

WISB134

Modellen & Simulatie

Lecture 4 - Scalaire recursies



Universiteit Utrecht

Overzicht van ModSim

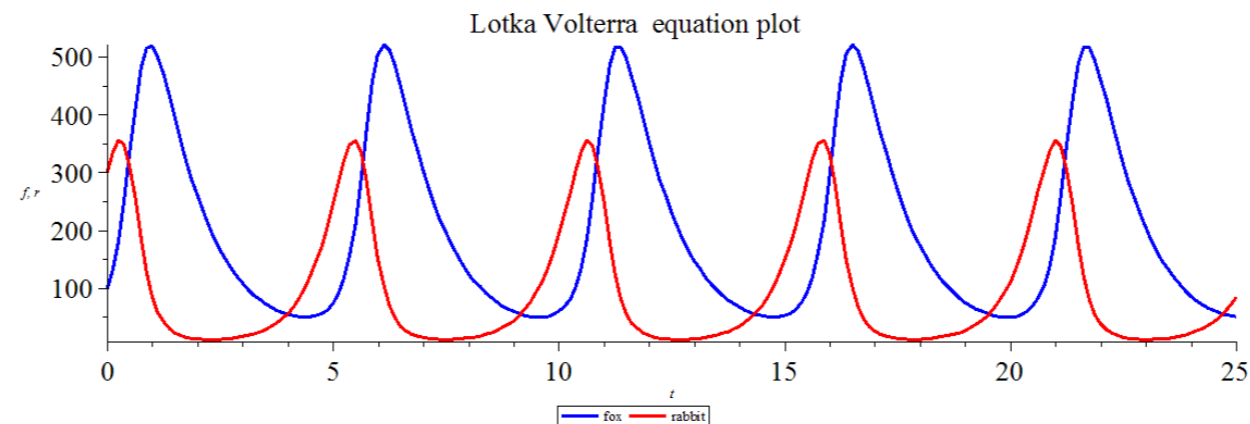
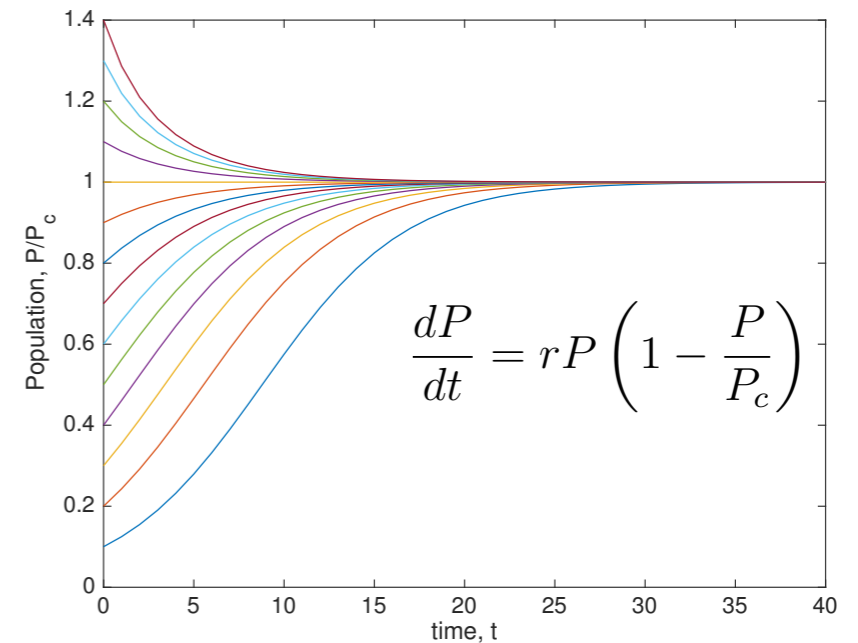
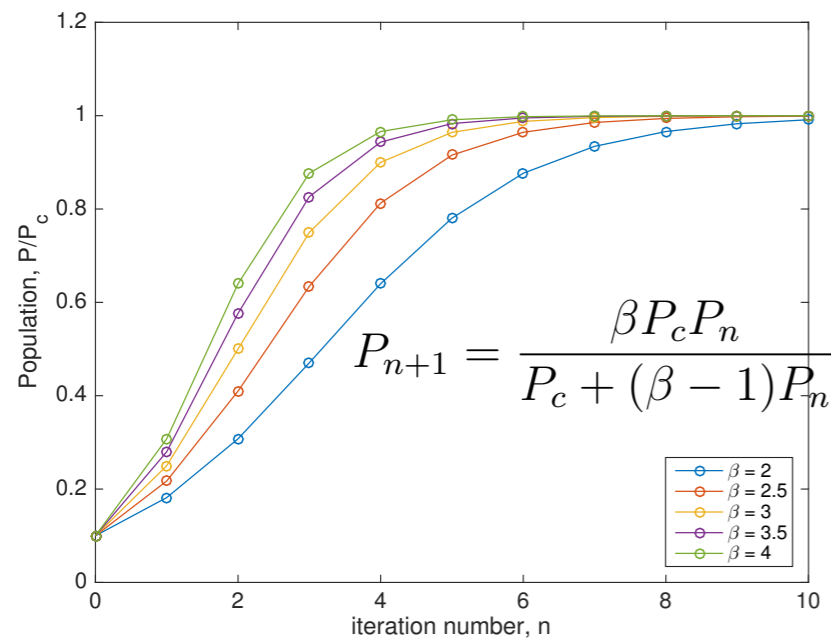
- Basisbegrippen dynamische modellen
 - Definities recursies, DVs, numerieke methoden
 - Oplossingen DVs
 - Convergentie numerieke methoden
- Dynamica
 - ➔ Scalaire dynamica
 - Dynamica op \mathbf{R}^d
 - Lineaire dynamica op \mathbf{R}^2
 - Bijzondere gevallen
 - Lineaire kansmodellen (Markovketens)
 - Niet-autonome systemen (Resonantie)
 - Hogere orde numerieke methoden

Meeste
aandacht
(t/m 1 apr.)

Dynamica

Dynamica gaat grotendeels over het categorizeren van de oplossingen van de modellen:

- wat is het gedrag van de oplossingen op lange tijd?
- hoe hangt dit af van de beginwaarde?
- van de parameters van het model?



Scalaire dynamica

Vandaag en
woensdag

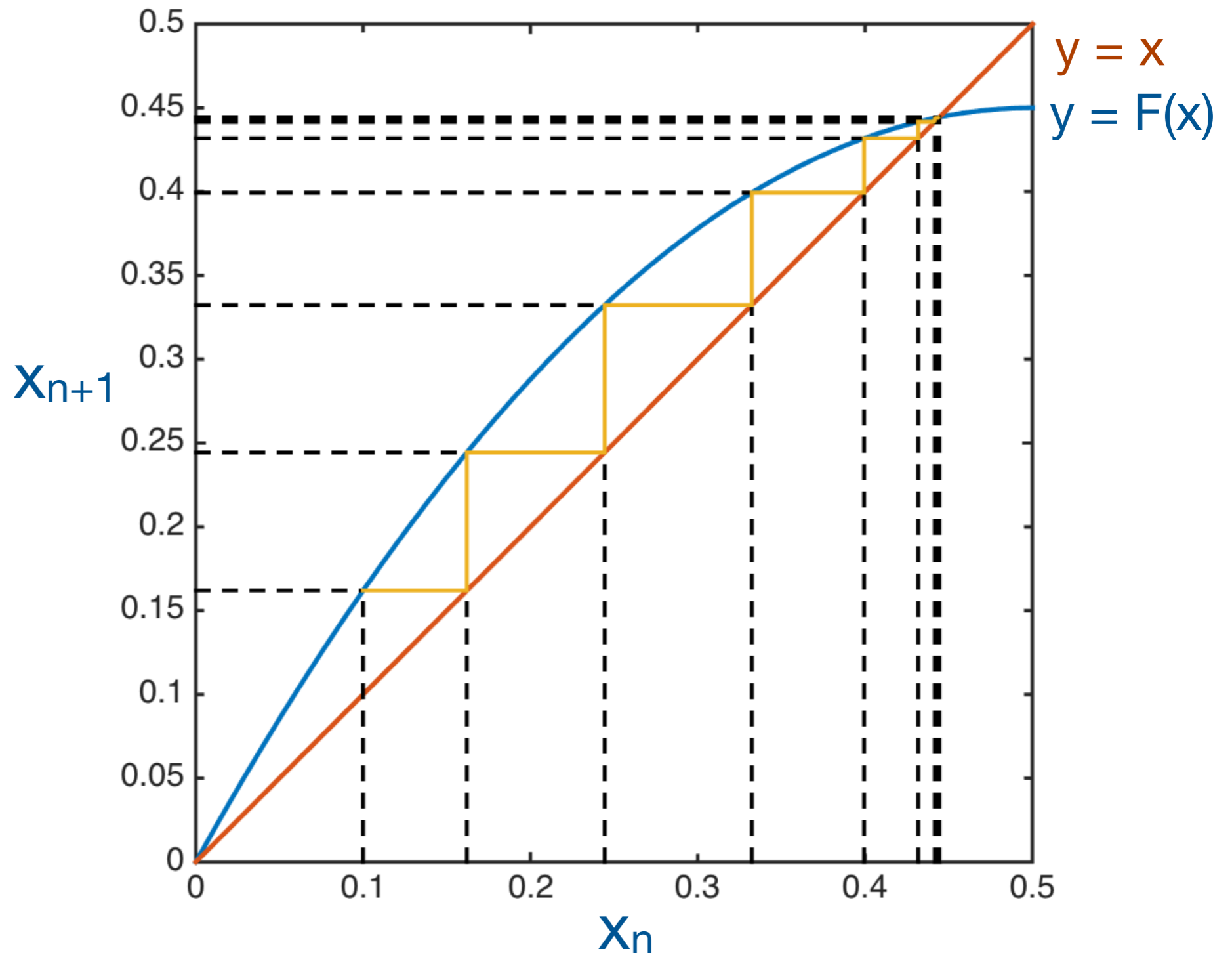
- Recursies op \mathbf{R}^1
 - Grafische analyse methode
 - Evenwichten
 - Stabiliteit
 - Periodieke banen
 - Bifurcaties
 - Chaos
- Differentiaalvergelijkingen op \mathbf{R}^1
 - Evenwichten en stabiliteit
- Numerieke methoden op \mathbf{R}^1
 - Evenwichten en stabiliteit

Grafische analyse methode

Logistic model, $F(x) = rx(1 - x)$, $r = 1.8$

Scalaire dynamica

- Recursies op \mathbf{R}^1
 - Grafische analyse
 - Evenwichten
 - Stabiliteit
 - Periodieke banen
 - Bifurcaties
 - Chaos
- DVs op \mathbf{R}^1
 - Evenwicht./stab.
- NMs op \mathbf{R}^1
 - Evenwicht./stab.

