WISB134

Modellen & Simulatie

Lecture 1 - Introductie, 3 soorten modellen

Universiteit Utrecht

Doelen van ModSim

Voldoet aan 3 van 6 eisen voor accreditatie:

- In aanraking komen met modellen
- Leren gebruikmaken van wiskundige software (Mathematica)
- Wiskunde in haar omgeving leren kennen (toepassingen)

Hoe?

- Wij beschouwen modellen uit verschillende toepassingen
- We gebruiken onder andere* de computer om die modellen te bestuderen

Specifiek besteden we feel aandacht aan dynamische modellen die beschrijven hoe processen veranderen in de tijd: voorspellingen en simulaties

* Wij maken ook gebruik van onze hersens!

Format

ECTS : 7.5 studiepunten (20 uur per week gedurende 9 weken)

Hoorcollege: basiskennis van modellen en hun analyse

Werkcollege:

- een kans om de theorie te oefenen
- Mathematica te gebruiken
- hulp te krijgen van begeleiders

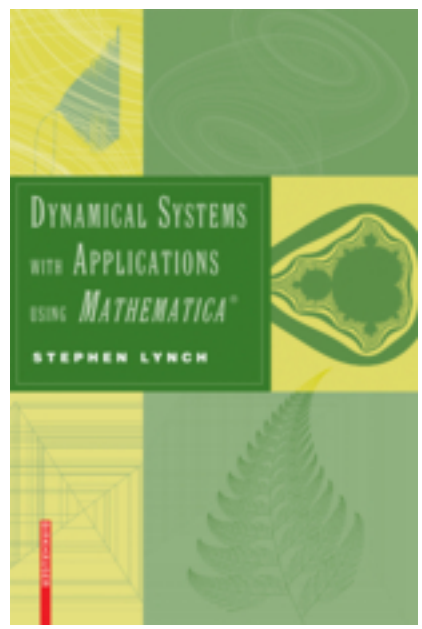
De werkcolleges vereisen een computer met Mathematica, maar worden niet een computerzaal gegeven. Je dient een eigen laptop mee te nemen, of met iemand samen te werken die dag wel heeft. Werkcollege vandaag: installeer Mathematica en werk door een tutorial.

FAQ: "Moet ik naar de hoor-/werkcolleges? Nee, zelf-studie kan ook.

Resources

Course website heeft cursusinformatie, referenties, opgaves, planning, enz:
www.staff.science.uu.nl/~frank011/Classes/modsim/

Lecture notes: boekenverkoop, (online grafieken in kleur)
(Online) Book: *Dynamical Systems with Applications using Mathematica*,
by Stephen Lynch, via SpringerLink



Format

Toetsing:

Verslagen (samen 50%)

Er dienen 3 projectverslagen ingeleverd te worden. Je mag in groepen van maximaal 3 studenten aan het project werken. Instructies op de website. Lees deze instructies zorgvuldig door. Verslag 1 gaat over een economisch prijsmodel, om in te leveren aan het begin van werkcollege van 2 maart.

Tentamen (50%, mits minimaal een 5)

vrijdag 22 April, 8.30 - 11.30, Educatorium Zaal Bèta

Over de theorie behandeld in de hoorcollege. Lecture Notes toegestaan, maar geen uitgewerkte problemen.

Let Op!

Modellen en Simulatie wordt dit jaar voor het laatst gegeven

Dus als het voor jou verplicht is, zorg er voor dat je het goed afrondt!

En die drie eisen voor de accreditatie dan? Vanaf volgend jaar:

- *Programmeren in de Wiskunde* in jaar 1 met Mathematica
- Een verplichte Modelleer vak in jaar 3 (keuze uit 2 à 3 geschikte vakken)

Dus *goed je best doen*!

Organisatie

Jason Frank

Korte CV:
BSc., MSc. Lucht-en ruimtevaarttechniek, U. Kansas 1992, 1994.
Ph.D. Toegepaste wiskunde, T.U. Delft, 2000
Onderzoeker aan het CWI, Amsterdam, 2000-2013
Sinds 2013: hoogleraar Numerieke Wiskunde UU

Onderzoek: numerieke methoden voor weer en klimaat, complexe systemen

Kamer HFG 612
j.e.frank@uu.nl

Nederlands…

Organisatie

Practicumleiders en assistenten

Group 1

Begeleider: Felix Beckebanze

Group 2

Begeleiders: Huibert het Lam en Peter Kristel

Werkcollege locaties:

Woensdag 15.15-17.00:	BBL 165, 169
Vrijdag 11.00-12.45:	UNNIK 312, BBL 315/317

“Feedback groep” - 3 studenten, direct na HC-woensdag

Praktijk Wiskundige

Wat doet een wiskundige na de studie?

