

Is Wiskundige Kennis van Enig Belang voor Inzicht in Onze Cultuur? Dat was de titel van de plenaire voordracht die **Prof. Doorman** hield op de Nationale Wiskunde Dagen 1999. In dit filosofisch getinte betoog onder meer aandacht voor de verwantschap tussen wiskunde en muziek.

## Wiskunde en culturele vorming

### ‘Alfa-getekenden’

In een muziekprogramma voor de radio werd mij onlangs de vraag voorgelegd of de liefde die wiskundigen vaak koesteren voor klassieke muziek, zijn oorsprong vindt in onze hersenen. Ik antwoordde dat kennis van onze hersenen nog veel te beperkt is om daar iets over te kunnen zeggen. Ik suggereerde vervolgens dat overigens zowel het componeren van als het luisteren naar muziek interessante algoritmische kenmerken heeft. Ik lichtte die suggestie toe met een verwijzing naar ‘componerende’ computers. De vragensteller schrok van dit antwoord en stelde vervolgens een retorische vraag: ‘Een computer, die op basis van een of ander programma componeert, zal ons toch in ieder geval nooit met zijn composities kunnen ontroeren?!’ Waarop ik antwoordde met de wedervraag ‘Waarom niet?’ De consternatie van mijn ondervrager nam toe en na enige discussie over en weer besloot hij de discussie met de verzuchting ‘Tja, ik ben maar een alfa, dus laten wij maar verder gaan met iets anders’. De klemtoon, hierbij gelegd op ‘maar’ kon op zowel gecamoufleerde trots als op werkelijke onkunde wijzen.

Wiskunde wordt vaak gezien als een vak dat moeilijk toegankelijk is voor creatieve, fantasierijke mensen; alles ligt bij dit vak vast in dwingende regels, die het vrije spel van onze verbeeldingskracht in de weg staan. Dat maakt wiskunde wel geschikt voor het bestuderen van de natuur, waar het immers om vaste wetmatigheden gaat; doch met cultuur heeft zij niets te maken.

Met name diegenen die zich ‘een echte alfa’ noemen, lijden aan deze beeldvorming van de wiskunde. Ik zal hen in het vervolg ‘alfa-getekenden’ noemen.

Het lijkt mij tegen deze achtergrond verstandig om leerlingen die in het kader van het Cultuur & Maatschappij profiel met wiskunde in aanraking komen, ook eens wat meer van een zekere afstand naar wiskunde te laten kijken, teneinde een meer open intellectuele houding ten aanzien van de wiskunde juist bij die leerlingen te bevorderen. Natuurlijk, zij zullen ook in voldoende mate moeten leren om wiskundig over allerlei problemen na te denken; de hieronder gemaakte opmerkingen zijn slechts bedoeld om deze leerlingen óók over de samenhang tussen

aard van het wiskundig denken en de culturele betekenis van de wiskunde in verleden en heden te laten nadenken.

De kernvraag luidt derhalve: ‘In hoeverre is wiskunde vormend geweest in het verleden (en is zij dat nu nog) voor de westerse cultuur?’

Deze vraag wil ik hier toespitsen op drie kwesties:

1. De axiomatische betoogtrant als een methode om zich over een discipline of een stelsel van geloofsopvattingen zodanig nauwkeurig uit te drukken, dat enerzijds alle vaak verzwegen aannames volledig expliciet zijn gearticuleerd en anderzijds alle gevolgtrekkingen op een controleerbare wijze worden voortgebracht. Enig inzicht in de aard van die methode kan een belangrijke rol spelen in het karakteriseren van de intellectuele aspecten van onze culturele traditie.
2. De wiskundige aspecten van muziek, die ik hierboven ter sprake bracht.
3. De rol die computers spelen in het hedendaagse menselijke zelfbeeld. De (overigens omstreden) opvatting dat de menselijke geest in beginsel vergelijkbaar is met een computer, kan van invloed zijn op de verdere ontwikkeling van onze cultuur. Wat voor taken kunnen in de toekomst aan computers worden overgelaten? Hierbij kan bijvoorbeeld aan rechtspraak of psychotherapie worden gedacht.