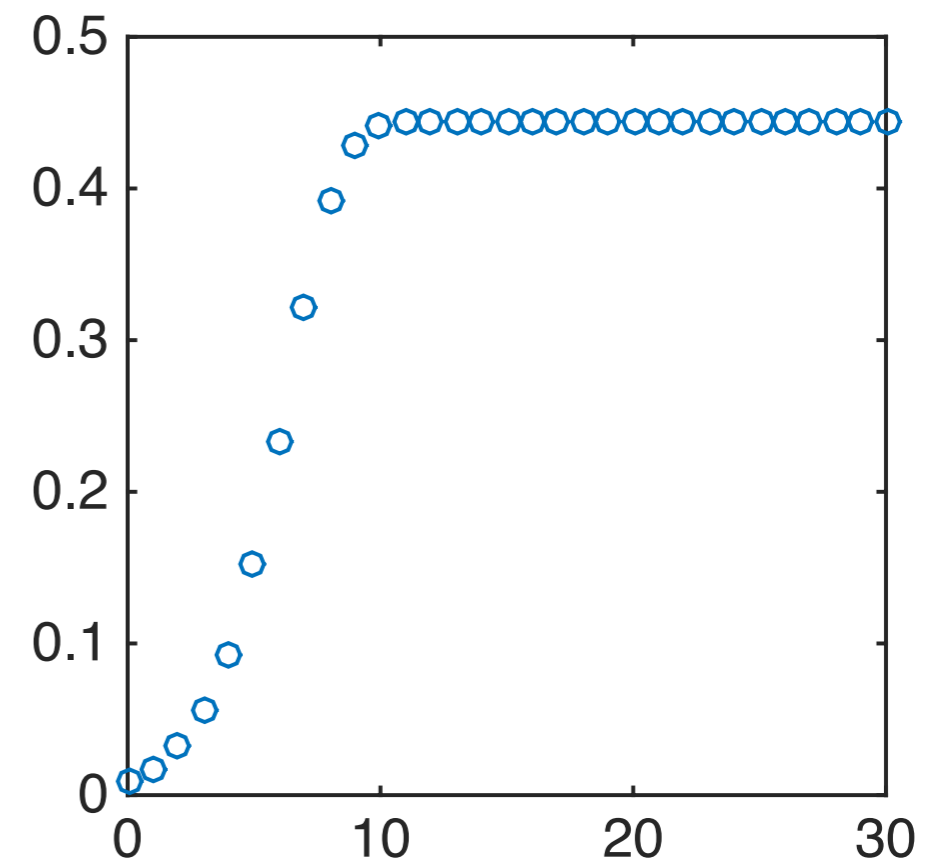
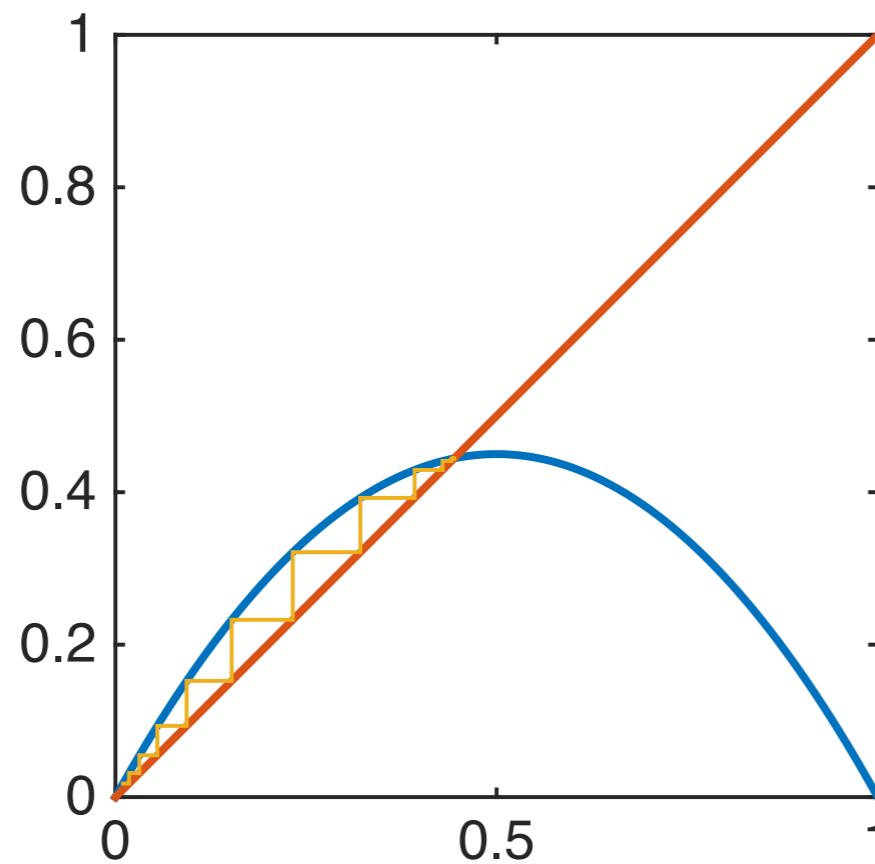


Grafische analyse methode

Scalaire dynamica

- Recursies op \mathbf{R}^1
 - Grafische analyse
 - Evenwichten
 - Stabiliteit
 - Periodieke banen
 - Bifurcaties
 - Chaos
- DVs op \mathbf{R}^1
 - Evenwicht./stab.
- NMs op \mathbf{R}^1
 - Evenwicht./stab.

Logistic model, $F(x) = rx(1 - x)$, $r = 1.8$

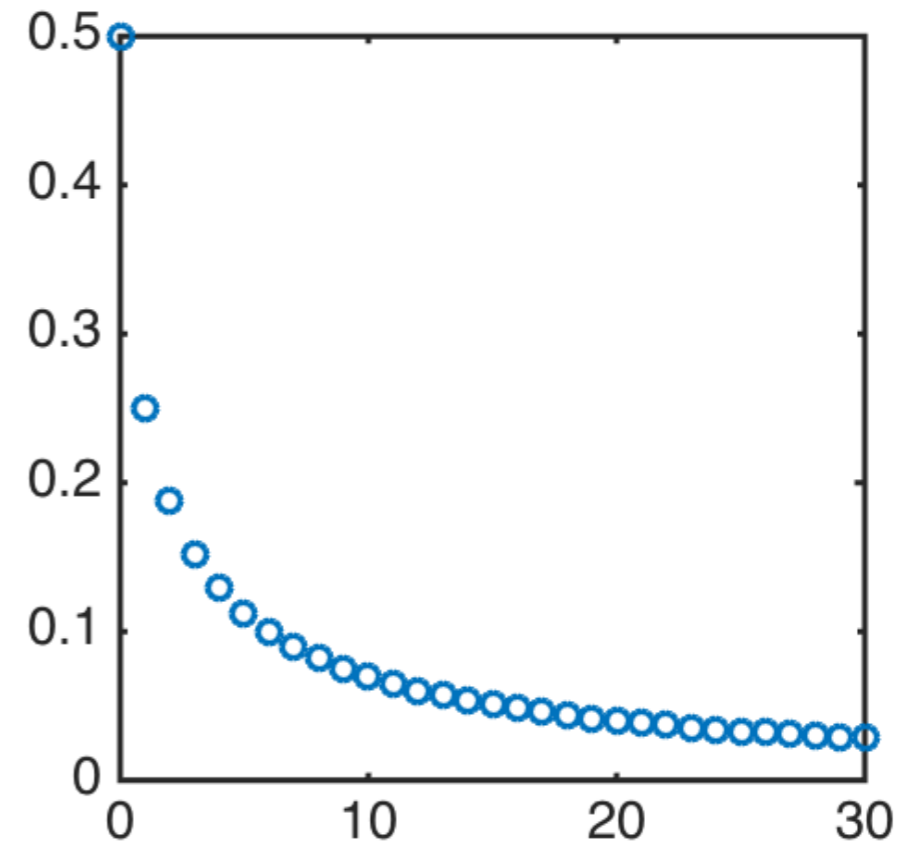
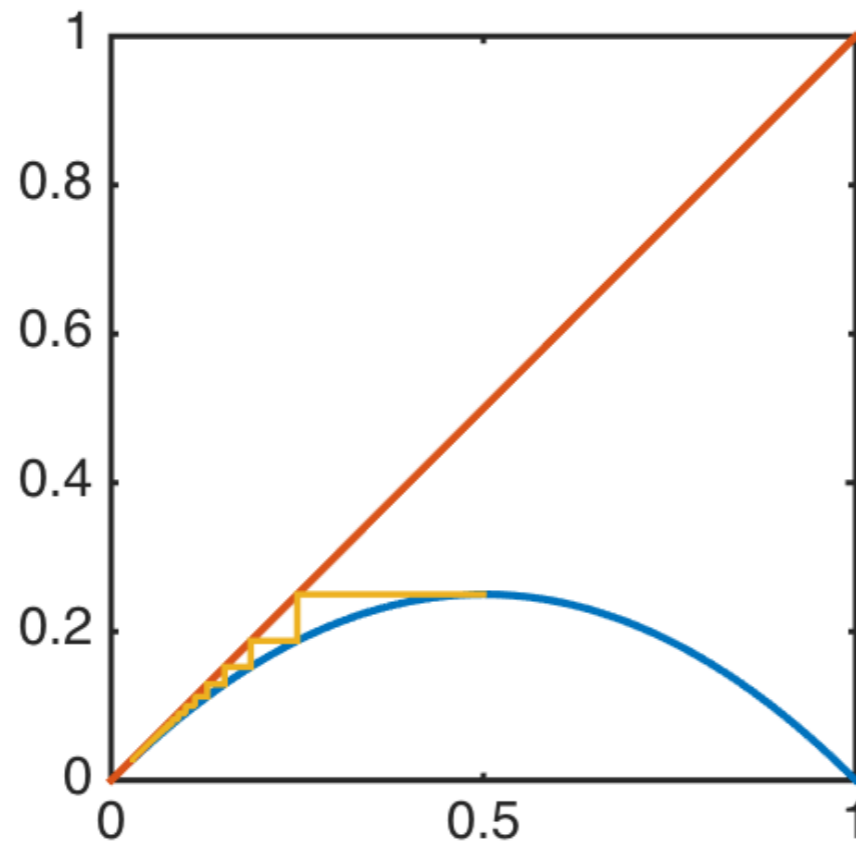


Grafische analyse methode

Scalaire dynamica

- Recursies op \mathbf{R}^1
 - Grafische analyse
 - Evenwichten
 - Stabiliteit
 - Periodieke banen
 - Bifurcaties
 - Chaos
- DVs op \mathbf{R}^1
 - Evenwicht./stab.
- NMs op \mathbf{R}^1
 - Evenwicht./stab.

