Tentamen Modellen en Simulatie (WISB134)

Vrijdag, 17 april 2009, 9:00-12:00, Ruppert Gebouw, Blauwe Zaal

---

- Schrijf op elk vel dat je inlevert je naam en op het eerste vel je studentnummer en het totaal aantal ingeleverde vellen.
- Motiveer bij elke opgave duidelijk je antwoorden.
- Gebruik gerust resultaten uit voorgaande onderdelen ook als je geen bewijs hebt.
- Het dictaat, copiën van de transparanten en een eenvoudige rekenmachine mag gebruikt worden, uitwerkingen van opgaven, grafische rekenmachines mogen dat niet.

`Uitwerking.` `In kleine type-fonts letters.`

`Puntentelling.`

`Maximum te behalen punten per onderdeel staat in de kantlijn.`

`Cijfer is het aantal behaalde punten gedeeld door 4.`

Opgave 1. Een zekere populatie kan verdeeld worden in 4 leeftijdsklassen. De ontwikkeling van het aantal individuen per leeftijdsklasse kan beschreven worden door een matrix-vector recursie middels de volgende Leslie matrix: $L = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

a) Kan je op grond van de stelling van Perron-Frobenius beslissen of deze matrix een dominante eigenwaarde heeft? Motiveer je antwoord.

1 `Oplossing.` `De graaf die bij` L `hoort is niet irreducibel: je kunt niet van het vierde punt (vertix) naar een ander punt lopen. Perron-Frobenius doet over dit geval geen uitspraak.`

De 4-jarigen (leeftijdsklasse 4) doen niet mee aan het voortplantingsproces. Laten we deze leeftijdsklasse buiten beschouwing dan heeft dat geen invloed op de andere leeftijdsklasse.

b) Hoe ziet het Leslie model er uit zonder de 'oudjes'?

1 `Oplossing.` `Laat de laatse rij en de laatste kolom weg:` $\widetilde{L} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$

Als je **b.** niet hebt, werk dan in **c** en **d** met $\begin{bmatrix} 0 & 6 & 12 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$.

c) Dit gereduceerd model heeft wel een dominante eigenwaarde (waarom?). Laat zien dat deze gelijk is aan 2.

4 Oplossing. Perron-Frobenius is toepasbaar op $\widetilde{L}$: de graaf van $\widetilde{L}$ is wel irreducibel: je kunt vanuit ieder punt naar ieder ander komen (immers $1 \to 2 \to 3 \to 1$), de graaf is a-periodiek: er is een rondwandeling ter lengte 2 ($1 \to 2 \to 1$), en een ter lengte 3 ($1 \to 2 \to 3 \to 1$), dus ggd =1. Alle matrix coëfficiënten van $\widetilde{L}$ zijn ≥ 0. Volgens Perron-Frobenius is er een dominante eigenwaarden, zeg λ_1 en $\lambda_1 \geq 0$. Dus $\lambda_1 > |\lambda_2|$ en $\lambda_1 > |\lambda_3|$.
We berekeneneen 'n eigenvector bij iedere eigenwaarde λ. We zoeken een eigenvector van de vorm $(\lambda^2, a_1\lambda, a_2)^T$ voor nader te bepalen skaleiren a_1 en a_2. Dus

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^2 \\ a_1\lambda \\ a_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \lambda^2 \\ a_1\lambda \\ a_2 \end{bmatrix}.$$

De tweede coördinaat vertelt ons dat $a_1 = \frac{3}{4}$, de derde coördinaat levert $a_2 = \frac{2}{3}a_1 = \frac{1}{2}$, de eerste coördinaat geeft $4a_1\lambda + 4a_2 = 3\lambda + 2 = \lambda^3$. Deze laatste vergelijking is precies de karakteristieke vergelijking en heeft de eigenwaarden als oplossing. Het is duidelijk dat 2 voldoet. Omdat voor $\lambda > 2$ de grafiek van $3\lambda + 2$ en die van λ^3 elkaar niet snijden (maak een schets of bedenk dat $3\lambda + 2 < \frac{3}{4}\lambda^3 + \frac{2}{8}\lambda^3 = \lambda^3$ voor $\lambda > 2$) en volgens PF $\lambda_1 > 0$ is, volgt dat $\lambda_1 = 2$.
Alternatief: omdat 2 een wortel is van $\lambda^3 - 3\lambda^2 - 2$ kan $\lambda - 2$ uitgedeeld worden. Dat levert een kwadratische vergelijking op die oplosbaar is met de abc-formule.

d) Wat is op den duur de verhouding tussen de aantallen van de drie leeftijdsklasse van het gereduceerde model?