Stellingen bewijzen?

Boekhouden?

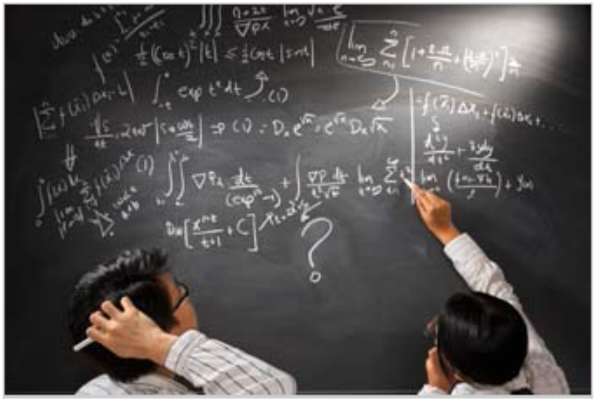
Sudoku's oplossen?

OCCUPATIONAL OUTLOOK HANDBOOK

Mathematicians

Summary

Quick Facts: Mathematicians	
2012 Median Pay	$101,360 per year $48.73 per hour
Entry-Level Education	Master’s degree
Work Experience in a Related Occupation	None
On-the-job Training	None
Number of Jobs, 2012	3,500
Job Outlook, 2012-22	23% (Much faster than average)
Employment Change, 2012-22	800



Mathematicians create models to solve practical problems in fields such as business, government, engineering, and the sciences.

What Mathematicians Do

Mathematicians use advanced mathematics to develop and understand mathematical principles, analyze data, and solve real-world problems.

Work Environment

Mathematicians work in the federal government and in private science and engineering research companies. They may work on teams with engineers, scientists, and other professionals.

How to Become a Mathematician

Mathematicians typically need a master’s degree in mathematics. However, there are some positions available for those with a bachelor's degree.

Pay

The median annual wage for mathematicians was $101,360 in May 2012.

Job Outlook

Employment of mathematicians is projected to grow 23 percent from 2012 to 2022, much faster than the average for all occupations. Businesses will need mathematicians to analyze the increasing volume of digital and electronic data.

Similar Occupations

U.S. Bureau of Labor Statistics:

http://www.bls.gov/ooh/math/mathematicians.htm

OCCUPATION	OUTLOOK (10 yr)
All occupations	7%
Physicists & astronomers	7%
Chemists & Materials Scientists	3%
Computer programmers	-8%
Mathematicians	21%
Mathematical science	28%
Statisticians	34%
Operations research analysts	30%

Program

- Organisatie
- Modelleren en Simuleren
- Voorkennis

Modelleren

Modelleren is soms meer kunst dan wetenschap:
ervaring is belangrijk, maar ook *durven*

Modelleren is meestal een iteratief proces: het model wordt getoetst met de werkelijkheid, en is nooit helemaal goed (want het blijft een model).

Soms is het goed genoeg: "**All models are wrong, but some are useful!**" - G.E.P. Box.

Anders proberen we te begrijpen waar het afwijkt en hier te verbeteren.

Simulatie

Waarom simulaties?

