ‘onmogelijk’ werden gekwalificeerd. Nochtans zag ook hij in dat hij voor deze niet bestaanbare objecten gebruiksregels moest geven. De bestaansvraag wordt derhalve opgeschort. Ondanks deze halfslachtige omgang met ‘i’ duren de aarzelingen voort tot aan de eerste helft van de negentiende eeuw. Het zal namelijk tot 1847 duren voordat Cauchy de eerste stappen zet naar een voor alle wiskundigen aanvaardbare introductie van **C**[4] .



Augustin Cauchy (1789 - 1857)

De uiteindelijke acceptatie

John Stillwell[5] geeft een fraaie formulering voor een van de belangrijkste motieven voor de ontwikkeling van de abstracte algebra in de negentiende eeuw: de bron van wantrouwen van wiskundigen ten aanzien van ‘nieuwe’ getallen ligt meestal in het ontbreken van een algemeen conceptueel kader waarbinnen zij systematisch te introduceren zijn. Zo’n kader moet wiskundigen in staat stellen om in te zien hoe de ‘nieuwe’ getallen geconstrueerd kunnen worden via de uitbreiding van het reeds geaccepteerde domein van getallen (bijvoorbeeld het rationale lichaam **Q**) met de daarbij behorende algebraïsche operaties (som, product, quotiënt enzovoort). De operatie waarmee de uitbreiding plaats vindt moet zuiver wiskundig, dat is in termen van dit conceptuele uitbreidingskader, te beschrijven zijn. De studie van abstracte uitbreidingen van **Q** die de werking van reeds bekende operatoren (+, –, x, : enzovoort) conserveren, maakt aldus de constructie mogelijk van het nieuwe kader waarbinnen specifieke imaginaire getallen zoals i, 2 + i en 2 – i op een wiskundig aanvaardbare wijze kunnen worden geïntroduceerd. De vraag of er een getal x ‘bestaat’ dat voldoet aan het polynoom

$$x^2 + 1 = 0 \qquad (*)$$

kan dan worden gereduceerd tot de vraag: ‘Is het mogelijk om een uitbreiding van **Q** te construeren waarbinnen het polynoom (*) in lineaire factoren is te ontbinden?’
Zoals bekend gaat het hierbij steeds om de uitbreidingsconstructie door de toevoeging van een abstract symbool én de introductie van daarop van toepassing zijnde passende formele regels[6]. Zij namelijk gegeven het lichaam **F** en het polynoom $f(x) \in F(x)$ waarbij $f(x) = \sum a_i x^i$ met $0 \le i \le n$ en $a_i \in F$. Introduceer vervolgens het abstracte symbool β en vul het lichaam **F** aan met alle uitdrukkingen van de vorm $\sum u_i x^i$ met $0 \le i \le k$ voor een willekeurige k. Bewezen kan worden dat de aldus verkregen structuur **F**(β) een lichaam is dat **F** omvat. Merk nu op: de vergelijking

$$\mathrm{i} = \sqrt{-1}$$

die mij vroeger op school werd voorgetoverd, is hiermee voorgoed verbannen! Het feit dat de hele strijd over de aanvaardbaarheid van $\sqrt{-1}$ hiermede gereduceerd is tot een probleem dat binnen de zuivere wiskunde kan worden opgelost, blijft evenwel van belang voor het filosofische kernprobleem waarmee dit opstel begon. Dit vereist enige toelichting.
Onze discussie heeft opgeleverd dat wij de algemene vraag ‘Wanneer en in welke zin ‘bestaat’ een getal?’ aldus kunnen beantwoorden: een getal bestaat indien het construeerbaar is met behulp van zuiver wiskundige constructies. Ik vroeg me direct af hoe dat van toepassing is op getallen als π en e? Antwoord: Dat zijn transcendente getallen, die niet kunnen optreden als wortel van een algebraïsche vergelijking. Zij kunnen in de analyse worden geïntroduceerd met behulp van oneindige rijen. Dit is overigens precies de reden waarom de fundamentele stelling van de algebra niet zuiver algebraïsch bewezen kan worden. Met dat laatste wordt ruwweg bedoeld dat het om formele constructiemethoden gaat die op zuiver abstracte (vorm)structuren van toepassing zijn.
Toch zijn wij niet geheel uit de problemen. De verbluffend succesvolle toepasbaarheid van de wiskunde op de fysische realiteit blijft hierbij een totaal mysterie.
De receptiegeschiedenis van het domein **C** van de complexe getallen kan illustreren waar het hier om gaat. Ik wees reeds eerder op een opmerking van Boyer et al. Wij kunnen in feite uit de historische schets concluderen, dat