2 Oplossing. Het systeem $\widetilde{x}_{n+1} = \widetilde{L}\widetilde{x}_n$ levert voor iedere startvector $\widetilde{x}_0$ (in $\mathbb{R}^3$) een rij vectoren $(\widetilde{x}_n)$ op die op den duur een veelvoud is van de dominante eigenvector: $\widetilde{x}_n \approx \gamma_n(\lambda_1^2, a_1\lambda_1, a_2)^T = \gamma_n(4, \frac{3}{2}, \frac{1}{2})^T$ voor 'n $\gamma_n \in \mathbb{R}$. In het bijzonder is de verhouding tussen $\widetilde{x}_n(1)$, $\widetilde{x}_n(2)$ en $\widetilde{x}_n(3)$ voor grote n ongeveer als 4 staat tot $\frac{3}{2}$ staat tot $\frac{1}{2}$.

e) Kan je nu ook een conclusie trekken over het aantal 4-jarige versus het aantal 1-jarige? Is 2 ook een dominante eigenwaarde voor het ongereduceerde model?

2 Oplossing. Als $x_{n+1} = Lx_n$ en $x_0 = (\widetilde{x}_0^T, x_0(4))^T$ dan zijn de eerste drie coördinaten van x_n precies $\widetilde{x}_n$ als besproken in het vorige onderdeel. Omdat de laatste coördinaat $x_{n+1}(4)$ van x_{n+1} gelijk is aan $\frac{1}{2}x_n(3) = \frac{1}{2}\widetilde{x}_n(3)$ volgt dat

$$x_{n+1} = \begin{bmatrix} \widetilde{L}\widetilde{x}_n \\ \frac{1}{2}\widetilde{x}_n(3) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \lambda_1\widetilde{x}_n \\ \frac{1}{2}\widetilde{x}_n(3) \end{bmatrix} \approx \gamma_n \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 1 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Hierbij gebruiken we dat $\widetilde{x}_n$ voor n groot ongeveer een veelvoud is van de eigenvector van $\widetilde{L}$ bij $\lambda_1 = 2$: $\widetilde{x}_n \approx \gamma_n(4, \frac{3}{2}, \frac{1}{2})^T$. Kortom de verhouding tussen 1-jarige en 4-jarige is op den duur 8 staat to $\frac{1}{4}$.
Uit bovenstaand verhaal volgt eenvoudig dat de eigenvectoren van $\widetilde{L}$ gemakkelijk met een vierde coördinaat uit te breiden zijn tot eigenvectoren van $\widetilde{L}$ bij dezelfde eigenwaarde. Het is duidelijk dat de vierde eigenwaarde λ_4 van L 0 is met eigenvector $v_4 = e_4 = (0, 0, 0, 1)^T$. Omdat $\lambda_1 = 2 > |\lambda_j|$ $(j = 2, 3)$ en ook $\lambda_1 > 0 = \lambda_4$ is λ_1 een dominant eigenwaarde van L.

Opgave 2. Een zeker soort sluipwespen W heeft een bepaald soort rupsen R nodig om zich voort te planten. In iedere rups wordt hoogstens een eitje gelegd. Een rups waarin een eitje gelegd is is ten dode gedoemd. Als r_n het aantal rupsen is van soort R in jaar n en w_n het aantal vrouwelijke sluipwespen dan geeft

$$\begin{cases} r_{n+1} = \left(a - \dfrac{r_n}{R_{\max}} - \dfrac{w_n}{W_{\max}}\right) r_n \\ w_{n+1} = \beta \dfrac{r_n}{1 + \gamma r_n} w_n \end{cases}$$

,voor bepaalde positieve waarden van a, $R_{\max}$, $W_{\max}$, β en γ, een modellering voor de groei van een rupsen– en sluipwespenpopulatie.

a) In eenvoudigere modellen wordt $\gamma = 0$ genomen. Verklaren wat men met de 'extra' term $1 + \gamma r_n$ in de noemer probeert te modelleren. Wij nemen verder $\gamma \neq 0$.