Logistic model, $F(x) = rx(1 - x)$, $r = 1.8$

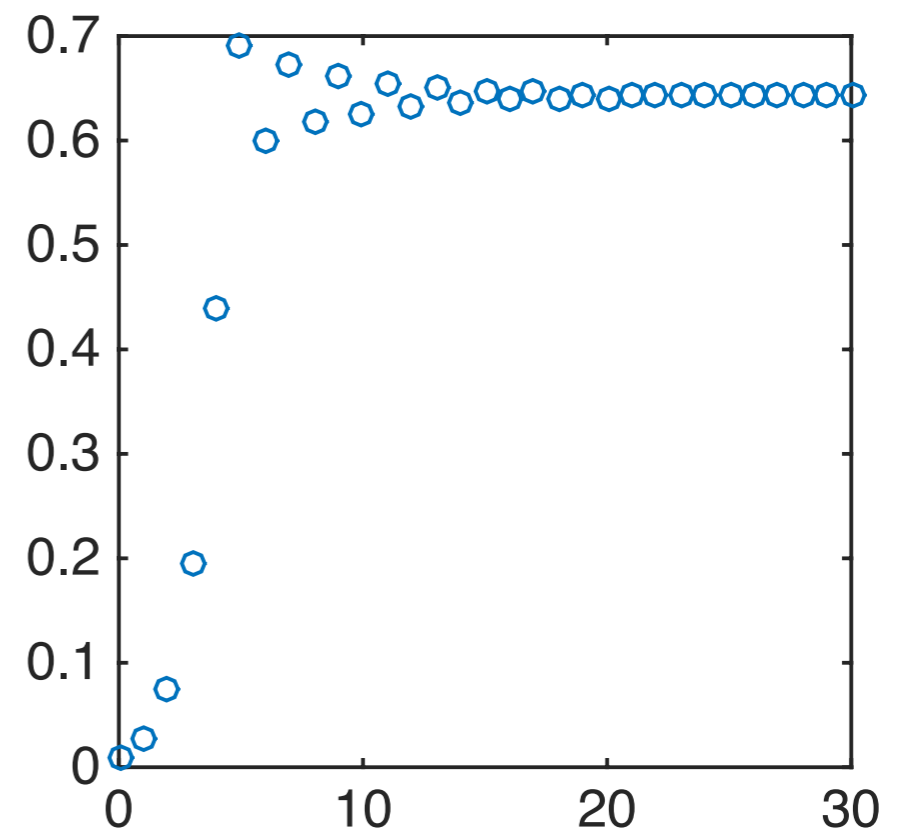
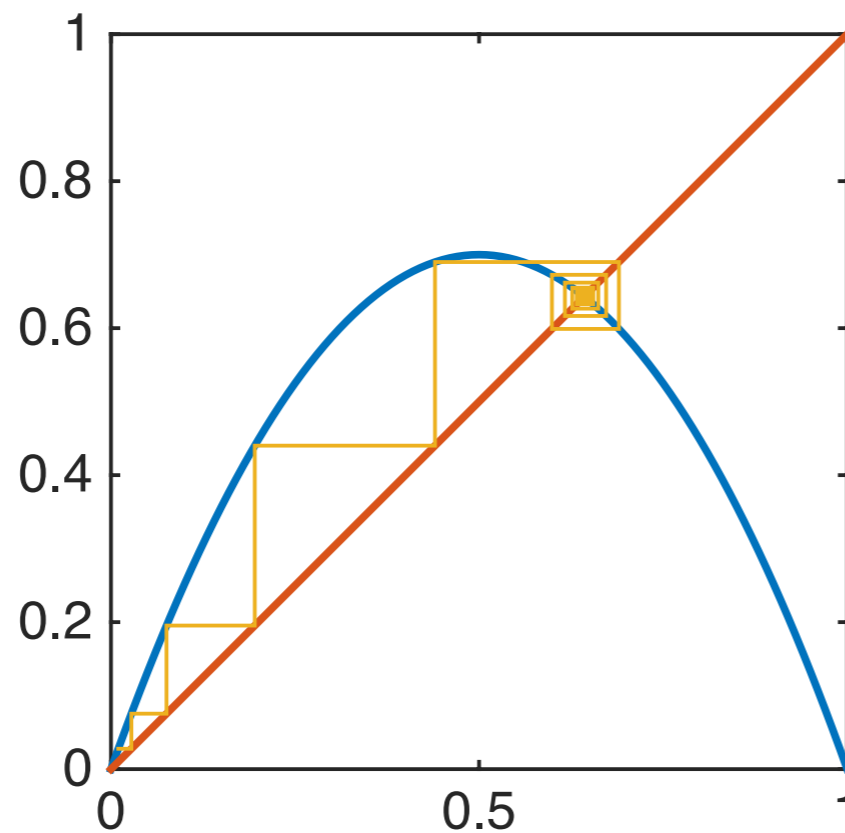


Grafische analyse methode

Scalaire dynamica

- Recursies op \mathbf{R}^1
 - Grafische analyse
 - Evenwichten
 - Stabiliteit
 - Periodieke banen
 - Bifurcaties
 - Chaos
- DVs op \mathbf{R}^1
 - Evenwicht./stab.
- NMs op \mathbf{R}^1
 - Evenwicht./stab.

Logistic model, $F(x) = rx(1 - x)$, $r = 1.8$



Evenwichten

Scalaire dynamica

- Recursies op \mathbf{R}^1
 - Grafische analyse
 - Evenwichten
 - Stabiliteit
 - Periodieke banen
 - Bifurcaties
 - Chaos
- DVs op \mathbf{R}^1
 - Evenwicht./stab.
- NMs op \mathbf{R}^1
 - Evenwicht./stab.

- Een *baan* is een rij

$$\{x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots\}$$

waarvan $x_{n+1} = F(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$

- Een *evenwicht* of *dekpunt* is een triviale

baan $x_n = x_{n-1} = \dots = x_1 = x_0 = \alpha$

- Een dekpunt voldoet dus aan

$$\alpha = F(\alpha)$$

Stabiliteit

Scalaire dynamica

- Recursies op \mathbf{R}^1
 - Grafische analyse
 - Evenwichten
 - Stabiliteit
 - Periodieke banen
 - Bifurcaties
 - Chaos
- DVs op \mathbf{R}^1
 - Evenwicht./stab.
- NMs op \mathbf{R}^1
 - Evenwicht./stab.

- Een dekpunt α is *stabiel in de zin van*

Lyapunov als voor elk $\varepsilon > 0$ er een

$\delta > 0$ te vinden is zodanig dat

$$|x_n - \alpha| \leq \varepsilon, \quad n = 0, 1, \dots, \quad \text{als} \quad |x_0 - \alpha| \leq \delta$$

Anders is het dekpunt *instabiel*.

- Een dekpunt α is *asymptotisch stabiel*

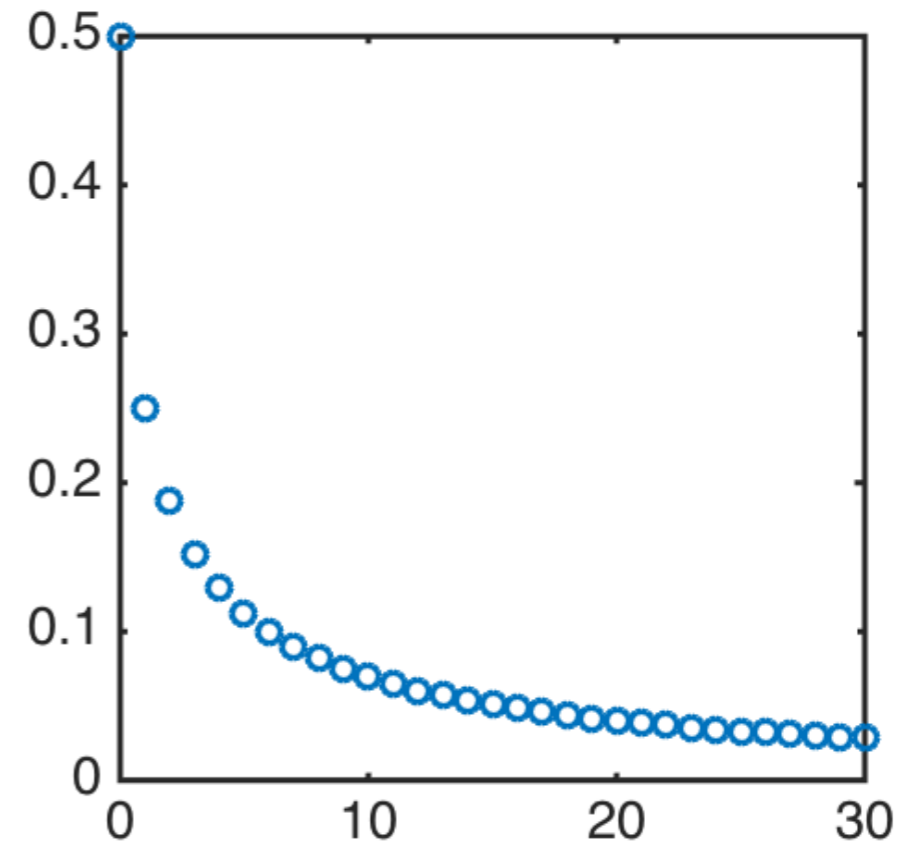
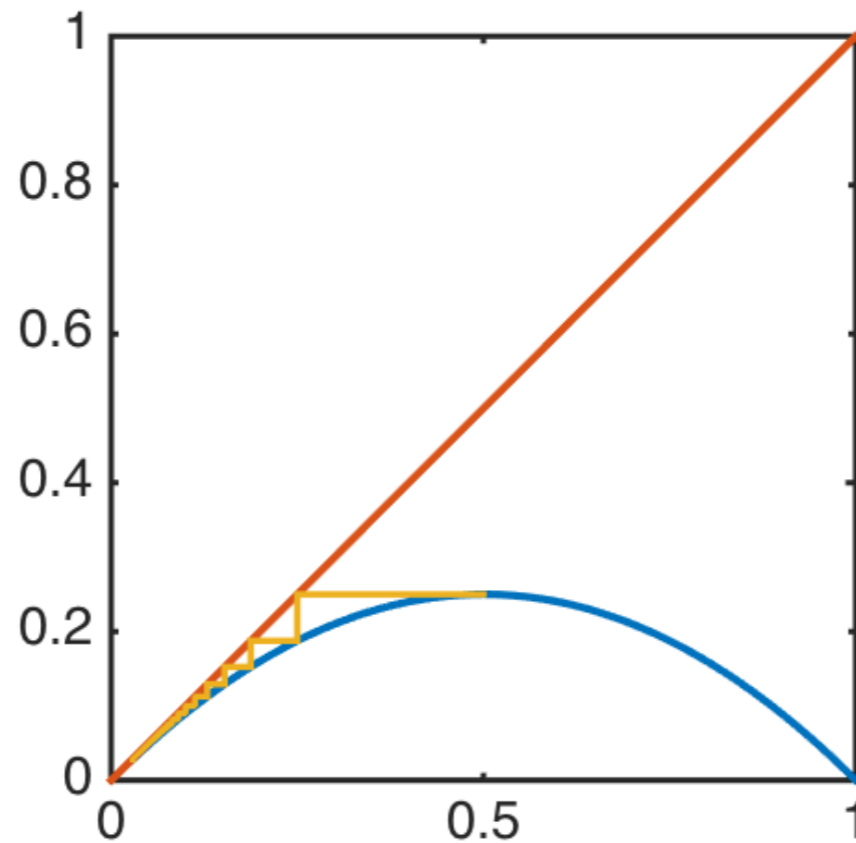
als bovendien geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$

Stabiliteit

Scalaire dynamica

- Recursies op \mathbf{R}^1
 - Grafische analyse
 - Evenwichten
 - Stabiliteit
 - Periodieke banen
 - Bifurcaties
 - Chaos
- DVs op \mathbf{R}^1
 - Evenwicht./stab.
- NMs op \mathbf{R}^1
 - Evenwicht./stab.