### Expliciete articulatie van kennis en opvattingen

De axiomatische methode werd oorspronkelijk in de context van de Griekse wiskunde ontwikkeld. Toen Aristoteles (filosoof en onderzoeker van natuur en mens) haar in de loop van de vierde eeuw voor Chr. nauwkeurig beschreef, had hij overigens reeds meer algemene toepassingen van de axiomatische betoogtrant op het oog. Bij deze betoogtrant ligt de nadruk op twee belangrijke eisen bij het uiteenzetten of samenvatten van een kennisgebied of een samenhangende verzameling van opvattingen:

#### 1. *Begripsvorming*

De betekenis van ieder gebruikt begrip moet met behulp van (eventueel een keten van) definities zijn

vastgelegd in termen van een vooraf gespecificeerde lijst van primitieve begrippen, waarvan een manifeste betekenis ‘zonder meer’ als begrijpelijk wordt beschouwd.

## 2. *Beweerbaarheid*

Alle beweringen moeten deduceerbaar zijn uit een vooraf gespecificeerde lijst van axioma's met behulp van een eveneens vooraf gespecificeerde lijst van afleidingsregels.

Voor Aristoteles was dit de enige manier om voor ieder kennisgebied of domein van opvattingen duidelijk te maken wát de eerste beginselen waren op grond waarvan alle kennisbeweringen respectievelijk opvattingen van het beschouwde domein konden worden verdedigd. De vruchtbaarheid van deze methode werd voor de meetkunde schitterend aangetoond door de *Elementen* van Euclides (circa 300 voor Chr.).

In onze intellectuele traditie is deze vorm voor het uiteenzetten van inzichten op twee manieren gebruikt. In de eerste plaats kan de methode gezien worden als de ideale verzekering van waarheid voor de geaxiomatiseerde beweringen. Daarbij dient dan wel een zogenoemd evidentie-postulaat voor de axioma's te worden toegevoegd; als men er zich namelijk op kan beroepen dat de axioma's evident (!) waar zijn en voorts de bewijsregels invariantie van waarheid bij de overgang van premissen naar de conclusie garanderen, dan is daarmee de waarheid van alle bewijsbare beweringen van het axiomatische systeem gegarandeerd. Dit was precies de opzet van Euclides. De filosoof Spinoza (1632-1677) is een typisch voorbeeld voor dit gebruik van de axiomatische betoogtrant. In zijn hoofdwerk probeerde hij zijn metafysische en ethische opvattingen te axiomatiseren om daarmee een ‘onbetwifelbaar’ filosofisch systeem van stellingen op beide gebieden te presenteren.

De axiomatische methode kan echter óók worden beschouwd als een middel om in de verzameling thesen die men wil verdedigen, een zodanige orde aan te brengen dat daarmee expliciet duidelijk wordt wélke aannames feitelijk aan die thesen ten grondslag liggen. Het gaat in dit geval voornamelijk om een zo volledig en expliciet mogelijke uiteenzetting van inzichten, zonder dat ‘waarheids’verzekering in het beding behoeft te zijn. De Engelse filosoof A.N. Whitehead (1861-1947) achtte dit gebruik van de axiomatische betoogtrant van groot belang voor het onderzoek van wereldbeschouwingen: door een op deze methode gebaseerd onderzoek reduceert de vergelijking van wereldbeschouwingen zich dan tot de vergelijking van de fundamentele aannames die er de basis van vormen.

Een aardig voorbeeld uit de muziekgeschiedenis levert de Franse componist en muziektheoreticus J.Ph. Rameau op. In 1722 wordt zijn *Harmonieleer* gepubliceerd; Rameau maakt bij de uiteenzetting van zijn ideeën over harmonieleer gebruik van de axiomatische methode. In de inleiding tot zijn verhandeling schrijft hij: ‘Ik moet be-

kennen dat het aan de wiskunde te danken is dat mijn ideeën helder werden, waardoor een zekere obscuriteit werd vervangen door licht’. De axiomatische ordening verschaft het complexe geheel van zijn ideeën kennelijk ook voor hemzelf een onverwachtse luciditeit.

Alfa-getekenden zouden vooral uit dit tweede gebruik van de axiomatische methode een belangrijke les kunnen trekken. In plaats van zich aan het versleten cliché over een vermeend verschil tussen  $\alpha$ - en  $\beta$ -denkers te onderwerpen, lijkt het verstandiger een open oog te hebben voor pogingen om culturele verschijnselen zo nauwkeurig mogelijk te begrijpen. De hier beschreven, aan de wiskunde ontleende, methode voor de ordening van ideeën kan hiervoor goede aanknopingspunten opleveren.