1 Oplossing. Met $\gamma = 0$ is $w_{n+1} = \beta r_n w_n$ en is de groei van het aantal wespen evenredig met het aantal rupsen. Het aantal rupsen dat een wesp kan 'verwerken' per tijdseenheid is echter beperkt: de wesp moet een holletje graven, een rups vangen, de rups verdoven en naar het holletje slepen, een eitje in de rups leggen, het holletje dicht maken. Dit kost allemaal tijd. Kortom er zit een maximum aan het aantal rupsen dat een wesp kan verwerken, zelfs voor r_n zeer groot en het gemakkelijk is om een rups te vinden. Voor $\gamma \neq 0$ vlakt de grafiek van de functie $r/(1+\gamma r)$ voor $r \to \infty$ af naar $1/\gamma$.

Door handig te schalen kunnen we het stelsel vereenvoudigen.
Laat zien dat de nieuwe variabelen $x_n = r_n/R_{\max}$ en $y_n = w_n/W_{\max}$ voldoen aan

$$\begin{cases} x_{n+1} = (a - x_n - y_n)x_n, \\ y_{n+1} = b\,\dfrac{x_n}{1 + c\,x_n}\,y_n. \end{cases} \tag{1}$$

b) Geef een uitdrukking voor b en c in termen van a, $R_{\max}$, $W_{\max}$, β en γ.

1 Oplossing. Merk op dat delen van de eerste gelijkheid door R_{max} leidt tot $x_{n+1} = \frac{r_{n+1}}{R_{max}} = \left(a - \frac{r_n}{R_{\max}} - \frac{w_n}{W_{\max}}\right)\frac{r_n}{R_{max}} = (a - x_n - y_n)x_n$. Delen van de tweede gelijkheid door W_{max} levert $y_{n+1} = \frac{w_{n+1}}{W_{max}} = \beta R_{\max} \frac{\frac{r_n}{R_{\max}}}{1+\gamma R_{\max}\frac{r_n}{R_{\max}}} \frac{w_n}{W_{max}} = b\,\frac{x_n}{1+c\,x_n}\,y_n$ voor $b = \beta R_{\max}$ en $c = \gamma R_{\max}$.

We nemen verder aan dat $c = 1$ en $b > 1$.

c) Bepaal voor alle $a > 0$ en $b > 1$ de evenwichtspunten van (1) die biologisch relevant zijn. Hangt dat ook nog van a en b af? Zo ja, hoe?

2 Oplossing. Stel $x_n = \alpha$ en $y_n = \beta$ voor alle n (evenwicht). Dan (1) $\alpha = (a - \alpha - \beta)\alpha$ en (2) $\beta = b\frac{\alpha}{1+\alpha}\beta$. (1) geldt als $\alpha = 0$ of $\alpha + \beta = a$, (2) geldt als $\beta = 0$ of $\alpha = 1/(b-1)$.
Combinatie van (1) en (2) geeft (i) $\alpha = 0$ en $\beta = 0$ (ii) $\alpha = a$ en $\beta = 0$, (iii) $\alpha = 1/(b-1)$ en $\beta = a - b/(b-1)$.
Voor biologische relevantie moeten $\alpha \geq 0$ en $\beta \geq 0$ zijn. Door de restricties $a > 0$ en $b > 1$ zijn de evenwichten (i) en (ii) biologisch relevant en is $1/(b-1) > 0$. In geval (iii) moet ook nog $a \geq b/(b-1)$ zijn..

Uit c). blijkt dat $(1/(b-1), a - b/(b-1))$ een evenwicht is. Neem verder $b = 2$ en bekijk alleen waarden voor a waarvoor dit evenwicht biologisch relevant is.

d) Toon aan dat de eigenwaarden van de Jacobi matrix in dit evenwicht voldoen aan $\lambda^2 - \lambda + (a-2)/2 = 0$.