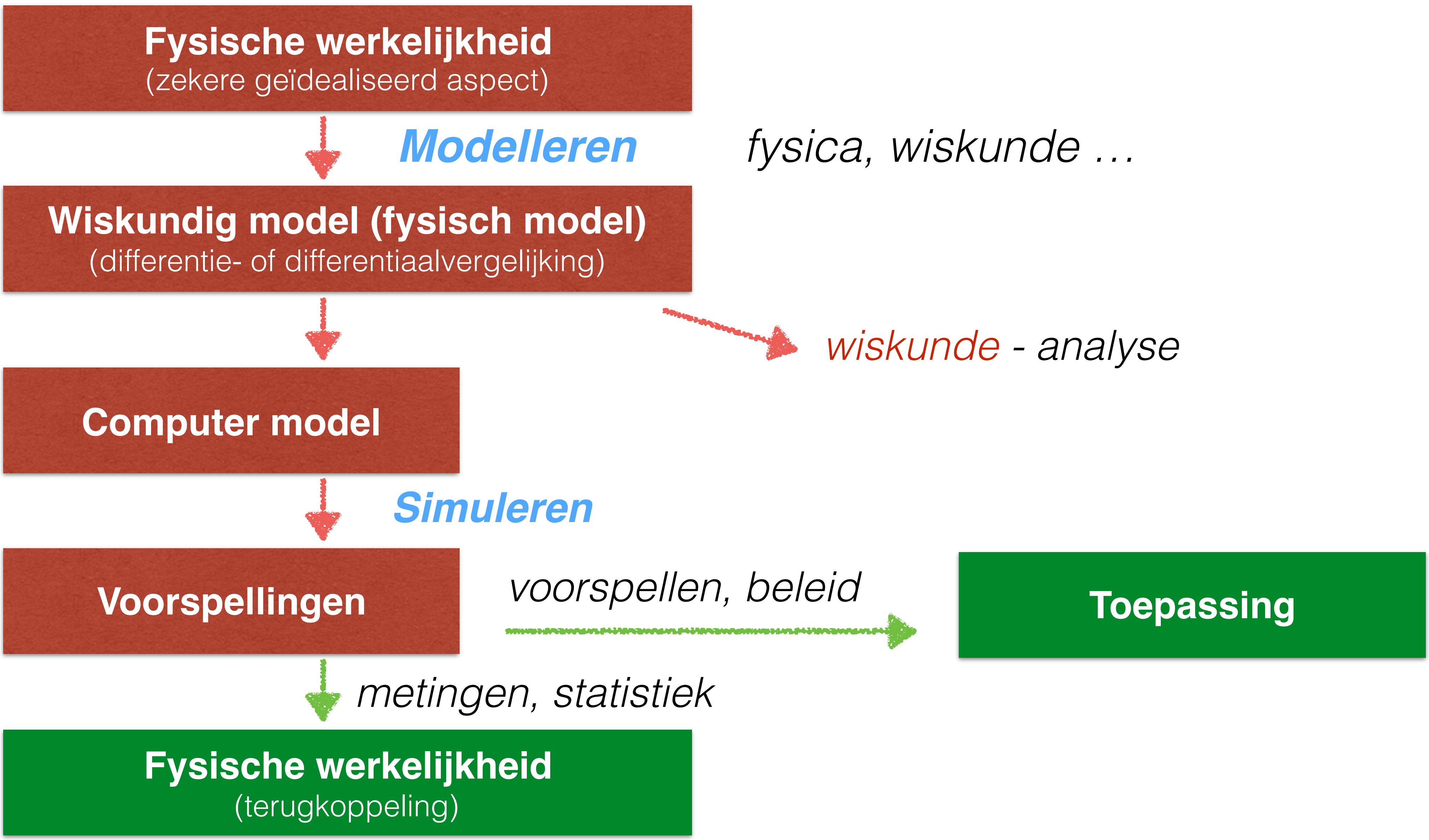
- Zoals genoemd, is het soms de enige manier om de oplossingen te ‘zien’

- Verschillende scenario’s doorrekenen (wat gebeurt er als iets veranderd - klimaatscenario’s)

- Simulaties worden gebruikt voor: ontwerp (engineering), beleid (voorspelde effect van financieel beleid), inzicht (in de wetenschap)

- Maar alleen simulaties gebruiken levert geen eenduidig inzicht. *Wiskundig analyse* hoort erbij.

Onderzoeksmethodiek



Voorbeeld: bladluizen

Stel, wij zijn ingehuurd door een rozenkweker omdat zij overlast heeft van bladluizen.

Wij doen wat steekproeven en komen erachter:

- per dag sterft 10% van de bladluizenpopulatie

- per dag krijgt ieder bladluis een kleintje.

Voorbeeld: bladluizen

Het "Malthus model":

P_n = het aantal bladluizen op dag n

d = de percentage sterftes per dag

b = de percentage geboortes per dag

$$P_{n+1} = P_n + b\, P_n - d\, P_n$$

$$P_{n+1} = (1 + b - d)\, P_n = \beta P_n$$

Recursie of *iteratie*

Begincconditie

Parameter

Voorbeeld: bladluizen

Het "Malthus model":

