<u>Tentamen Modellen en Simulatie</u> (WISB134)

Vrijdag, 17 april 2015, 13:30-16:30, Educatorium Gamma Zaal

- Schrijf op elk vel dat je inlevert je naam en op het eerste vel je studentnummer en het <u>totaal aantal ingeleverde vellen.</u>
- Motiveer bij elke opgave duidelijk je antwoorden.
- Gebruik gerust resultaten uit voorgaande onderdelen ook als je geen bewijs hebt.
- Het dictaat, kopieën van de transparanten en een eenvoudige rekenmachine mag gebruikt worden, uitwerkingen van opgaven, grafische rekenmachines mogen niet gebruikt worden.

`Uitwerking. In kleine type-fonts letters.`

`Puntentelling.`

`Maximum te behalen punten per onderdeel staat in de kantlijn.`

`Cijfer is het aantal behaalde punten gedeeld door 3.`

Opgave 1. De haringstand in de Noordzee is vanaf de jaren 70 tot midden jaren 90 van de vorige eeuw zeer onder niveau geweest, maar is daarna weer bijgetrokken. Er waren laatst alleen wat zorgen over het aantal jonge haringen. Een verklaring werd gezocht in het feit dat haringen haringlarven eten als die onvoldoende schuilplekken kunnen vinden.

Zij x_n het aantal haringlarven en y_n het aantal haringen in jaar n (gemeten op het eind van de lente). We beschouwen het volgende model

$$x_{n+1} = ay_n,$$
$$y_{n+1} = by_n + cx_n - dx_ny_n.$$

Hierin zijn a, b, c, d bekende positieve constanten. Verder is $b < 1$.

a) Interpreteer de termen by_n en $-dx_ny_n$.

2 Oplossing. De term by_n modelleert het aantal haringen in jaar n dat in het daaropvolgend jaar nog in leven is. Dit deel is evenredig met y_n en minder dan y_n, b is de evenredigheidsconstant en $b \in [0, 1)$.
$(c - dy_n)x_n$ is het deel van de larven in jaar n dat in jaar $n + 1$ uitgroeit tot haring. Dit deel is evenredig met x_n met 'evenredigheidsconstante' $c - dy_n$. Deze 'constante' neemt lineair af bij groeiend aantal haringen: $-dy_nx_n$ modelleert de vraat van larven door volwassen haringen. Deze term is evenredig met het het aantal larven (naarmate er meer larven zijn zijn ze gemakkelijker te vinden) en met het aantal haringen (naarmate er meer haringen zijn worden er meer larven gegeten). De beschikbaarheid van de schuilplekken zit in de constante d.

We veronderstellen verder dat $a = 1$ en $d = 1$.

b) Bereken de evenwichten.

2 Oplossing. Stel $x_n = \alpha$ en $y_n = \beta$ voor alle n. Dan $\alpha = x_{n+1} = y_n = \beta$ en $\beta = b\beta + c\alpha - \alpha\beta = (b + c - \beta)\beta$. Dus I) $\alpha = \beta = 0$ of II) $\alpha = \beta = b + c - 1$. Dit tweede evenwicht is alleen biologisch relevant als $b + c \geq 1$.

c) Bepaal de Jacobiaan matrix van de functie $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die de recursie beschrijft.

2 Oplossing. Jacobi matrix in (α, β): $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c-\beta & b-\alpha \end{bmatrix}$. Dus $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c & b \end{bmatrix}$ in geval I en $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1-b & 1-c \end{bmatrix}$ in geval II

d) Bepaal de stabiliteit van de evenwichten (hoe hangt dat af van b en c?).