3 Oplossing. Met $b = 2$ is voor het evenwicht (iii) $\alpha = 1/(b-1) = 1$ en $\beta = a - b/(b-1) = a - 2$. Biologische relevantie eist dat $\beta \geq 0$ en dus $a \geq 2$ is. Voor de Jacobi matrix in het evenwicht (iii) $(\alpha, \beta) = (1, a-2)$ geldt

$$\begin{bmatrix} (a - \alpha - \beta) - \alpha & -\alpha \\ b\frac{1}{(1+\alpha)^2}\beta & b\frac{1}{1+\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2}(a-2) & 1 \end{bmatrix}$$

De eigenwaarde vergelijking is $\lambda^2 - \text{spoor}\lambda + \det = \lambda^2 - \lambda + \frac{1}{2}(a-2) = 0$.

e) Bepaal voor welke waarden van a dit evenwicht stabiel is. (*Hint: De eigenwaarden kunnen, afhankelijk van a, complex zijn. Toon eerst aan dat het evenwicht stabiel is als de eigenwaarden reeel zijn. Bekijk dan het complexe geval.*)

3 Oplossing. Schrijf $\phi(\lambda) \equiv \lambda^2 - \lambda + \frac{1}{2}(a-2)$.
Als de eigenwaarden reëel zijn, dan is $\lambda_1, \lambda_2 \in (-1, 1)$ precies dan als $\phi(-1) > 0$ en $\phi(1) > 0$, dus als $a > 2$.
In geval de eigenwaarden niet reëel zijn is $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ en dus $|\lambda_1|^2 = |\lambda_2|^2 = \lambda_1\lambda_2 = \det = \frac{1}{2}(a-2)$. Dus $|\lambda_i| < 1$ als $a < 4$.
Samenvattend: we hebben stabiliteit als $2 < a < 4$ en instabiliteit als $a > 4$. De gevallen $a = 2$ en $a = 4$ moeten apart geanalyseerd worden (omdat in deze gevallen lineairisatie niet werkt).

Opgave 3. In een fietsfabriek worden racefietsen en mountainbikes gemakt. De netto winst per racefiets is €225 en de netto winst per mountainbike is €300 euro. Met de beschikbare arbeidskracht kunnen maximaal 800 fietsen per week gemaakt worden en beide types kosten evenveel werk. Met een bepaalde boormachine kan 40 uur per week gewerkt worden. Voor de vervaardiging van een racefiets is de boormachine $\frac{1}{25}^{ste}$ uur nodig en voor een mountainbike tweemaal zo lang. Van een bepaald soort buis zijn 8 eenheden nodig voor een racefiets en 14 eenheden voor een mountainbike. De toelevering vanuit de aluminiumfabriek is maximaal 5600 eenheden per week.

a) Hoevel racefietsen en hoeveel mountainbikes moet de fabriek per week produceren om een zo groot mogelijke winst te maken? En hoe groot is die winst dan?

3 Oplossing. Zij x_1 het aantal racefietsen dat per week gemaakt wordt en x_2 het aantal mountainbikes. Merk op dat $x_1 \geq 0$ en $x_2 \geq 0$. De winst is dan $225x_1 + 300x_2$ Euro. Omdat er arbeidskracht is voor maximaal 800 fietsen per week, is $x_1 + x_2 \leq 800$. De tijdsrestricties op de boormachine leiden tot $\frac{1}{25}x_1 + \frac{2}{25}x_2 \leq 40$ of, equivalent hiermee, $x_1 + 2x_2 \leq 1000$. De restrictie op het aantal buizen ziet er uit als $8x_1 + 14x_2 \leq 5600$ of, equivalent hiermee, $4x_1 + 7x_2 \leq 2800$.
We moeten $\max 225x_1 + 300x_2$ bepalen met x_1, x_2 zodat

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 800 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 1000 \\ 4x_1 + 7x_2 &\leq 2800 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

6 Oplossing. **Aanpak 1.** Voeren we slack variabelen in, dan ziet het LP probleem er in standaard vorm uit als

1	1	1	0	0	800
1	2	0	1	0	1000
4	7	0	0	1	2800
225	300	0	0	0	M

$J = [3,4,5]$ is een basis met $h = (0,0,800,1000,5600)^T$ als bijbehorend basispunt. h is acceptable en dus een hoekpunt. We proberen de doelfunctie te verbeteren in de eerste coordinaat. Omdat $700 = 5600/8 < 800 < 1000$ kiezen we het punt $(i_0, j_0) = (3,1)$ als pivot en wordt $J = [3,4,1]$ de nieuwe basis. Volledig vegen geeft:

0	$-\frac{3}{4}$	1	0	$-\frac{1}{8}$	100
0	$\frac{1}{4}$	0	1	$-\frac{1}{8}$	300
1	$\frac{7}{4}$	0	0	$\frac{1}{8}$	700
0	$300 - \frac{7}{4}225$	0	0	$-\frac{225}{8}$	$M - 700 \cdot 225$

Omdat alle coördinaten van de de c-vector ≤ 0 zijn, hebben we de maximalizerende waarde gevonden in het hoekpunt $(700,0,100,300,0)^T$ bij de basis $[3,4,1]$.