$P_{n+1} = (1 + b - d)\, P_n = \beta P_n$

$P_{n+1} = (1 + 1 - 0.1)\, P_n = 1.9\, P_n$

Dag	P_n
0	100
1	190
2	361
3	685.9
14	800000
30	23×10^9

Voorbeeld: bladluizen

Model dat rekening houdt met de draagkracht van de omgeving

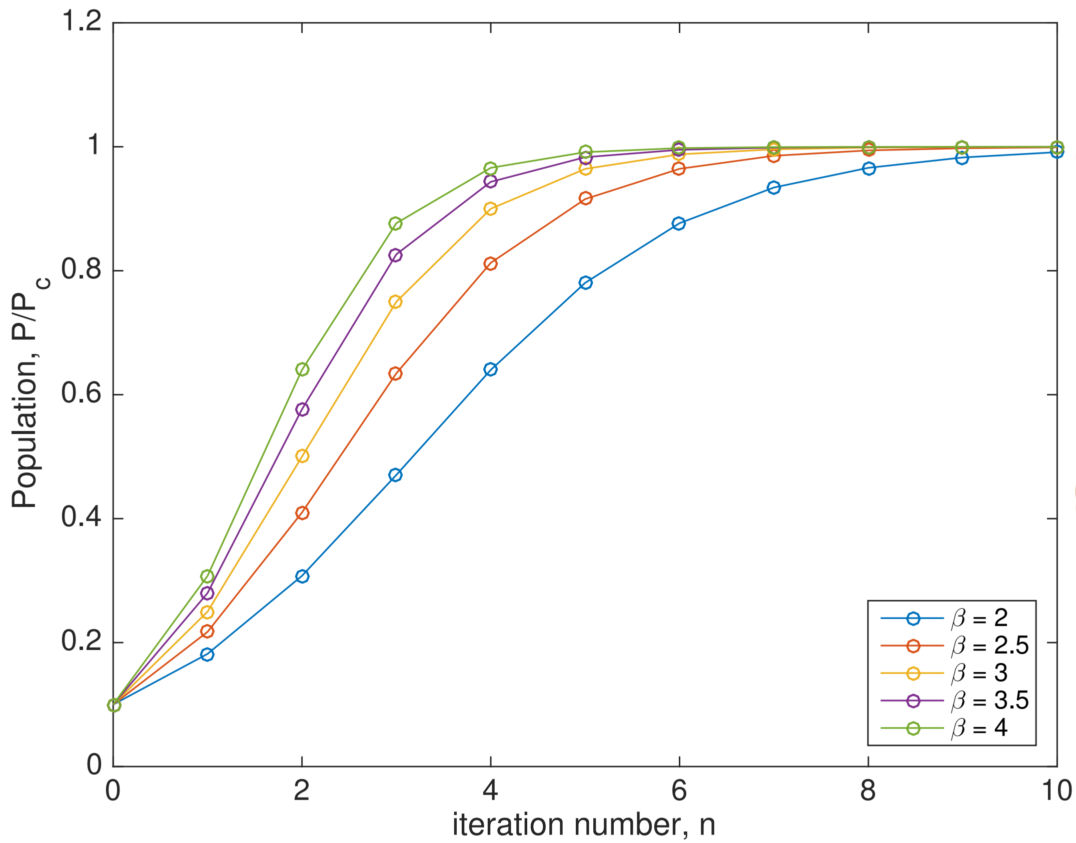
$$P_{n+1} = \frac{\beta P_c P_n}{P_c + (\beta - 1) P_n}$$

Dag	P_n	P_n
0	100	100
1	190	189.9
2	361	360.4
3	685.9	683.2
14	800000	130000
30	23×10^9	150000

Voorbeeld: bladluizen

Model dat rekening houdt met de draagkracht van de omgeving

$$P_{n+1} = \frac{\beta P_c P_n}{P_c + (\beta - 1)P_n}$$



Voorbeeld: bladluizen

Model continu in de tijd: differentiaalvergelijking

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{P_c}\right)$$

geeft de relatie tussen een functie P en de afgeleide van P.

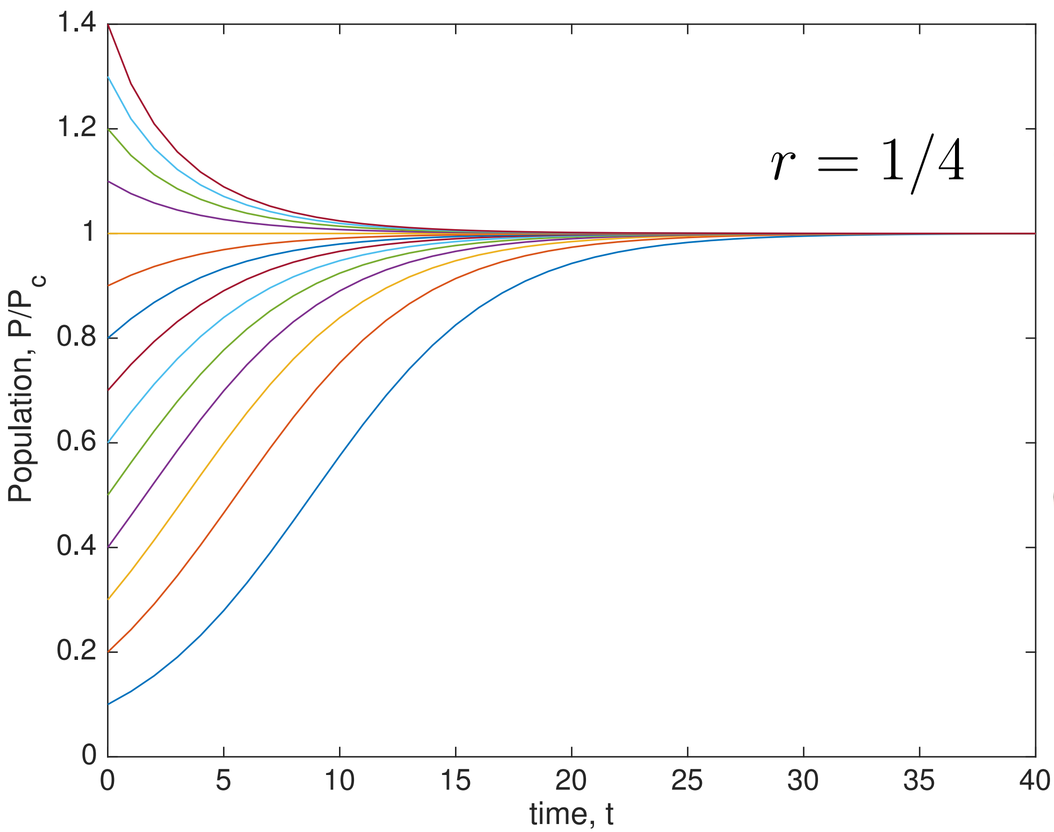
Maar hoe P in de tijd veranderd
is impliciet (geen formule gegeven)