de gehele discussie over **C** vooraf gaat aan de fysische toepassingen die zich pas voordoen in de tweede helft van de negentiende eeuw[7]. Enerzijds lijkt het er dus op dat ons intellect geheel vrij van de werkelijkheid waarin wij leven exotische getallen en structuren voort kan brengen; voor zulke constructies is ons intellect kennelijk niet afhankelijk van de fysische realiteit. Anderzijds blijken zulke constructies in het algemeen uiteindelijk toch bruikbaar in de fysica. Met andere woorden: de wiskundige notie ‘bestaan’ lijkt nauw verbonden te zijn met de notie ‘bestaan’ voor fysische objecten en mechanismen!

Op dit punt gekomen, verlaten wij de historische schets van de receptiegeschiedenis van **C** binnen de wiskunde en betreden hieronder kort het drassige, want speculatieve terrein van kosmologische beelden betreffende het verband tussen wiskunde en fysische werkelijkheid. Aan de hand van een voorbeeld wil ik kort aangeven welke rol onze huidige opvattingen over het karakter van natuurwetten kunnen spelen bij kosmologische beelden van de werkelijkheid.

Complexe getallen en kosmologie

Tot slot wordt in deze paragraaf kort aangegeven hoe een bepaalde opvatting over het karakter van het begrip ‘natuurwet’ in combinatie met een bepaalde speculatief-kosmologische opvatting over de evolutie van het universum kan leiden tot een Oud-Griekse opvatting over het verband tussen wiskunde en de (fysische) realiteit.

Het wetenschappelijk gebruik van computers heeft er toe geleid dat het begrip ‘natuurwet’ vaak geassocieerd wordt met het begrip ‘algoritmische compressie’. Een voorbeeld moge dit verduidelijken. De bekende wet $p \cdot V = R \cdot T$ kan worden gezien als een rekenregel (algoritme) die een onbeperkte lijst van fysisch mogelijke verbanden tussen p, V en T samenvat door compressie van de informatie die in de lijst ligt opgesloten. Ofwel: een natuurwet voor de evolutie van een bepaald type systemen comprimeert de informatie-inhoud van de lijst van alle mogelijke verbanden tussen de observabelen tot een algoritmische regel. Aldus worden reeds waargenomen data via reproductie heugelijk gemaakt en zijn bovendien mogelijke toekomstige verbanden tussen de observabelen berekenbaar. In dit verband karakteriseert John Barrow wetenschap dan ook als *the search for compressions*[8].

Beschouw vervolgens de fundamentele kosmologische vraag: is het in beginsel mogelijk een eindige lijst van fundamentele natuurwetten op te stellen, die een complete beschrijving van de evolutie van het universum geeft?[9] Zo’n lijst wordt thans een *Theory of Everything* (een *ToE*) genoemd.

De Nederlandse Nobelprijswinnaar Gerard ‘t Hooft heeft op basis van de beschreven opvatting over het begrip ‘natuurwet’ een interessant gedachtenexperiment geopperd over de wijze waarop men zich zo’n *ToE* zou kunnen voorstellen[10]. Hij neemt daarbij het bekende computerspel Life van J. H. Conway als uitgangspunt. Het idee van dat spel is het volgende: laat K een tweedimensionaal cellulair automaton zijn met een onbepaald aantal cellen. De speler moet proberen een distributie van een eindig aantal actieve cellen te kiezen die beschouwd kan worden als de begintoestand van de evolutie van het systeem K. Voorts moet hij een eindige lijst regels ontwerpen die willekeurige K-toestanden steeds overvoeren in nieuwe toestanden. K is dus te beschouwen als een dynamisch systeem waarvan de evolutie geheel is vastgelegd door de lijst van regels die de reeks K-toestanden voortbrengt uit de gekozen beginconditities. De taak van de speler bestaat uit het ontwerpen van een systeem K dat op de duur configuraties voortbrengt die steeds complexer worden en zichzelf kunnen reproduceren. Zo’n K heeft dan complexe eigenschappen die wij ook in onze kosmos aantreffen!