Logistic model, $F(x) = rx(1 - x)$, $r = 1.8$

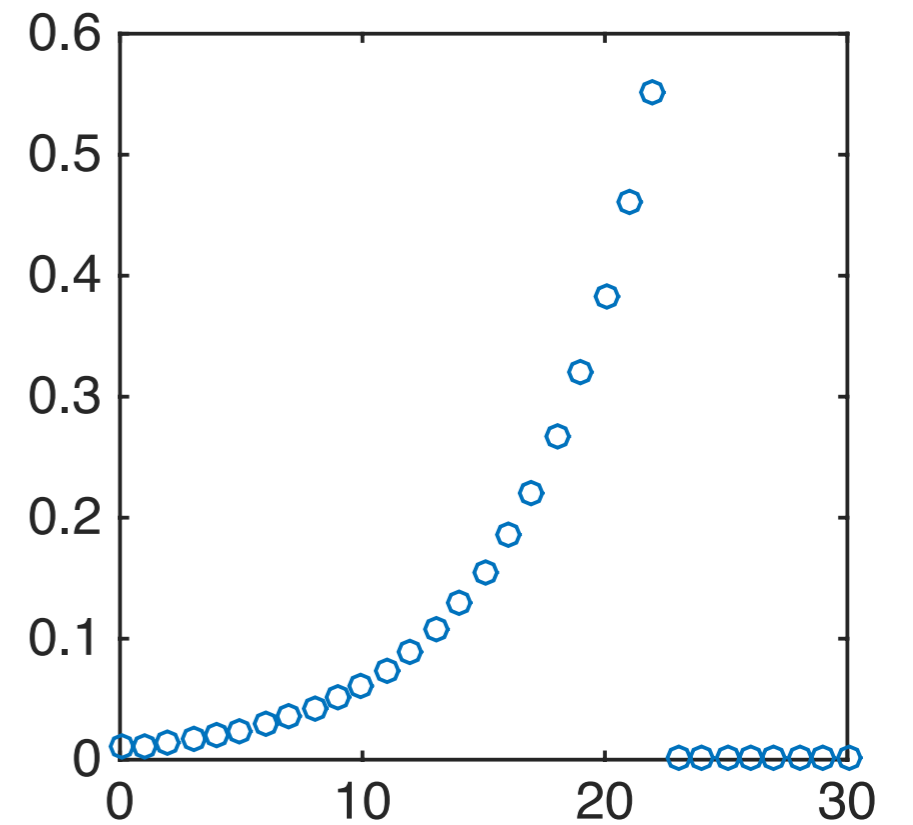
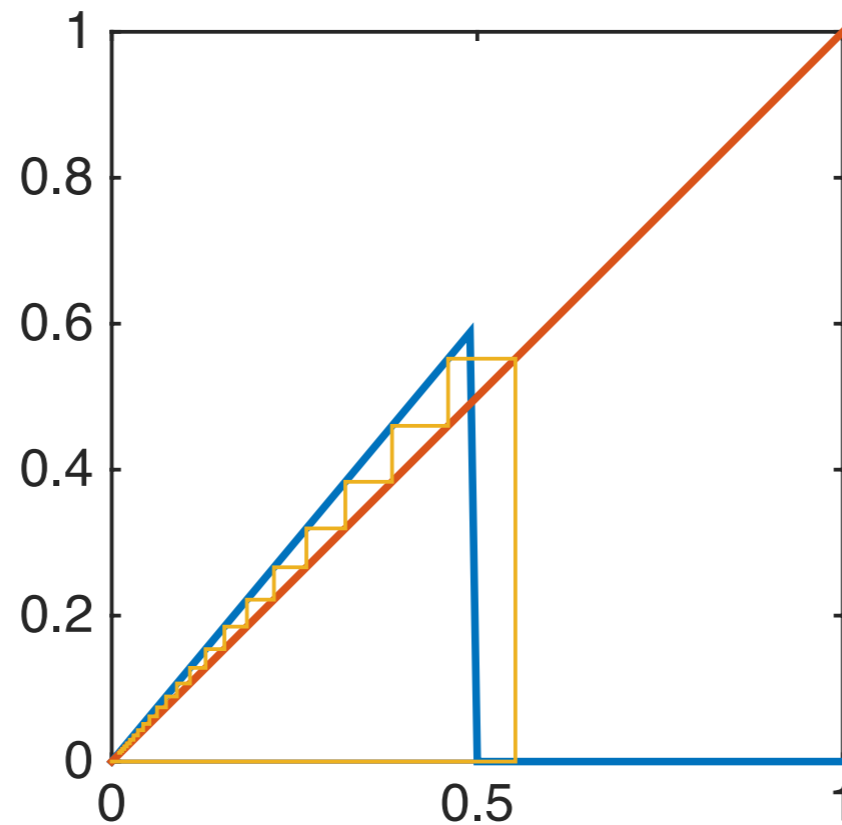


Stabiliteit

Scalaire dynamica

- Recursies op \mathbf{R}^1
 - Grafische analyse
 - Evenwichten
 - Stabiliteit
 - Periodieke banen
 - Bifurcaties
 - Chaos
- DVs op \mathbf{R}^1
 - Evenwicht./stab.
- NMs op \mathbf{R}^1
 - Evenwicht./stab.

$$F(x) = \begin{cases} 1.2x, & x < 1/2 \\ 0, & x \geq 1/2 \end{cases}$$

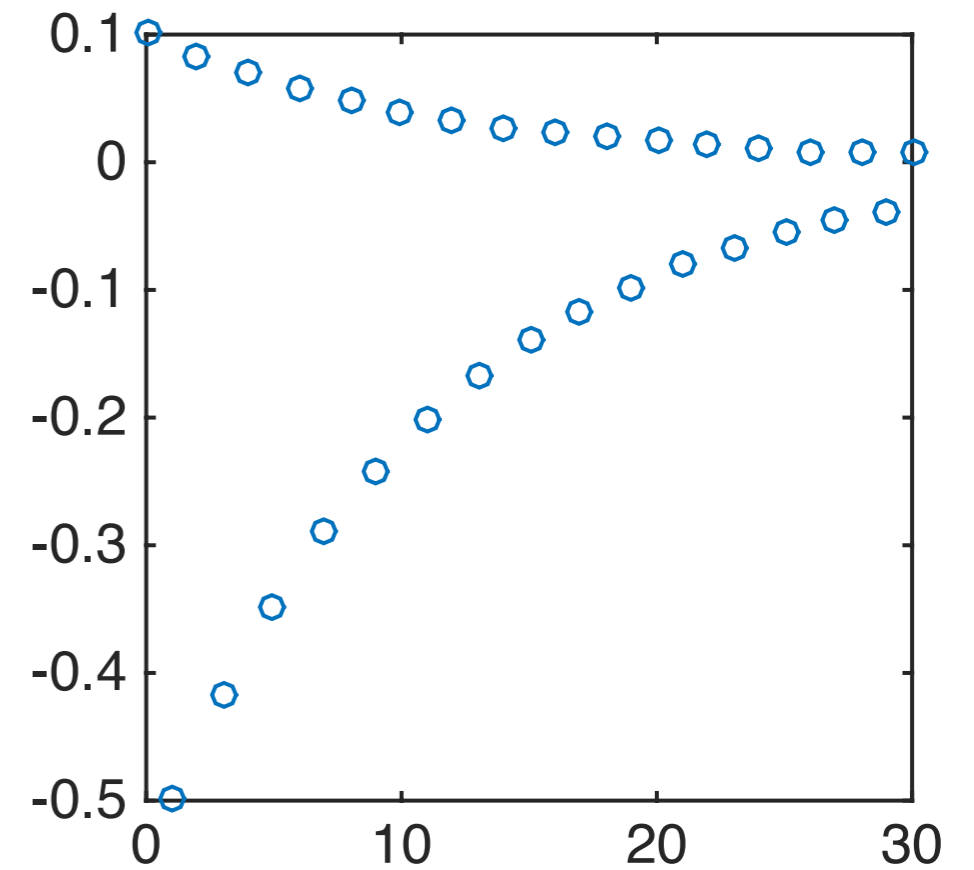
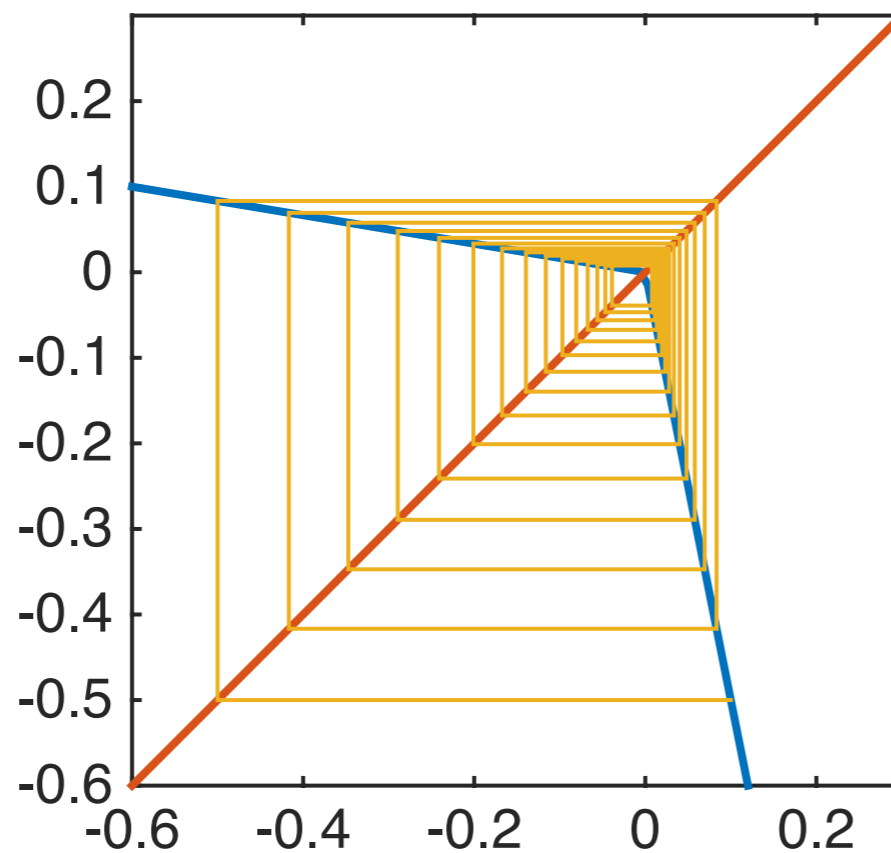


Stabiliteit

Scalaire dynamica

- Recursies op \mathbf{R}^1
 - Grafische analyse
 - Evenwichten
 - Stabiliteit
 - Periodieke banen
 - Bifurcaties
 - Chaos
- DVs op \mathbf{R}^1
 - Evenwicht./stab.
- NMs op \mathbf{R}^1
 - Evenwicht./stab.

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{6}x, & x < 0 \\ -5x, & x \geq 0 \end{cases}$$



Pauze

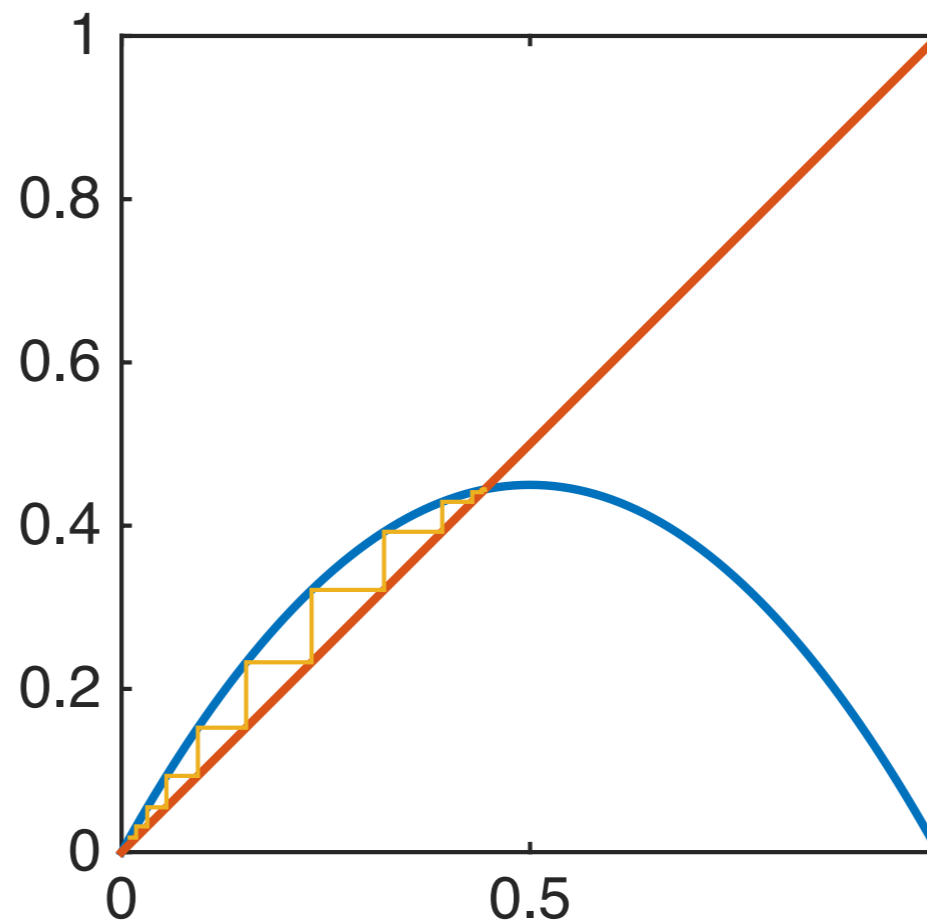
Asymptotische stabiliteit

Scalaire dynamica

- Recursies op \mathbf{R}^1
 - Grafische analyse
 - Evenwichten
 - Stabiliteit
 - Periodieke banen
 - Bifurcaties
 - Chaos
- DVs op \mathbf{R}^1
 - Evenwicht./stab.
- NMs op \mathbf{R}^1
 - Evenwicht./stab.