We zoeken een *oplossing*

Voorbeeld: bladluizen

Model continu in de tijd: differentiaalvergelijking

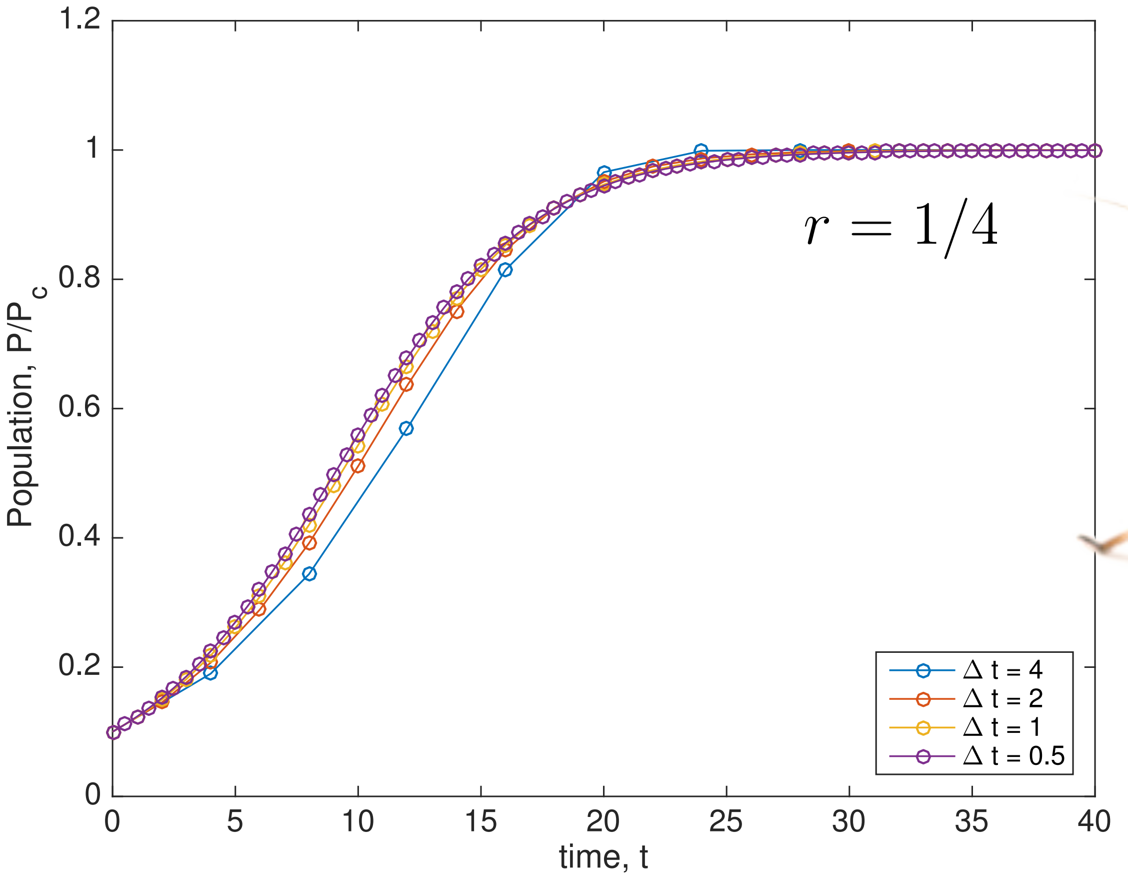
$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{P_c}\right) \qquad P(t) = \frac{e^{r(t-t_0)}P_cP_0}{P_c + (e^{r(t-t_0)} - 1)P_0}$$