## Wiskundige aspecten van muziekbeleving

Wiskunde heeft in de ontwikkeling van de beeldende kunsten een vruchtbare rol gespeeld. In dit verband wordt meestal gewezen op de geschiedenis van het perspectief in de schilderkunst gedurende de Renaissance en op de rol van mathematische verhoudingen in de architectuur van de verlichting. Alfa-getekenden zullen wellicht tegenwerpen dat deze nadruk op wiskundige aspecten van de kunstbeleving er meestal toe leidt dat de echte schoonheidservaringen worden weggeredeneerd. Hun ergeenis over de rekenmeesters vindt steun bij de Ierse politicus en filosoof E. Burke (1729-1798), die met zijn *Philosophical Enquiry into the Origin of Our Ideas of the Sublime and the Beautiful* (1757) de negentiende eeuwse romantische reactie op het classicisme voorbereidde. Burke had een grondige afkeer van de klassieke theoretici met hun gulle aandacht voor wiskundige verhoudingen en constructies in de kunsten. Volgens hem moet de oorsprong van de schoonheidservaringen gezocht worden in diepliggende instincten en gevoelens. Kunst is bij uitstek het domein van het gevoel. De emotioneel overweldigende aanblik van Shakespeare's oude koning Lear, die door het lot vernietigd rondwaalt tijdens een hevige uitbarsting van donder en bliksem, illustreert de ervaring van het sublieme, die voor Burke onze schoonheidsbeleving karakteriseert.

In de muziekgeschiedenis heeft zowel de opvatting dat muziek een grote verwantschap heeft met wiskunde als de theorie dat muziek een (gevoels-)expressieve kunst bij uitstek is, een lange geschiedenis. Lang bestonden deze opvattingen zelfs naast elkaar: tonale verhoudingen en modulaties, die te beschrijven zijn met nauwkeurige wiskundige verhoudingen, corresponderen met bepaalde emotionele stemmingen en hun dynamiek. Daarom kon de filosoof en wiskundige G.W. Leibniz (1646-1716) verklaren: ‘Muziek is een onbewuste oefening in rekenkunde, waarbij het intellect niet weet dat het aan het tellen is’. Bij hem vereist het uitvoeren van een werk naast zuiver muzikale vaardigheden ook een wiskundige activiteit. Laten wij een voorbeeld bekijken waarbij Leibniz' dictum in een meer uitgebreide zin kan worden verduide-

lijkt, namelijk de fuga. Deze muziekvorm laat zich ruw (!) aldus beschrijven: één stem introduceert een thema (het subject), dat vervolgens wordt overgenomen door een tweede stem in een andere ligging, terwijl de eerste stem voortgaat met een contrapuntische voortzetting of een tegenmelodie (contrasubject). Bij een tweestemmige fuga kan het spel beginnen. De fuga wordt verder ontwikkeld via de toepassing van muzikale operaties, die door conventies zijn vastgelegd (canon, thema-omkering, segmentering en recombinatie, harmonische modulaties, enzovoort). Voor ons doel is het niet van belang wát deze operaties precies inhouden; het gaat erom dat het in veel opzichten vastgelegde operaties zijn. De ontwikkeling moet tenslotte leiden naar een harmonisch-dynamische climax.

Het wonderbaarlijke en opwindende van muziek is overigens dat zo'n cerebrale vorm als de fuga in de handen van een groot componist, zoals bijvoorbeeld J.S. Bach, diep-emotionele luisterervaringen kan opleveren: de 'berekende' ontwikkeling gaat dan gepaard in het aandachtig luisterende oor met die merkwaardige muzikale verrukking, waarbij de intellectuele bewondering en het emotioneel meegesleept worden, samenvallen.

Hoe laat zich nu het componeren van een fuga beschrijven? J.A. Sloboda betoogt in *The Musical Mind; the cognitive psychology of music* (1985) op grond van mededelingen van componisten en experimentele gegevens het volgende. Het componeren omvat een proces van reflectie op de muzikale gevolgen van het toepassen van muzikale operaties op een muzikale structuur of constructie. Een enkele componist emancipeert daarbij de bestaande muzikale operaties of introduceert zelf een geheel nieuw systeem.