4 <u>Oplossing.</u> De eigenwaarden λ_i in evenwicht $(0,0)$ (geval I) voldoen aan $\phi(\lambda) \equiv \lambda(\lambda - b) = c$. Stabiel als $1 > b + c$. Hierbij hebben we gebruikt dat $c \geq 0$ en dus heeft de vergelijking twee reële wortels λ_1 en λ_2 die tussen -1 en $+1$ liggen als $\phi(+1) > c$ en $\phi(-1) > c$. Omdat $\phi(-1) = 1 + b$ en $b \geq 0$ impliceert $\phi(1) = 1 - b > c$ dat $\phi(-1) > c$.
De eigenwaarden λ_i in $(b + c - 1, b + c - 1)$ (geval II) voldoen aan $\phi(\lambda) \equiv \lambda(\lambda - 1 + c) = 1 - b$. Stabiel als $b + c > 1 > c - b$. Hierbij hebben we gebruikt dat $1 - b \geq 0$ en dus heeft de vergelijking twee reële wortels λ_1 en λ_2 die tussen -1 en $+1$ liggen als $\phi(+1) > 1 - b$ en $\phi(-1) > 1 - b$.

<u>**Opgave 2**</u>. Een onderzoeksbureau heeft een eenvoudig economisch model gemaakt met gebruik van Amerikaanse werkloosheidscijfers van de 20e eeuw. Het model gaat er van uit dat de economie in jaar n in één van drie mogelijke toestanden verkeert: (1) normale groei, (2) lichte recessie, (3) zware recessie. Uit de data zijn de volgende trends te herkennen: Na een jaar van normale groei, volgt er weer een jaar met normale groei in 9 op de 10 jaren, en anders een jaar van lichte recessie. Na een jaar van lichte recessie, volgt er: een jaar van normale groei in 2 op de 10 jaren, een zware recessie in 1 op de 10 jaren, en anders weer lichte recessie. Na een jaar van zware recessie blijft de economie in 5 op de 10 jaren in recessie, en anders herstelt het zich naar lichte recessie.

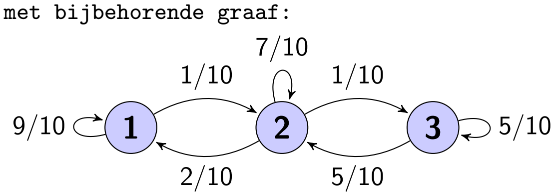
a) Stel een Markovketen met kansmatrix (transitiematrix) P op, die dit model beschrijft, en teken de graaf van P. Als het je niet lukt om de matrix op te stellen, ga verder met de volgende matrix:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{7}{10} & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{8}{10} & \frac{4}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{6}{10} \end{bmatrix}.$$

4 <u>Oplossing.</u> Element P_{ij} van P geeft de kans aan dat er na een jaar van economisch toestand j een jaar van economisch toestand i volgt, for $i, j = 1, 2, 3$. Uit de beschrijving volgt de volgende kansmatrix:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{9}{10} & \frac{2}{10} & 0 \\ \frac{1}{10} & \frac{7}{10} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

met bijbehorende graaf:



b) Maak gebruik van de graaf om te bepalen in hoeverre de stelling van Perron-Frobenius van toepassing is op P. Toon aan dat het model een stabiel evenwicht heeft. Als een Amerikaanse president twee keer gekozen wordt, en dus 8 jaar in het Witte Huis blijft, hoeveel jaren van economisch normale groei kan die gemiddeld verwachten?

3 Oplossing. De matrix is niet-negatief. De graaf is (i) irreducibel omdat er een pad bestaat van elke knoop naar elke andere knoop, en (ii) a-periodiek omdat een cyclus van lengte één voorkomt. De stelling van Perron-Frobenius is dus volledig van kracht. De stelling zegt dat er een reële, positieve, dominante eigenwaarde λ_1 is met bibehorende, reële niet-negatieve eigenvector $\mathbf{p}$. Omdat P een kansmatrix is, is $\lambda_1 = 1$. Op den duur convergeert de recursie $\mathbf{p}_{n+1} = P\,\mathbf{p}_n$ naar de stationaire $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)^T$ die voldoet aan $P\mathbf{p} = \mathbf{p}$. De eerste een laatste rijen leveren de vergelijkingen

$$\begin{array}{lcl} \frac{9}{10}p_1 + \frac{2}{10}p_2 = p_1 & \iff & p_1 = 2p_2 \\ \frac{1}{10}p_2 + \frac{5}{10}p_3 = p_3 & \iff & p_2 = 5p_3 \end{array}$$