Voorbeeld: bladluizen

Numeriek model: Methode van Euler

$$P_{n+1} = P_n + \Delta t \, r \, P_n \left(1 - \frac{P_n}{P_c} \right)$$



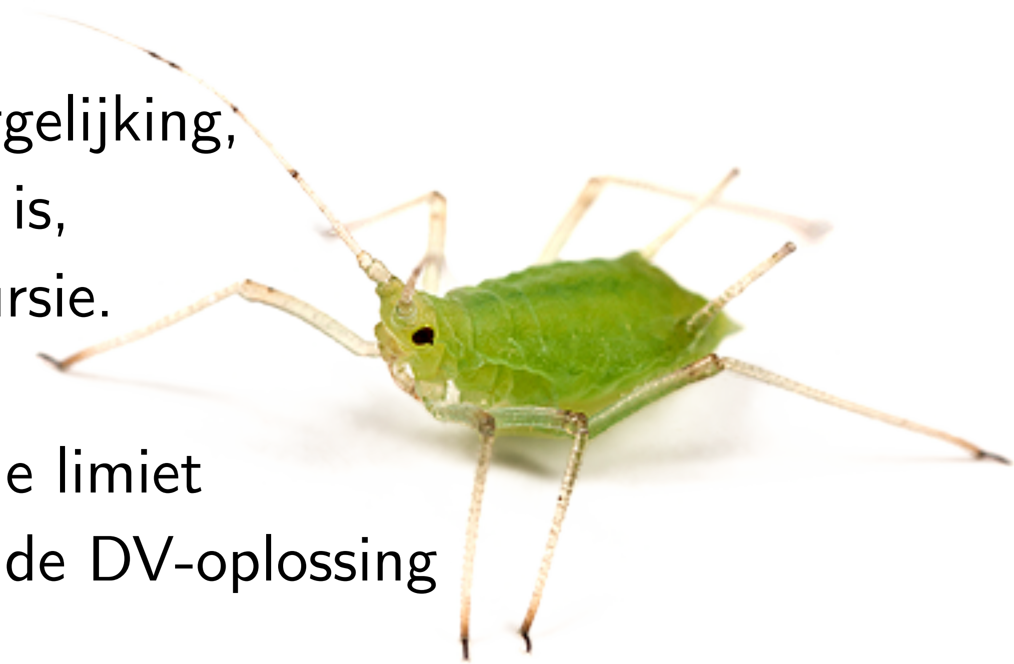
Voorbeeld: bladluizen

3 soorten modellen:

- recursies
- differentiaalvergelijkingen
- numerieke methoden

De oplossing van een differentiaalvergelijking,
wanneer die expliciet op te schrijven is,
kan gezien worden als een soort recursie.

Numerieke methoden ook, maar in de limiet
tijdstap —> 0, convergeren ze naar de DV-oplossing



Voorbeeld: bladluizen

De rozenkweker kiest voor een organisch aanpak van het probleem:

?

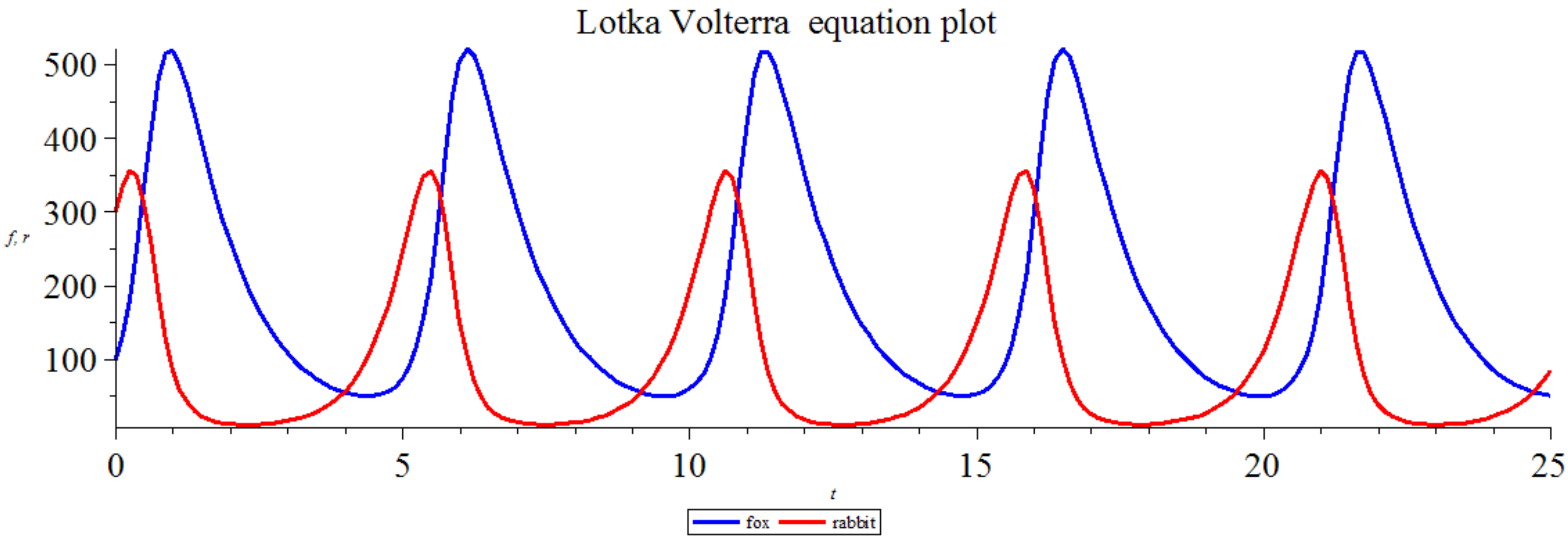
https://www.youtube.com/watch?v=oTnTWre488s