Stelling Een dekpunt α is:

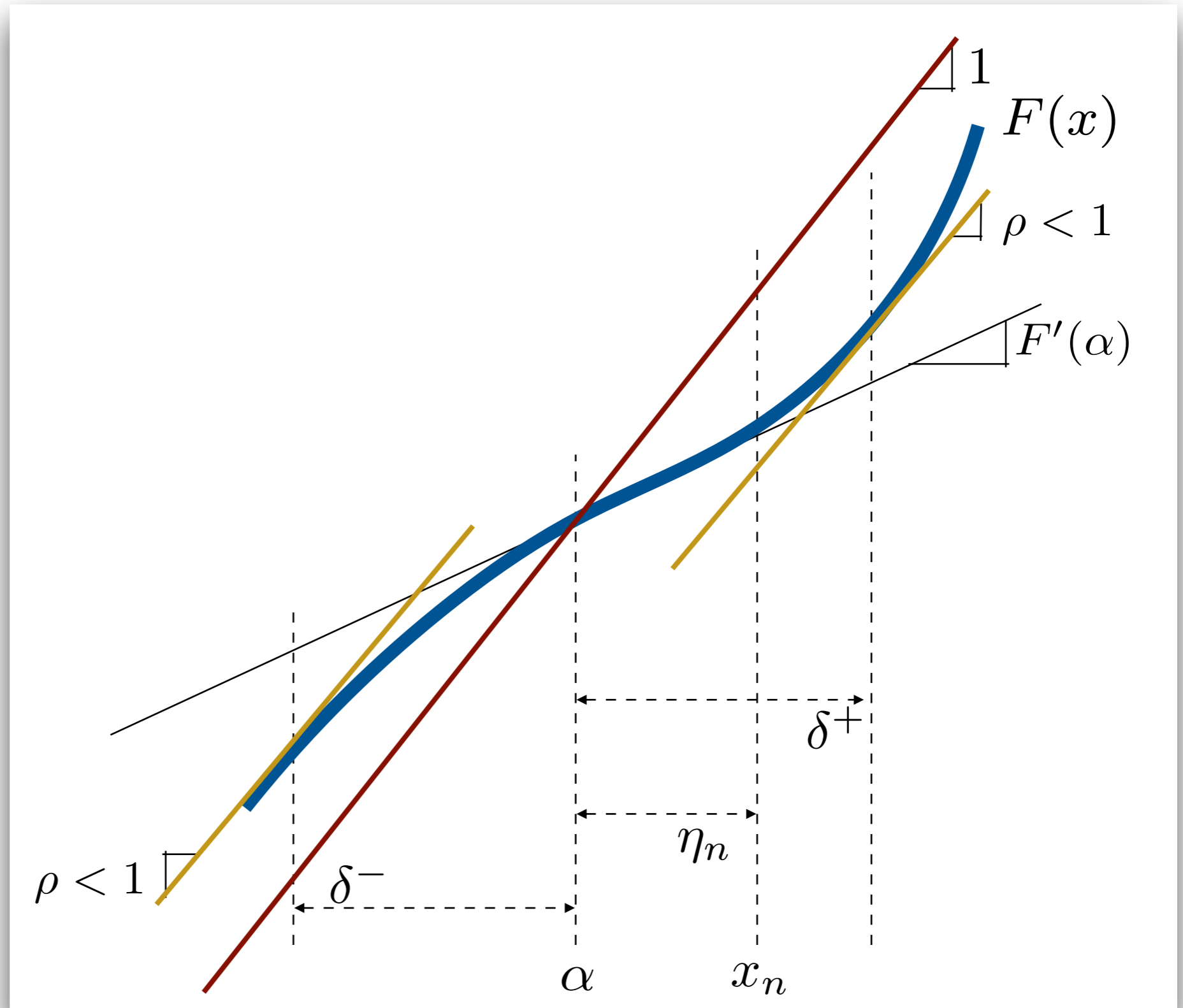
- asymptotisch stabiel als $|F'(\alpha)| < 1$,
- instabiel als $|F'(\alpha)| > 1$.