Overigens kan voor dit spel via computersimulaties aannemelijk worden gemaakt dat er inderdaad systemen K te ontwerpen zijn die zowel de evolutie van steeds complexere systemen als zelfreproductie kunnen modelleren.

‘t Hooft merkt op dat wij de software, die de evolutie van K genereert, kunnen opvatten als een *ToE* voor K.

Met deze modellering van het begrip *ToE* correspondeert een bepaald kosmologisch beeld van het heelal. Dat heelal zou dan namelijk een supercomputer zijn, die zijn eigen evolutie berekent conform de door de *ToE* gekarakteriseerde software.

Zo komen wij binnen deze kosmologische speculatie over mogelijke *ToE*’s tenslotte uit op de verrassende kosmologie van de eerder genoemde volgelingen van Pythagoras: wiskundige objecten zoals getallen, zijn de enige werkelijk bestaande entiteiten, omdat de werkelijkheid niets anders dan wiskunde is!!

Voor wie dit een aantrekkelijk kosmologisch beeld vindt, zijn de wiskundige anticipaties van fysische toepassingen niet langer een mysterie. De opvatting dat ons intellect wiskundige constructies autonoom voortbrengt is een illusie die overigens in de *ToE* reeds besloten lag.

Joop Doorman, Waarder

Noten

[1] Zie ook zijn *Lectures on Physics I* (1963), beter bekend als de *Feynman lectures*.

[2] -1 wordt in het vervolg ook aangeduid met *i*.

[3] Geronimo Cardano: *Ars Magna* (1545). Feitelijk betreft het de eerste publicatie van de door Scipione del Ferro rond 1506 reeds gevonden oplossing. Zie ook V. Katz, *A History of Mathematics, An Introduction* (1998). Voor deze paragraaf is tevens geput uit C. B. Boyer & U. C. Merzbach *A History of Mathematics* (1962, 1982). Bijzonder instructief is J. van Maanen: *C avant la lettre* (1987), een uitgave van het Centrum voor Wiskunde en Informatica.

[4] In de hedendaagse algebraïsche terminologie introduceerde Cauchy de nieuwe getallen als polynoomklassen mod(x^2+1) in het exact definieerbare domein

Q(x)/(x^2+1). Het algebraïsche gedrag van die klassen voldoet namelijk precies aan de gebruiksregels, die eerder voor **C** waren opgesteld.

[5] John Stillwell (1994). *Elements of Algebra*.

[6] Zoals bekend gaat het hierbij steeds om de uitbreidingsconstructie door middel van de toevoeging van een abstract symbool en de introductie van daarop van toepassing zijnde passende formele regels. Met deze ontwikkeling van de abstracte algebra zijn vooral de namen van Galois, Cauchy, Dedekind en Emmy Noether verbonden.

[7] **C** speelt vaak een belangrijke rol wanneer de dynamica van een fysisch systeem wiskundig kan worden gerepresenteerd met een lineaire differentiaalvergelijking; vergelijk het gebruik van differentiaalvergelijkingen die fysische processen representeren en het gebruik van complexe Hilbertruimtes als faseruimte voor de wiskundige representatie van de mogelijke toestanden van een quantumsysteem.

[8] John T. Barrow (1994). Theories of Everything, in J. Hilgevoord (ed.): *Physics and our View of the World*, CUP. In feite gaat het hier om een nieuwe versie van een idee van de laat-negentiende eeuwse fysicus en filosoof Ernst Mach.

[9] Voorbeeld: Aan het einde van de negentiende eeuw leek het alsof de natuurkunde klaar was. De fundamentele wetten op het gebied van mechanica, elektromagnetisme, thermodynamica en elektronentheorie was toen een mogelijke kandidaat voor een *ToE*!

[10] Gerard 't Hooft: *Questioning the answers or Stumbling upon good and bad Theories of Everything in Physics and our View of the World* (zie noot 8). 't Hooft bespreekt in dit artikel zowel de mogelijkheden om een *ToE* te vinden als tegenargumenten tegen deze verwachting.