Voorbeeld: bladluizen

Nu moeten we zowel de bladluizen als lieveheersbeestjes bijhouden.

Dit leidt tot roofdier-prooidier modellen.

Is het een goed idee om lieveheersbeesten in te zetten?



Program

- Organisatie
- Modelleren en Simuleren
- Voorkennis

Voorkennis

Infi

- Differentiëren
- Integreren
- Taylorreeks
- Complexe getallen

Lineaire Algebra

- Gauss eliminatie (vegen van kolommen)
- eigenwaarden en eigenvectoren

Mathematica

Wiskundige analyse strategie

- eenvoudige voorbeelden goed begrijpen
- moeilijkere problemen ‘reduceren’ tot de eenvoudigere
  - niet-lineaire problemen benaderen door lineaire
  - hoger dimensionale problemen benaderen door 1-dimensionale
  - . . .

Voorbeeld. Stel $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ is een gladde functie en

$$f(\alpha) = 0 \quad \text{voor 'n} \quad \alpha \in (a,b).$$

Hoe α te berekenen?

niet-lineaire problemen benaderen door lineaire

Voorbeeld. Stel $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ is een gladde functie en

$$f(\alpha) = 0 \ \text{ voor 'n } \ \alpha \in (a,b).$$

Hoe α te berekenen?

- Gok een waarde x_0. Schrijf $\alpha = x_0 + h$. Hopelijk is h klein.

  $0 = f(\alpha) = f(x_0 + h) = f(x_0) + h\, f'(x_0) + \frac{1}{2}h^2 f''(x_0) + \ldots$

- Benader met het 'lineaire deel':

$$0 = f(x_0) + h_0 f'(x_0)$$

  Met $h_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ is hopelijk $\alpha = x_0 + h \approx x_0 + h_0$.

- Als met $x_1 \equiv x_0 + h_0$ geldt $f(x_1) \not\approx 0$, herhaal de procedure.

Taylor reeks

Als f $k+1$ maal continue differentieerbaar is in de buurt van x_0, dan

$$f(x_0+h) = f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{h^2}{2!}f''(x_0)+\ldots+\frac{h^k}{k!}f^{(k)}(x_0)+R$$

De **restterm** R voldoet aan

$$R = \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}f^{(k+1)}(\xi)$$

voor zekere ξ tussen x_0 en x_0+h.

Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

hoger dim. problemen benaderen door 1-dim.

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \text{met} \quad \mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} \equiv \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \text{met} \quad \mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} \equiv \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Bereken de **eigenwaarden** en bijbehorende **eigenvectoren**:

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1 \quad \text{en} \quad \mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \lambda_2 \mathbf{v}_2$$

hoger dim. problemen benaderen door 1-dim.

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \text{met} \quad \mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} \equiv \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Bereken de **eigenwaarden** en bijbehorende **eigenvectoren**:

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1 \quad \text{en} \quad \mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \lambda_2 \mathbf{v}_2$$

Als $\mathbf{v}_1$ en $\mathbf{v}_2$ lineair onafhankelijk zijn, dan

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 \;\; \text{en} \;\; \mathbf{y} = \beta_1 \mathbf{v}_1 + \beta_2 \mathbf{v}_2,$$

zekere scalairen α_i en β_i.

hoger dim. problemen benaderen door 1-dim.