Aanpak 2. In dit 2-dimensionale probleem kunnen de hoekpunten van de verzameling $\mathcal{V}$ van acceptabele punten (feasible points) gemakkelijk bepaald worden. Omdat $\mathcal{V}$ begrensd is (immers $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ en $x_1 + x_2 \leq 800$) weten we dat een maximale wordt aangenomen in een hoekpunt. Door voor elk van de hoekpunten de waarde van de doelfunctie $225x_1 + 300x_2$ in dat punt uit te rekenen vinden we een maximalizerend punt.
Een grafische analyse leert dat $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ en $4x_1 + 7x_2 \leq 2800$ impliceert dat $x_1 + x_2 \leq 800$ en $x_1 + 2x_2 \leq 1000$ (snijpunt van de lijnen $\{(x_1,x_2) \mid 4x_1 + 7x_2 = 2800\}$ en $\{(x_1,x_2) \mid x_1 + x_2 = 800\}$ heeft een negatieve x_2 coordinaat, etc.) Kortom $\mathcal{V} = \{(x_1,x_2) \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, 4x_1 + 7x_2 \leq 2800\}$ en heeft drie hoepunten: $(0,0)$, $(0,400)$ en $(700,0)$ waarvoor $225x_1 + 300x_2$, respectievelijk de waarde 0, 120 000, en 157 500 heeft. Omdat de laatse ewaarde de grootste is, wordt in het bijbehorend hoekpunt $(700,0)$ het maximum op $\mathcal{V}$ aangenomen.

1 Oplossing. **Interpetatie.** De winst is maximaal $700 \cdot 225 = 157\,500$ Euro en die winst wordt behaald door 700 racefietsen te produceren en 0 mountainbikes. Alle buizen worden gebruikt (de derde slack variabele is 0), de capaciteit van de boormachine en van de arbeidskracht (de tweede, resp. eerste slack variabele zijn > 0) worden niet volledig benut.

Opgave 4. Voor de groei van de hoeveelheid gras in een wei die door schapen begraasd wordt, gebruiken we het volgende continue model:

$$G' = \kappa\, G \left(1 - \frac{G}{G_0}\right) - \gamma\, S \frac{G^2}{G_1^2 + G^2} \tag{2}$$

waarbij $G(t)$ de totale hoeveelheid gras is in de wei op tijdstip t. Verder is S het aantal schapen in de wei. De overige grootheden zijn constanten: γ en κ zijn evenredigheidsconstanten en G_0 representeert de "maximale" hoeveelheid gras.

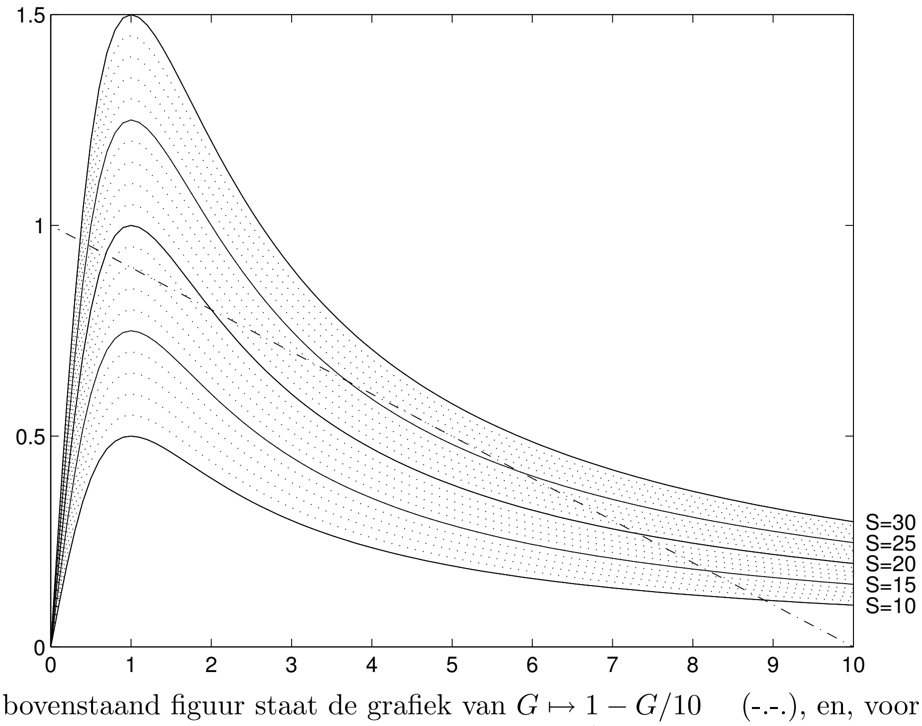
a) Interpreteer de term $\gamma\, S\, G^2/(G_1^2 + G^2)$. Wat voor invloed heeft de constante G_1?