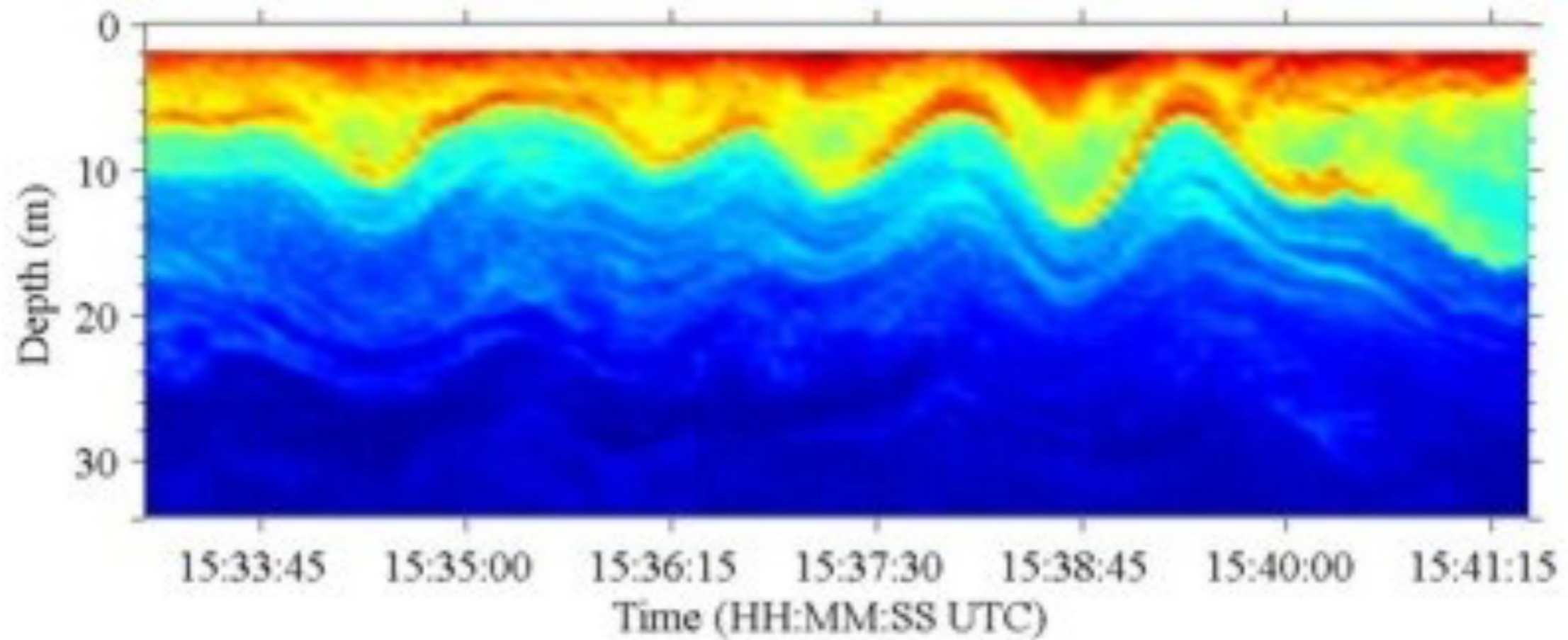
Asymptotische stabiliteit

Scalaire dynamica

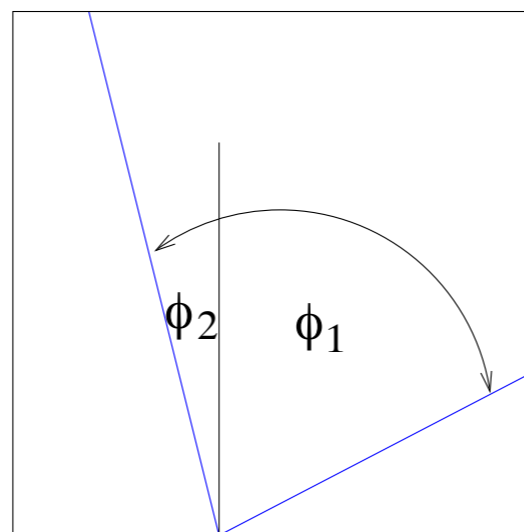
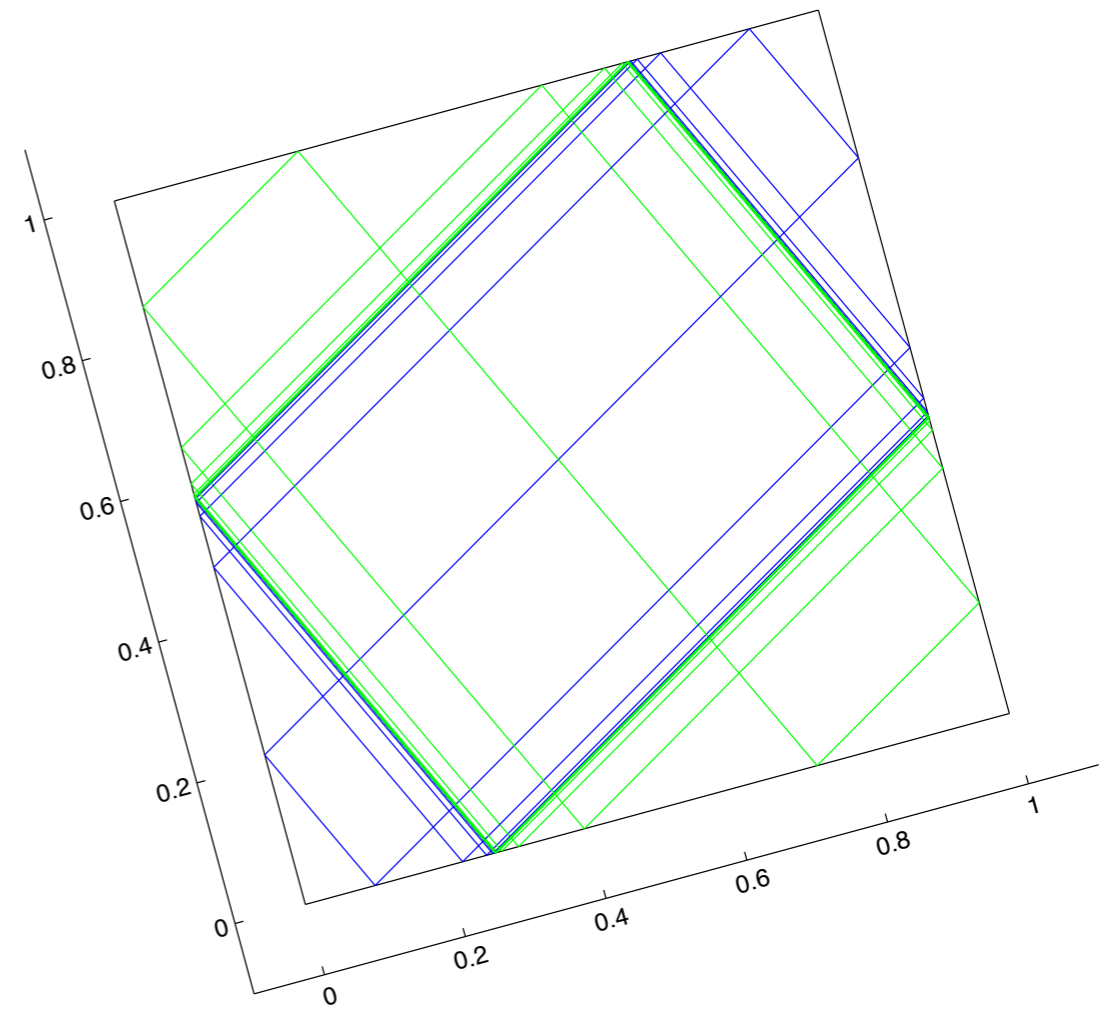
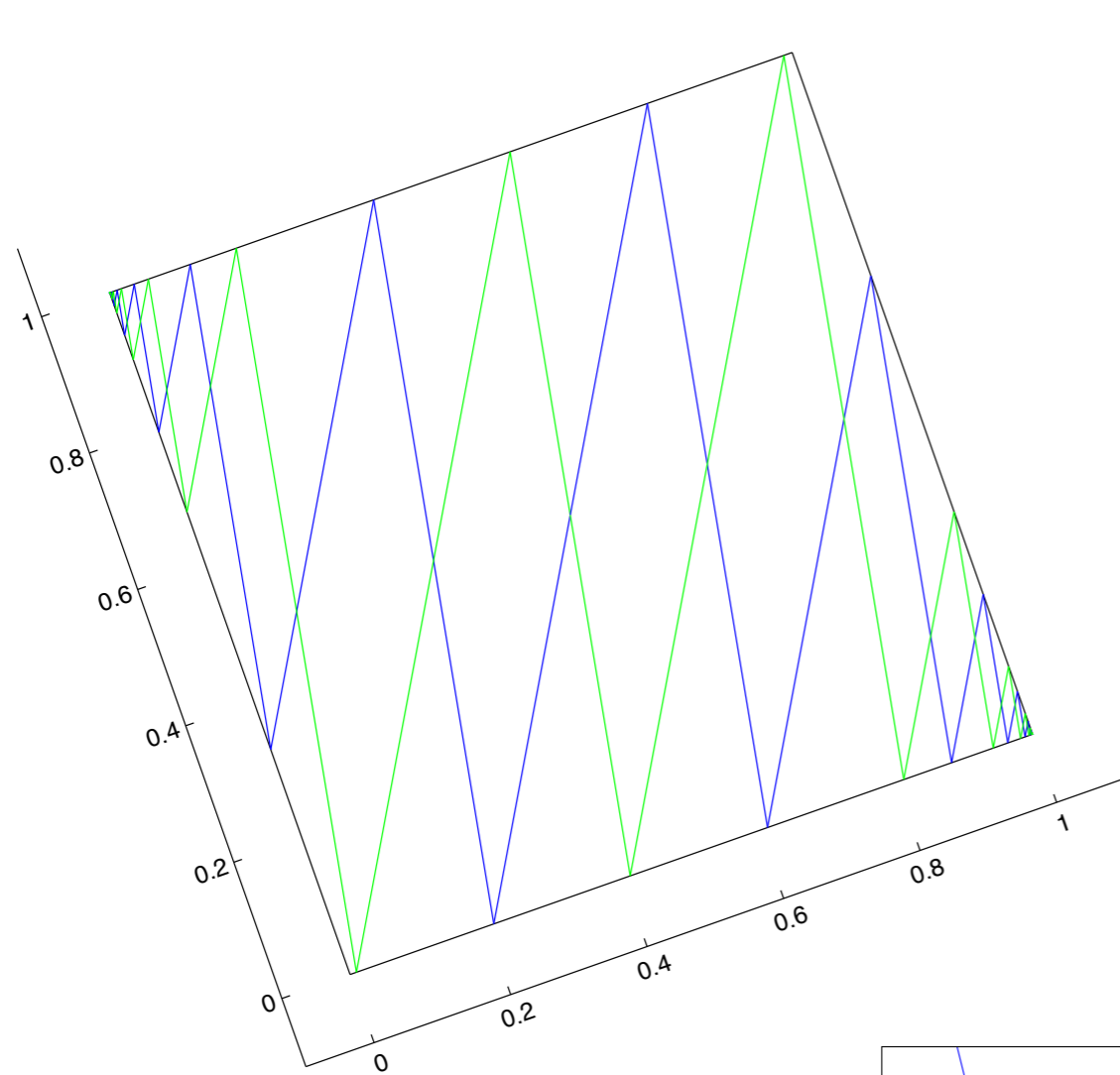
- Recursies op \mathbf{R}^1
 - Grafische analyse
 - Evenwichten
 - Stabiliteit
 - Periodieke banen
 - Bifurcaties
 - Chaos
- DVs op \mathbf{R}^1
 - Evenwicht./stab.
- NMs op \mathbf{R}^1
 - Evenwicht./stab.



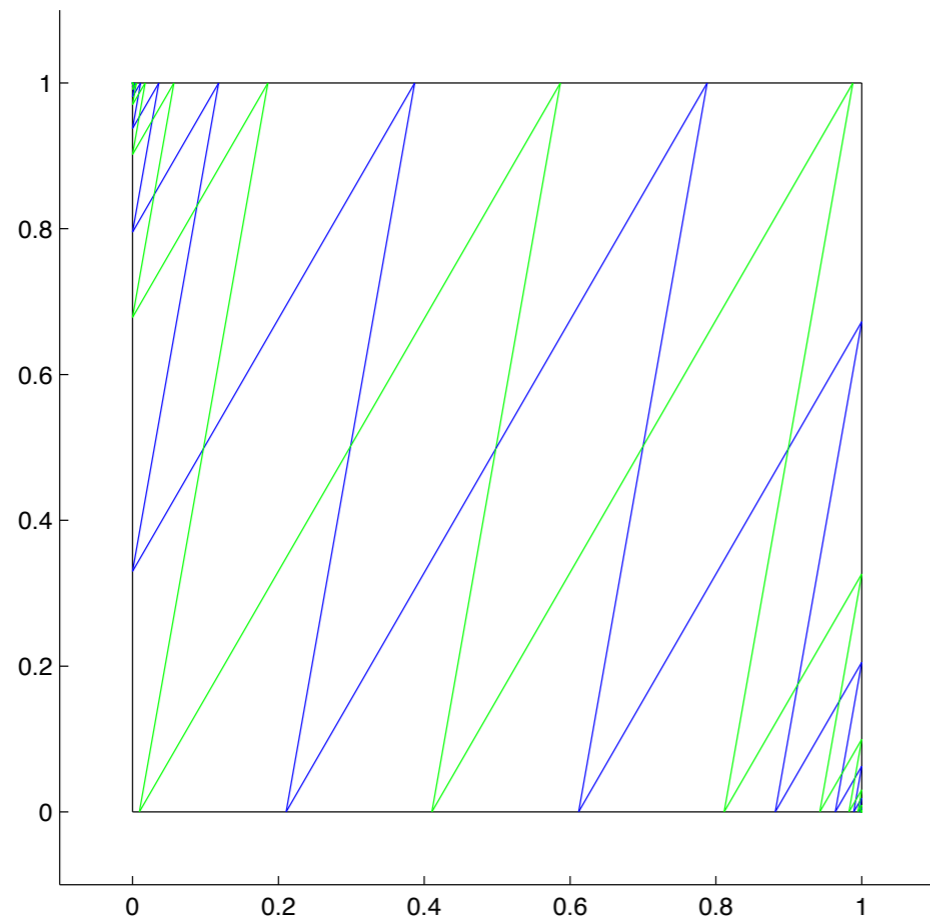
Internal wave focusing



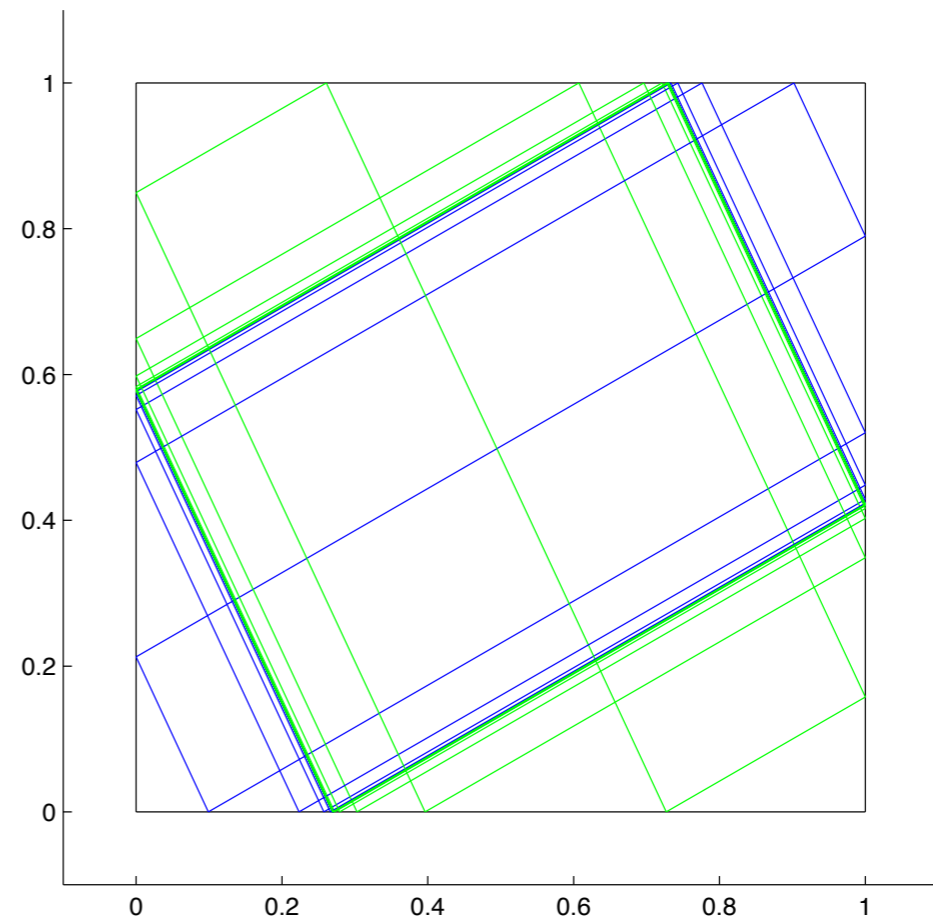
Internal wave focusing



Internal wave focusing



(a) Subcritical case with starting point at $x_0 = (0.5, 0.5)$. $\phi_1 = \pi/6$, $\phi_2 = -\pi/18$.