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \text{met} \quad \mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} \equiv \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Bereken de **eigenwaarden** en bijbehorende **eigenvectoren**:

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1 \quad \text{en} \quad \mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \lambda_2 \mathbf{v}_2$$

Als $\mathbf{v}_1$ en $\mathbf{v}_2$ lineair onafhankelijk zijn, dan

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 \quad \text{en} \quad \mathbf{y} = \beta_1\mathbf{v}_1 + \beta_2\mathbf{v}_2,$$

zekere scalairen α_i en β_i.

$$\begin{aligned} \text{Dus} \qquad \mathbf{y} &= \beta_1\mathbf{v}_1 + \beta_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2) \\ &= \alpha_1\mathbf{A}\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \alpha_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\lambda_2\mathbf{v}_2 \end{aligned}$$

en we zien dat

$$\beta_1 = \lambda_1\alpha_1 \quad \text{en} \quad \beta_2 = \lambda_2\alpha_2.$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \text{met} \quad \mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} \equiv \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Bereken de **eigenwaarden** en bijbehorende **eigenvectoren**:

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1 \quad \text{en} \quad \mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \lambda_2 \mathbf{v}_2$$

Als $\mathbf{v}_1$ en $\mathbf{v}_2$ lineair onafhankelijk zijn, dan

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 \quad \text{en} \quad \mathbf{y} = \beta_1\mathbf{v}_1 + \beta_2\mathbf{v}_2,$$

zekere scalairen α_i en β_i: $\qquad \beta_1 = \lambda_1 \alpha_1, \quad \beta_2 = \lambda_2 \alpha_2.$

Toepassingen. $\qquad \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n \quad \Leftrightarrow$
met $\mathbf{x}_n = \alpha_1(n)\mathbf{v}_1 + \alpha_2(n)\mathbf{v}_2$ is $\alpha_i(n) = \lambda_i^n \alpha_i(0) \quad (i = 1, 2)$

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad \Leftrightarrow$$

met $\mathbf{x}(t) = \alpha_1(t)\mathbf{v}_1 + \alpha_2(t)\mathbf{v}_2$ is $\alpha_i'(t) = \lambda_i\alpha_i(t) \quad (i = 1, 2)$

Complexe getallen

$\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$ dan is $a = \mathrm{Re}(\lambda)$ en $b = \mathrm{Im}(\lambda)$.

$$a + ib = r\,e^{i\phi}, \quad a = \tfrac{1}{2}(\lambda + \bar{\lambda}), \quad b = \tfrac{1}{2i}(\lambda - \bar{\lambda})$$

voor $\quad r = \sqrt{a^2 + b^2} = |\lambda| \geq 0 \qquad$ en

$\phi \in [0, 2\pi)$ zodat $a = r\,\cos(\phi),\ b = r\,\sin(\phi) \qquad (\tan(\phi) = \frac{b}{a})$

Voorbeeld.

$f(t) = e^{i\,\nu\,t}$. Dan $f'(t) = i\,\nu\,e^{i\,\nu\,t} = i\,\nu\,f(t)$

Als $g(t) = \cos(\nu\,t)$, dan $g = \mathrm{Re}(f)$ en

$g'(t) = -\nu\,\sin(\nu\,t) = \mathrm{Re}(f'(t)) = \mathrm{Re}(i\,\nu\,e^{i\nu\,t}))$

Complexe getallen

$\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$ dan is $a = \mathrm{Re}(\lambda)$ en $b = \mathrm{Im}(\lambda)$.

$$a + ib = r\, e^{i\phi}, \quad a = \tfrac{1}{2}(\lambda + \bar{\lambda}), \quad b = \tfrac{1}{2i}(\lambda - \bar{\lambda})$$

voor $r = \sqrt{a^2 + b^2} = |\lambda| \geq 0$ en

$\phi \in [0, 2\pi)$ zodat $a = r \cos(\phi),\ b = r \sin(\phi)$ $\quad (\tan(\phi) = \frac{b}{a})$

$\lambda, \zeta \in \mathbb{C}$. Dan $\overline{\lambda\zeta} = \bar{\lambda}\,\bar{\zeta}$, $\overline{\lambda + \zeta} = \bar{\lambda} + \bar{\zeta}$

$a, b \in \mathbb{R}$, $\lambda = r\, e^{i\phi} \in \mathbb{C}$. Dan

$$\mathrm{Re}(\lambda(a + ib)) = r \cos(\phi)\, a - r \sin(\phi)\, b.$$

$\alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R}$. Dan

$$\alpha a - \beta b = \mathrm{Re}(\gamma z) \quad \text{voor} \quad \gamma \equiv \alpha + i\beta, \quad z \equiv a + ib$$