2 Oplossing. De term moduleert de afname van het gras door de begrazing van de schapen. De afname is evenredig met het aantal schapen. In dit model is $\mu \equiv \gamma\, G^2/(G_1^2 + G^2)$ de bijbehorende evenredigheids constante, die blijkbaar afhangt van de dichtheid G van het gras.
Ieder schaap kan, per tijdseenheid maar een beperkt hoeveelheid gras eten zelfs als er een onbeperkte hoeveelheid beschikbaar is (voor $G \to \infty$ is de evenredigheids constante μ dus begrensd. In dit model geldt $\mu = \gamma\, G^2/(G_1^2 + G^2) \to \gamma$ voor $G \to \infty$). Als er weinig gras is (G klein) hebben de schapen moeite om het gras ''te vinden'' (voor $G \to 0$ gaat de μ naar 0 en waarschijnlijk ''sneller'' dan G. In dit model is $\mu \approx (\gamma/G_1^2)\, G^2$ voor $G \approx 0$: G_1 geeft aan hoe handig de schapen zijn in het vinden van gras bij een lage dichtheid van gras).

b) Hoe heet de groei in dit model als er geen schapen in de wei zijn ($S = 0$)?

2 Oplossing. Logistische groei.

Neem verder $G_0 = 10$, $G_1 = 1$ en $\kappa = 1$, $\gamma = 0.1$.



In bovenstaand figuur staat de grafiek van $G \mapsto 1 - G/10$ (-.-.), en, voor diverse S tussen 10 en 30, de grafiek van $G \mapsto 0.1\, S\, G/(1 + G^2)$: voor $S = 10, 15, 20, 25, 30$ is de grafiek aangegeven met een doorlopende lijn (—), voor de overige S met stippels ($\cdots$).

Bij het beantwoorden van de volgende vragen kun je gebruik maken van de informatie die je uit de grafieken kunt halen. Het snijpunt van $1-G/10$ en $\frac{1}{10}S\,G/(1+G^2)$ tussen 0 en 1 heet α_S (als het bestaat), dat tussen 1 en ≈ 5 heet β_S (ook weer alleen als het bestaat) en tussen ≈ 5 en 10 heet γ_S (als het bestaat). Je hoeft de numerieke waarde van deze snijpunten hier niet expliciet te berekenen.

c) Beschrijf de evenwichten (in termen van bijvoorbeeld α_S, β_S en γ_S; zie plaatje) en hun stabiliteit voor $S = 10$, $S = 20$ en $S = 30$. (*Hint: maak een plaatje langt de "G-as" waarin je de evenwichten aangeeft en geef middels pijltjes aan hoe de oplossing in andere punten op die G-as zal verlopen.*)