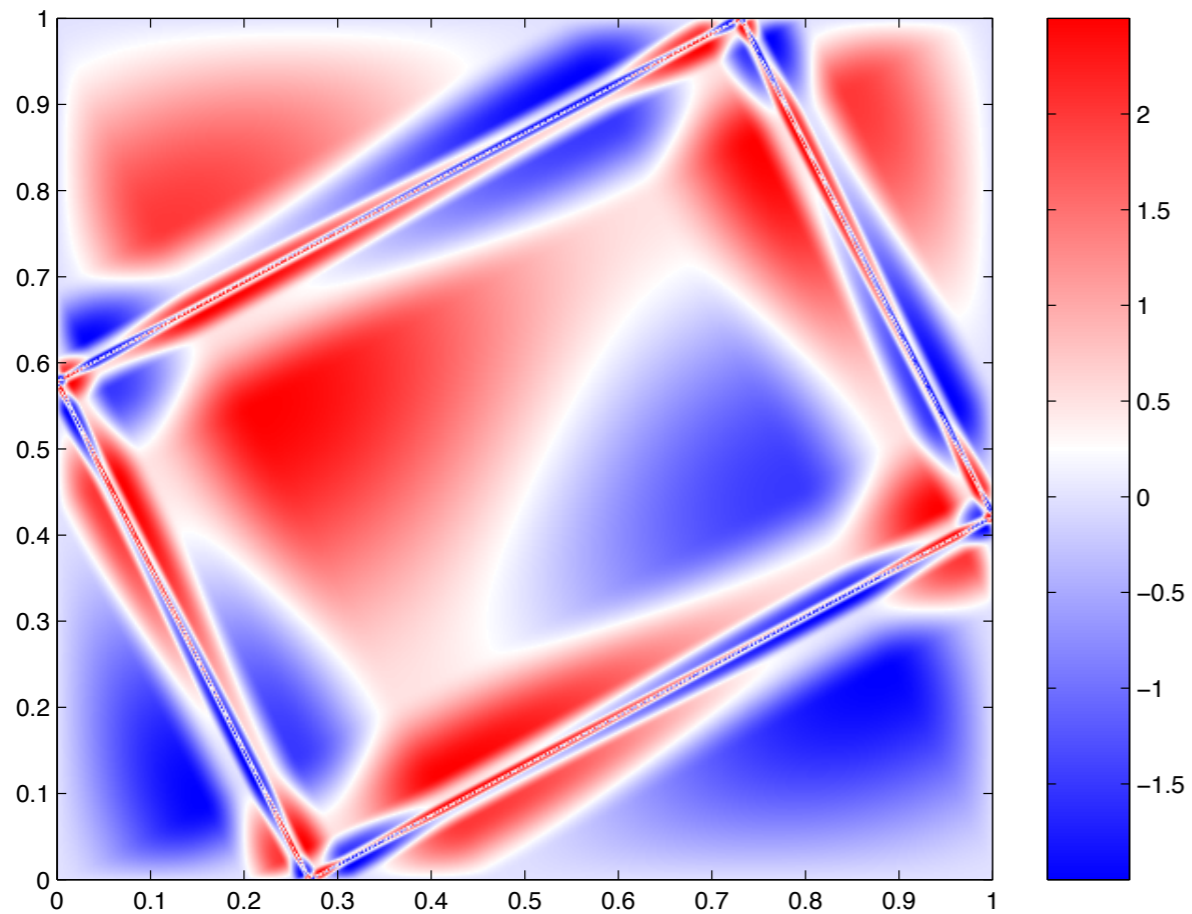


(b) Supercritical case with starting point $x_0 = (0.5, 0.5)$. Here $\phi_1 = \pi/3$, $\phi_2 = 5\pi/36$.

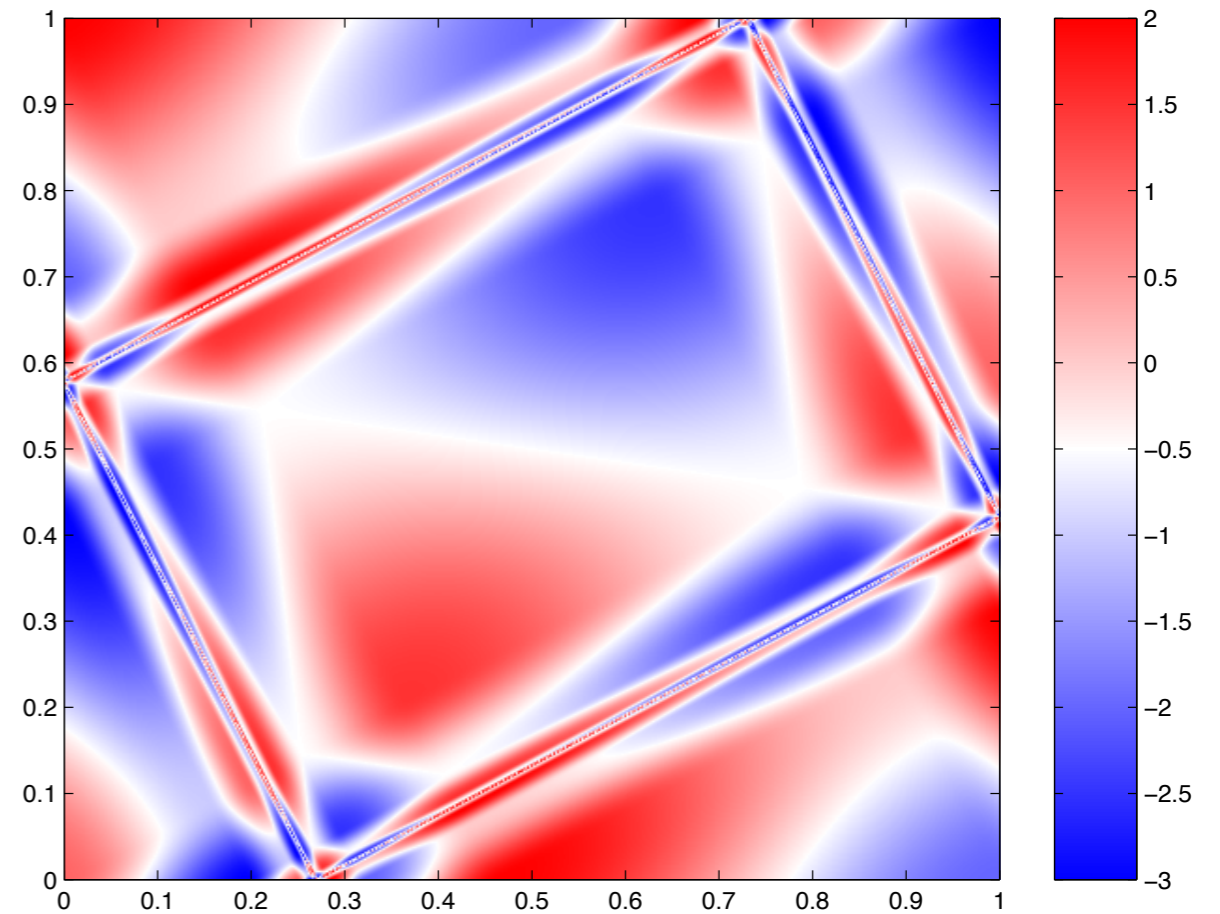
Theorem 1. *For any $\phi_2 < 0$ and for any starting point the characteristics approach to the square's upper left or lower right corner.*

Theorem 2. *A simple attractor occurs if and only if $\frac{\pi}{4} < \phi_1 \leq \frac{\pi}{2} - \phi_2$.*