Hieruit volgt dat $\mathbf{p} = c(10, 5, 1)^T$ voor een constante c. Als $\mathbf{p}$ een kansvector is, is $\mathbf{p} = (10/16, 5/16, 1/16)^T$. Gemiddeld is er normal groei in $10/16 = 5/8$, of 5 van de 8 jaren.

c) Als er in een verkiezingsjaar zware recessie is, wordt er meestal een nieuwe president gekozen. Wat is de kans dat er 3 jaar later, wanneer de campagnes opnieuw beginnen, normale groei is?

2 Oplossing. Kies $\mathbf{p}_0 = \mathbf{e}_3$. De kansen op ieder toestand in jaar 3 worden gegeven door $\mathbf{p}_3 = P^3\mathbf{p}_0$. De kans op normale groei na drie jaar is dus $\mathbf{e}_1^T\mathbf{p}_3 = \mathbf{e}_1^T P^3 \mathbf{e}_3$. Dit is makkelijk te berekenen door met de eenheidsvectoren van links en rechts te vermenigvuldigen

$$\mathbf{e}_1^T PPP\,\mathbf{e}_3 = (\frac{9}{10}, \frac{2}{10}, 0)\,P\,(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T = (\frac{9}{10}, \frac{2}{10}, 0)\,(\frac{1}{10}, \frac{6}{10}, \frac{3}{10})^T = \frac{21}{100},$$

dus een 21% kans.

d) Leg uit hoe je het antwoord op de volgende vraag kan berekenen (maar je hoeft de berekening dus niet uit te voeren): Hoe lang duurt het gemiddeld na een zware recessie, voordat er voor het eerst weer normale groei is?

1 Oplossing. Om te bepalen wanneer dit voor het eerst gebeurt, stellen we de defectieve kansmatrix op (die weergeeft dat er bij de telling geen vervolg op Toestand 1 is)

$$\widetilde{P} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

De gemiddelde tijd tussen transities wordt gegeven door

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\widetilde{P}^n = \widetilde{P}(I - \widetilde{P})^{-2}.$$

Dan is de gemiddelde tijd na een zware recessie, voordat er weer normale groei gegeven door

$$\mathbf{e}_1^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} n\widetilde{P}^n = \widetilde{P}(I - \widetilde{P})^{-2} \right) \mathbf{e}_3$$

Opgave 3. Wij spreken van een harmonische oscillatie als een systeem stabiel lineair oscillerend gedrag toont. Een eenvoudig model van harmonische oscillatie is

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -\omega^2 x \end{aligned} \tag{1}$$

a) Bepaal het evenwicht en de eigenwaarden van de Jacobiaan bij het evenwicht. Wat kun je concluderen over de stabiliteit van het evenwicht aan de hand van de eigenwaarden?

3 Oplossing. Voor het evenwicht geldt $x' = y = 0$ en $y' = -\omega^2 x = 0$. Het enige evenwicht is dus $x = y = 0$. De Jacobiaan is $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{smallmatrix}\right]$. De eigenwaarden zijn $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$. Wij nemen aan dat $\omega > 0$. Dus het evenwicht is een centrumpunt. Het is stabiel in de zin van Lyapunov, maar niet asymptotisch stabiel.