De verwantschap van muziek en wiskunde, in eerste benadering uitgedrukt in het dictum van Leibniz, wordt nu duidelijk. In de wiskunde gaat het immers vaak om reflectie op de wiskundige gevolgen van het toepassen van reeds bestaande of nieuw geconstrueerde *mathematische* operaties op een abstracte *wiskundige* structuur.

Naast de fuga zijn talrijke muziekvormen te noemen die evenzeer aan de hier gegeven algemene beschrijving voldoen. Ik noem als typische voorbeelden de variatievorm en de klassieke sonate. Edward Ruthstein geeft in zijn *Emblems of Mind: the inner life of music and mathematics* (1995) een aantal fraaie voorbeelden van de wijze waarop ons 'horen' van het materiaal (het motief dat aan variaties wordt onderworpen, respectievelijk het hoofd- en neven-thema van een sonatedeel) tijdens de beluistering veranderingen ondergaat.

Om dit toe te lichten wil ik hier volstaan met een mijn inziens sprekend voorbeeld van dit verschijnsel. Mozarts strijkkwartet in A-dur KV 464 bevat als derde deel een andante dat bestaat uit variaties op een bijzonder eenvoudig, weinig verrassend thema. Iedere daarop volgende variatie kan gehoord worden als het resultaat van de toepassing van enkele gemakkelijk te herkennen muzikale operaties op het thema (verandering van maat, toonsoort,

instrumentatie respectievelijk omspelingen en wijzigingen van het thema, enzovoorts). Ten slotte keert het oorspronkelijke thema weer terug in een afsluitende vorm en hierbij doet zich iets merkwaardigs voor. Het thema klinkt 'diep': het is alsof rond het oorspronkelijk naïeve thema een muzikale ruimte is gecreëerd die vanwege zijn onverwachte (!) mogelijkheden ons muzikale denken verrast en ons uiteindelijk zelfs ontroert op een wijze die aanvankelijk geenszins voorhanden lag.

In feite heb ik hiermede al aangegeven dat Leibniz' dictum in de hiergegeven uitbreiding evenzeer geldt voor het luisterproces. Luisteren naar muziek omvat een vorm van constructie, waarbij kernachtige patronen (thema, harmonische progressie, maatsoort, enzovoorts) worden herkend en de bewerkingen van die patronen worden gevolgd. De geoefende luisteraar kan zich expliciet rekenschap geven van dit proces; ik acht het zeer waarschijnlijk dat bij iedere luisteraar een dergelijk proces plaats vindt. Het is overigens als met schaken: een luisteraar met ervaring hoort meer structuur en ontwikkeling dan iemand die begint of zich tot decormuziek beperkt.

Naar muziek leren luisteren is vooral het oefenen van (akoestische) patroonherkenning en het verkrijgen van steeds beter inzicht in de werking van de muzikale operaties die de temporele dynamiek van een werk bepalen. Ik onderschrijf de these van Rothstein dat een compositie opgevat kan worden als de exploratie van een muzikale tijds-ruimte, welke zijn eigen topologie creëert.

Het is hierboven reeds gezegd: muziek kan met haar abstracte uitdrukkingsmiddelen grote emotionele effecten bewerkstelligen. Bepaalde harmonische overgangen kunnen verwachtingen oproepen en vervolgens de 'bevrediging' ervan uitstellen, daarmee een vreemde spanning oproepend (vergelijk Wagners *Tristan en Isolde*); slim-berekende oplossingen van harmonische conflicten kunnen juist ervaren worden als emotionele ontladingen, als ontspanning.

Samenvattend zou ik het luisteren naar muziek willen beschrijven als het steeds opnieuw oefenen van de subtiele samenwerking van enerzijds formeel-cognitieve vermogens die een sterke verwantschap hebben met bepaalde aspecten van wiskundig denken en anderzijds ons repertoire van mogelijke gevoelsbewegingen waaraan bepaalde muzikale patronen en hun ontwikkeling kennelijk appelleren.

Beter inzicht in de wiskundige aspecten van muziek draagt derhalve juist bij aan het verdiepen van onze luisteractiviteiten. De door alfa-getekenden geïntroduceerde romantische scheiding tussen het domein van het cognitieve en dat van het gevoel, verhindert in feite dieper begrip van onze (muzikale) schoonheidservaringen.