Internal wave focusing

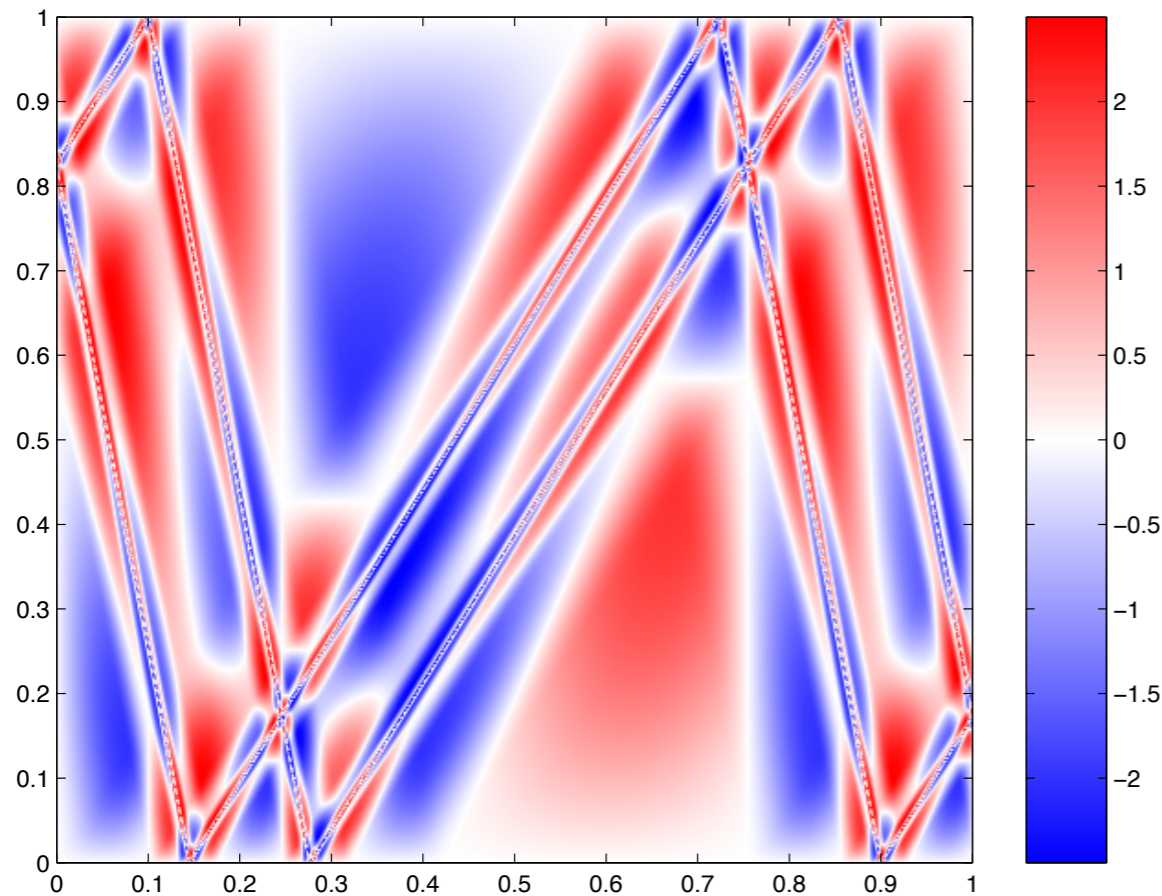


(a) Streamfunction: $\phi_1 = \pi/3$, $\phi_2 = 5\pi/36$

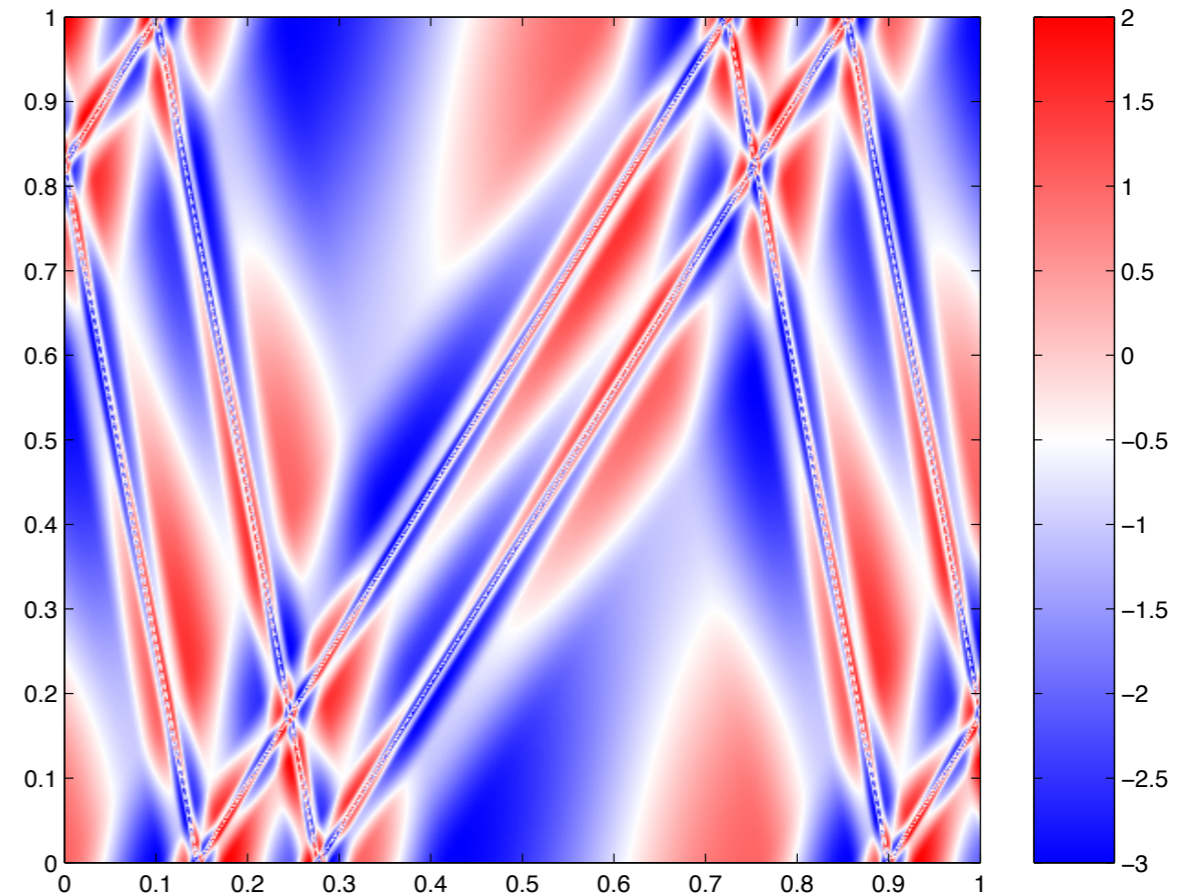


(b) Pressure field: $\phi_1 = \pi/6$, $\phi_2 = 5\pi/36$

Internal wave focusing

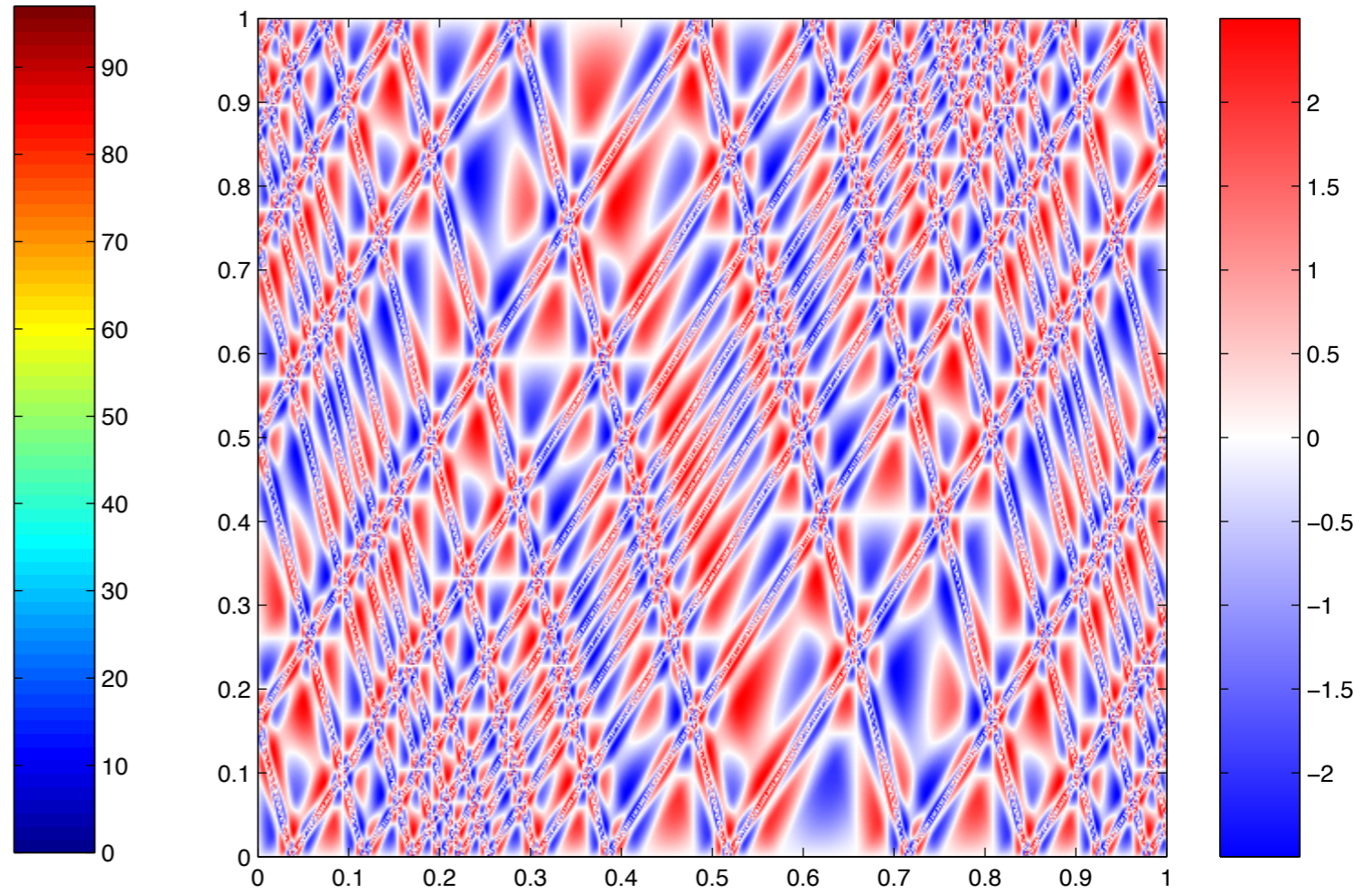
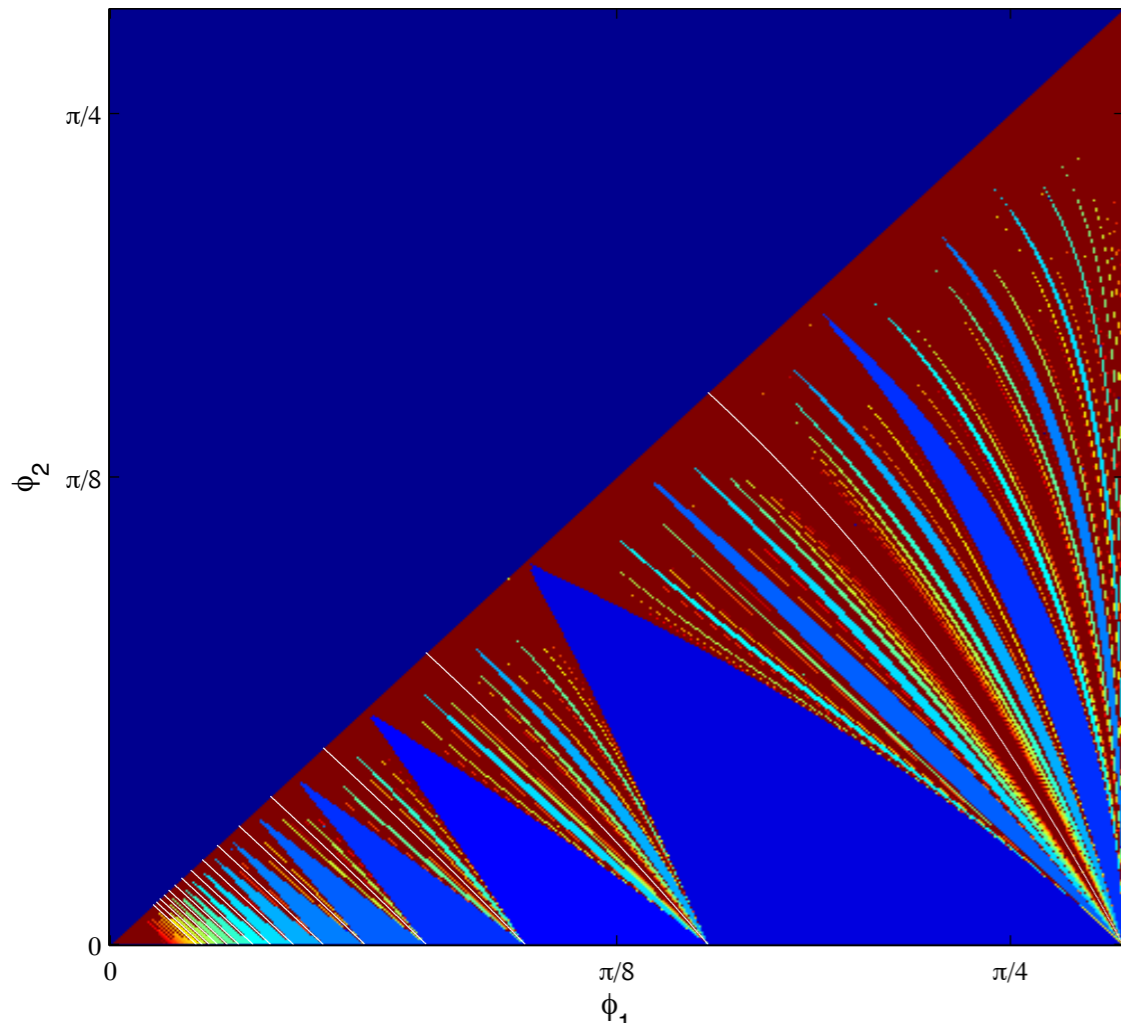


(a) Streamfunction: $\phi_1 = \pi/6$, $\phi_2 = \pi/18$



(b) Pressure field: $\phi_1 = \pi/6$, $\phi_2 = \pi/18$

Internal wave focusing



Werkcollege voor vandaag

- **Probleem 3.1** pas de grafische en analytische methoden toe om de dekpunten en stabiliteit van een recursie te bepalen. (Om meer hiermee te oefenen, kan je vraag 9a-9b van hoofdstuk 12 van Lynch ook uitwerken).
- **Probleem 3.2** een recursie met twee stabiele dekpunten. Probeer achter te komen van welke begincondities welk evenwicht wordt bereikt. Dit kan deels door grafische analyse, en deels door te rekenen.
- **Probleem 3.3** hebben we in de hoorcollege al voorbeelden gezien. Je kunt proberen eigen voorbeelden te verzinnen.
- **Project 1:** je hebt nu de voorkennis om een begin te maken.
Inleveren woensdag 2 maart!