Wij hanteren de volgende definitie van een stabiel evenwicht: Een evenwicht $\alpha : f(\alpha) = 0$ van een differentiaalvergelijking $z' = f(z)$ is stabiel in de zin van Lyapunov als er voor elk $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ te vinden is, zodanig dat voor alle beginwaarden $z(0) = z_0$ waarvoor geldt $\|z_0 - \alpha\| < \delta$, de oplossing voor voor alle $t > 0$ voldoet aan $\|z(t) - \alpha\| < \varepsilon$.

b) Beschouw de functie $H(x, y) = \frac{1}{2}\left(\omega^2 x^2 + y^2\right)$. Gebruik de differentiaalvergelijking om te laten zien dat wanneer $(x(t), y(t))$ een oplossing is van (1), de functie $h(t) = H(x(t), y(t))$ constant is (Hint: laat zien dat $\frac{dh}{dt} = 0$ als $x(t)$ and $y(t)$ voldoen aan de differentiaalvergelijkingen). Hoe zien de functies $H(x, y) = \textit{constante}$ in de (x, y)-vlak eruit? Beargumenteer aan de hand hiervan dat het evenwicht stabiel is volgens de bovenstaande definitie.

2 Oplossing. We berekenen de afgeleide van h:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \omega x(y) + y(-\omega x) = 0.$$

De functies $H(x, y) = c^2 = \textit{constante}$, $(c > 0)$ zijn ellipsen met $H(x, 0) = \pm\frac{c}{\omega}$ en $H(0, y) = \pm c$. De oplossing $(x(t), y(t))$ blijft op de ellipse behorend bij een zekere waarde van c. Door c te kiezen zodanig dat $\varepsilon = \max\{c, c/\omega\}$ en $\delta = \min\{c, c/\omega\}$, zien we dat $x = y = 0$ is stabiel volgens de definitie.

c) Stel dat het model van harmonische oscillatie numeriek wordt opgelost met gebruik van de methode van Euler:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \tau y_n \\ y_{n+1} &= y_n - \tau\omega^2 x_n \end{aligned}$$

Met gebruik van eigenwaarde analyse, onder welke restrictie aan de stapgrootte τ is het evenwicht van deze recursie stabiel?

3 Oplossing. De Jacobiaan met karacteristieke vergelijking is

$$DF = \begin{bmatrix} 1 & \tau \\ -\tau\omega^2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda^2 - 2\lambda + (1 + \tau^2\omega^2) = 0.$$

Hieruit volgt dat $\lambda = 1 \pm \sqrt{1 - (1 + \tau^2\omega^2)} = 1 \pm i\tau\omega$, en $|\lambda| > 1$ voor alle $\tau > 0$. Het evenwicht is instabiel voor alle positieve stapgroottes.

d) Stel dat het model van harmonische oscillatie numeriek wordt opgelost met gebruik van de trapeziumregel (iets anders opgeschreven):

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1} - x_n}{\tau} &= \frac{y_{n+1} + y_n}{2} \\ \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} &= -\omega^2\left(\frac{x_{n+1} + x_n}{2}\right) \end{aligned}$$

Laat zien dat voor deze methode geldt $H(x_{n+1}, y_{n+1}) = H(x_n, y_n)$ (Hint: door te schalen en van elkaar af te trekken, elimineer de termen aan de rechter kant van beide vergelijkingen). Wat kun je hieruit concluderen over de stabiliteit van het evenwicht en eventuele restrictie aan de stapgrootte τ bij de trapeziumregel?

2 Oplossing. Vermenigvuldig the eerste vergelijking met $\tau\omega^2(x_{n+1}+x_n)$, de tweede vergelijking met $\tau(y_{n+1}+y_n)$, en tel bij elkaar op:

$$\omega^2(x_{n+1}+x_n)(x_{n+1}-x_n)+(y_{n+1}+y_n)(y_{n+1}-y_n)=0.$$

Hieruit volgt $\omega^2(x_{n+1}^2-x_n^2)+(y_{n+1}^2-y_n^2)=H(x_{n+1},y_{n+1})-H(x_n,y_n)=0$. Dus de numerieke oplossing behoudt de ellipse onafhankelijk van τ en is onvoorwaardelijk stabiel.