## Een computationeel zelfbeeld?

Reeds in de jaren vijftig is de discussie ontbrand over de vraag of computers opgevat kunnen worden als mogelijk-

ke modellen voor het menselijk denken. Kan de menselijke geest worden opgevat als een DNA-gebaseerde computer? Het moge duidelijk zijn dat deze vraagstelling de alfa-getekenden een gruwel is. Zij baseren zich daarbij vaak op de curieuze intuïtie dat een algoritme altijd iets ‘doms’ is. Wie zich door zo’n intuïtie laat leiden, onderschat gemakkelijk de complexiteit en daarmee ook de toepassingsmogelijkheden van computers. En die onderschatting is, gegeven de belangrijke rol die computers in onze maatschappij thans reeds spelen, niet zonder risico’s. De vraag die ons sinds de jaren vijftig achtervolgt, moet dus niet worden verwaarloosd. Een verstandige discussie over deze kwestie kan leerlingen van het C&M-profiel een idee geven van de betekenis die wiskunde óók kan hebben voor het beter begrijpen van ons brein en daarmee tegelijkertijd te simpele voorstellingen elimineren over de toepassingsmogelijkheden van moderne computers.

Het feit dat ons brein kennelijk een exceptioneel complex systeem is, maakt het alleen maar interessanter om te onderzoeken of wij de complexiteiten van de verschillende breinfuncties (waarnemen, taal, leren, enzovoorts) beter kunnen doorzien. Onderzoek naar artificiële intelligentie (AI) dat onder andere wiskunde, computerwetenschap en psychologie combineert, tracht zulke inzichten te verwerven door te proberen zulke breinfuncties algoritmisch te karakteriseren en vervolgens software te ontwikkelen waarmee zo’n karakterisering getoetst kan worden. Anders gezegd: wij kunnen nagaan of een computer, na implementatie van die software de bestudeerde functie adequaat kan simuleren.

De afgelopen dertig jaren hebben naast verrassende successen (schaakcomputers) ook interessante negatieve resultaten opgeleverd (visuele waarneming!). Juist die negatieve resultaten zijn uiterst informatief over de ingewikkeldheid van ons brein. Doch alleen wie althans enig idee heeft van de complexiteit van het gebruikte rekentuig (en dus van het geenszins ‘domme’ karakter van algoritmen) kan dit waarderen en daardoor inzien dat AI-onderzoek vage intuïties over het bijzondere karakter van ons brein kan omzetten in exacte inzichten. De Engelse

filosofe M. Boden bracht dit onlangs bondig tot uitdrukking in haar these ‘... computer models of the mind can be positively rehumanizing ...’.

Aldus kan AI-onderzoek, dat zijn oorsprong heeft in de wiskunde (algoritmentheorie) en vaak verdacht wordt van een dehumaniserende kijk op mensen, leiden tot kennis die cultureel van groot belang is.

## Besluit

Het C&M-profiel voor het vwo geeft een specifieke context waarin terloops ook algemene ideeën over de betekenis van wiskunde kunnen worden besproken; in die context speelt echter een romantische afkeer van het veronderstelde dwangmatig exacte en onmenselijke karakter van het wiskundig denken een niet onbelangrijke rol. Met de hier gegeven voorbeelden heb ik gepoogd te illustreren dat wiskundig denken juist vanwege exactheid en het constructieve karakter van dat denken heel goed kan dienen voor een beter begrip (en dus een dieper beleven, want waarnemen!) van artistieke activiteiten en zelfs kan bijdragen aan onze zelfkennis.

Welk voorbeeld men kiest om te bespreken hangt uiteraard af van eigen kennis en interesse; doch ieder van hen laat iets zien van de culturele betekenis van de wetenschap wiskunde.

*S.J. Doorman, emeritus hoogleraar Delft*

*Voordracht gehouden op de Nationale Wiskunde Dagen 1999.*

## Literatuur

In dit artikel is naast de reeds geciteerde literatuur gebruik gemaakt van:

Dalhaus, Carl (1967). *Musikästhetik*. Köln: Gerig.

Boden, Margareth (1990). ‘Computer models of the Mind’ in: K.A. Mohyeldin Said e.a., eds. *Modelling the Mind*. Oxford: Clarendon Press.