4 Oplossing. $G' = G(1-0.1G) - 0.1S\frac{G^2}{1+G^2} = [1-0.1G-0.1S\frac{G}{1+G^2}]G = [\phi(G) - S\psi(G)]G$ waarbij $\phi(G) \equiv 1-0.1G$ en $\psi(G) \equiv 0.1\frac{G}{1+G^2}$. De grafiek van ϕ en van $S\psi$ zijn in het figuur geplot. Als deze grafieken elkaar snijden in $G=\zeta$, dan is ζ een evenwicht: met $G(t)=\zeta$ alle t geldt immers $G'(t) = 0 = [\phi(\zeta) - S\psi(\zeta)]\zeta$.
Dus α_S, β_S en γ_S (indien bestaan) zijn evenwichts oplossingen.
Een 1-dimensionale schets van het richtingsveld (zie hint) laat zien dat α_S en γ_S stabiel zijn en β_S instabiel: als we G laten oplopen van 0 tot 10 dan bepaald het teken van $\phi(G)-S\psi(G)$ het teken van G' (immers $G>0$). Dit teken wisselt als G een evenwicht 'passeert'. Voor $G>0$ en $G\approx 0$ is dit teken positief ($\phi(G) > S\psi(G)$: zie figuur). Dus voor $\zeta=\alpha_S$ en voor $\zeta=\gamma_S$ (indien bestaat) en $G\approx\zeta$ is $G'>0$ voor $G<\zeta$ (merk op dat G twee maal van teken gewisseld is als $\zeta=\gamma_S$ en er evenwichten α_S en β_S zijn) en $G'<0$ voor $G>\zeta$: oplossingen lopen in de buurt van ζ naar ζ: ζ is stabiel. Evenzo zien we dat $\zeta=\beta_S$ instabiel is: oplossingen lopen van β_S weg in de buurt van β_S.

d) De boer wacht telkens met veranderingen tot de hoeveelheid gras in de wei min of meer in evenwicht is.
Wat gebeurt er met zijn grasopbrengst als hij telkens een schaap meer in zijn wei laat grazen en zo zijn kudde geleidelijk uitbreidt van 10 naar 30 schapen? Wat is het effect van een daarop volgende geleidelijke reductie van de kudde? Een beschrijving middels een instructieve figuur wordt gewaardeerd.

2 Oplossing. De getalwaarden schatten we telkens uit het figuur.
Bij 10 schapen is er maar een evenwicht, nl., $\gamma_S \approx 8.8$. Dus na een tijdje is $G(t)\approx\gamma_S$.
Bij toenemende aantallen schapen neemt de waarde van γ_S af (met ongeveer 0.2) tot er ongeveer 26 schapen in de wei staan (dan $\gamma_S\approx 5$). In deze situaties ($10\leq S\leq 26$is $G(t)$ na een tijdje $\approx\gamma_S$. Dit gebeurt ook als er meer evenwichten zijn (α_S en β_S als $26\geq S\geq 18$): we komen dan met $G(t)$ niet in het evenwicht α_S terecht omdat G op het tijdstip waarop een extra schaap wordt toegevoegd (begin tijdstip) ongeveer gelijk is aan γ_{S-1}. Dus G daalt van ongeveer γ_{S-1} naar ongeveer γ_S.
Met nog meer schapen ($S>26$) verdwijnt het evenwicht γ_S en hebben we nog maar één evenwicht, nl., α_S met $\alpha_S\approx 0.5$. Blijkbaar neemt, met één extra schaap (27 in plaats van 26), de dichtheid van het gras (na een tijdje) dramatisch af (van ≈ 5 naar ≈ 0.5 en niet, zoals voorheen, met 0.2): de wiskundige term hiervoor is 'catastrophe' [er verdwijnt een evenwicht]). Als het aantal schapen vervolgens van 27 naar 30 groeit dan neemt de dichtheid van gras maar een beetje af (met ≈ 0.01 bij ieder extra schaap).
(Niet gevraagd) Als de boer vervolgens geleidelijk zijn schapekudde reduceert in de hoop zijn grasveld te herstellen dan heeft hij nog een lage dichtheid bij 18 schapen $G(t)$ is dan (na een tijdje) $\approx\alpha_S\approx 1$. Nu groeit G van ongeveer α_{S-1} naar ongeveer α_S.
Pas bij 17 schapen verdwijnt evenwicht α_S (en ook β_S) en is $G(t)$ na een tijdje $\approx\gamma_S\approx 7.5$ (mathematisch weer een catastrophe, maar daar zal de boer anders over denken).

Puntentelling.

Maximum te behalen punten per onderdeel staat in de kantlijn.

Cijfer is het aantal behaalde punten gedeeld door 4.