WISB134

Modellen & Simulatie

Lecture 5 - Scalaire recursies (deel 2)

Universiteit Utrecht

Overzicht van ModSim

Meeste aandacht (t/m 1 apr.)

- Basisbegrippen dynamische modellen
  - Definities recursies, DVs, numerieke methoden
  - Oplossingen DVs
  - Convergentie numerieke methoden
- Dynamica
  - ➡ Scalaire dynamica
  - Dynamica op $\mathbf{R}^d$
  - Lineaire dynamica op $\mathbf{R}^2$
- Bijzondere gevallen
  - Lineaire kansmodellen (Markovketens)
  - Niet-autonome systemen (Resonantie)
  - Hogere orde numerieke methoden

Scalaire dynamica

Vandaag en woensdag

- Recursies op $\mathbf{R}^1$
  - Grafische analyse methode
  - Evenwichten
  - Stabiliteit
  - Periodieke banen
  - Bifurcaties
  - Chaos
- Differentiaalvergelijkingen op $\mathbf{R}^1$
  - Evenwichten en stabiliteit
- Numerieke methoden op $\mathbf{R}^1$
  - Evenwichten en stabiliteit

Scalaire dynamica

Vandaag en woensdag

- Recursies op $\mathbf{R}^1$
  - Grafische analyse methode
  - Evenwichten
  - Stabiliteit
  - Periodieke banen
  - Bifurcaties
  - Chaos
- Differentiaalvergelijkingen op $\mathbf{R}^1$
  - Evenwichten en stabiliteit
- Numerieke methoden op $\mathbf{R}^1$
  - Evenwichten en stabiliteit

Evenwichten

Scalaire dynamica

- Recursies op $\mathbf{R}^1$
    - Grafische analyse
    - Evenwichten
    - Stabiliteit
    - Periodieke banen
    - Bifurcaties
    - Chaos
- DVs op $\mathbf{R}^1$
    - Evenwicht./stab.
- NMs op $\mathbf{R}^1$
    - Evenwicht./stab.

- Een *baan* is een rij

$$\{x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots\}$$

waarvan $x_{n+1} = F(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

- Een *evenwicht* of *dekpunt* is een triviale baan $x_n = x_{n-1} = \cdots = x_1 = x_0 = \alpha$
- Een dekpunt voldoet dus aan

$$\alpha = F(\alpha)$$

Stabiliteit

Scalaire dynamica

- Recursies op $\mathbf{R}^1$
  - Grafische analyse
  - Evenwichten
  - Stabiliteit
  - Periodieke banen
  - Bifurcaties
  - Chaos
- DVs op $\mathbf{R}^1$
  - Evenwicht./stab.
- NMs op $\mathbf{R}^1$
  - Evenwicht./stab.

- Een dekpunt α is *stabiel in de zin van Lyapunov* als voor elk $\varepsilon > 0$ er een $\delta > 0$ te vinden is zodanig dat

  $$|x_n - \alpha| \leq \varepsilon, \ \ n = 0, 1, \ldots, \quad \text{als} \quad |x_0 - \alpha| \leq \delta$$

  Anders is het dekpunt *instabiel*.

- Een dekpunt α is *asymptotisch stabiel* als bovendien geldt $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$

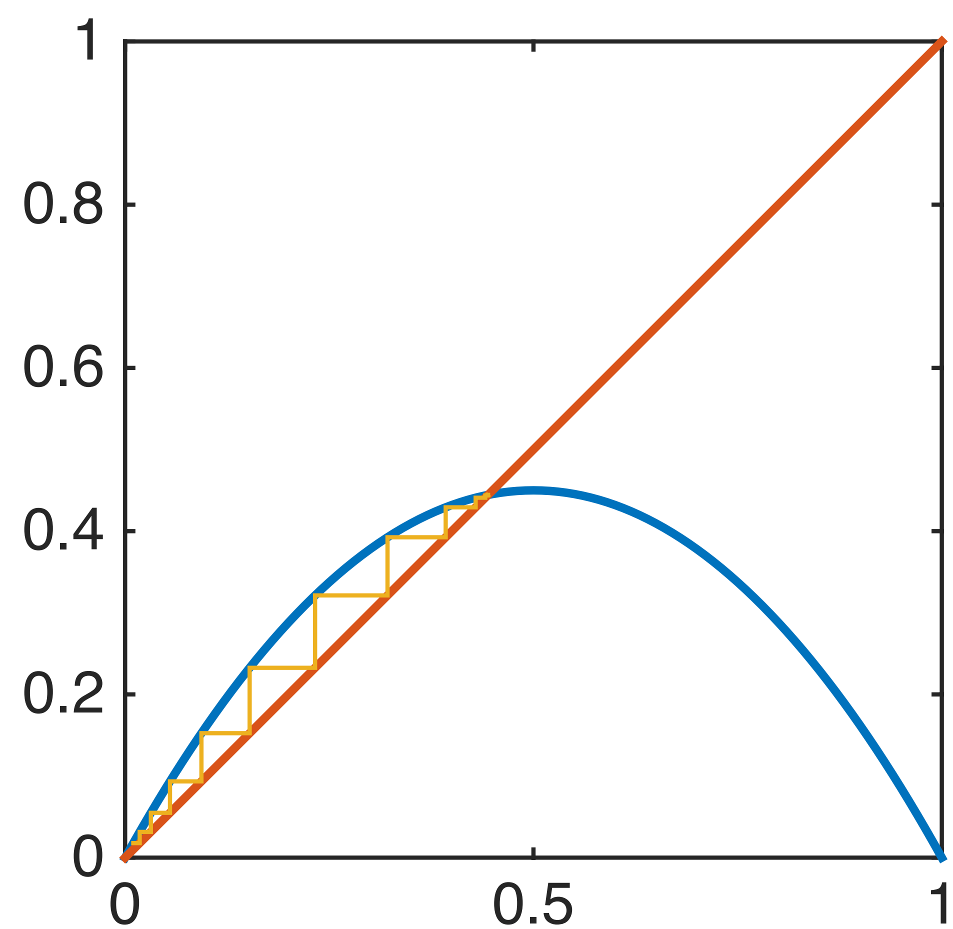
Asymptotische stabiliteit

Scalaire dynamica

- Recursies op $\mathbf{R}^1$
  - Grafische analyse
  - Evenwichten
  - Stabiliteit
  - Periodieke banen
  - Bifurcaties
  - Chaos
- DVs op $\mathbf{R}^1$
  - Evenwicht./stab.
- NMs op $\mathbf{R}^1$
  - Evenwicht./stab.

Stelling Een dekpunt α is:

- asymptotisch stabiel als $|F'(\alpha)| < 1$,
- instabiel als $|F'(\alpha)| > 1$.



Samenvatting logistische vergelijking tot nu toe:

Scalaire dynamica

- Recursies op $\mathbf{R}^1$
  - Grafische analyse
  - Evenwichten
  - Stabiliteit
  - Periodieke banen
  - Bifurcaties
  - Chaos
- DVs op $\mathbf{R}^1$
  - Evenwicht./stab.
- NMs op $\mathbf{R}^1$
  - Evenwicht./stab.

- De logistische vergelijking is

  $x_{n+1} = F(x_n), \quad F(x) = rx(1-x), \; r=1$

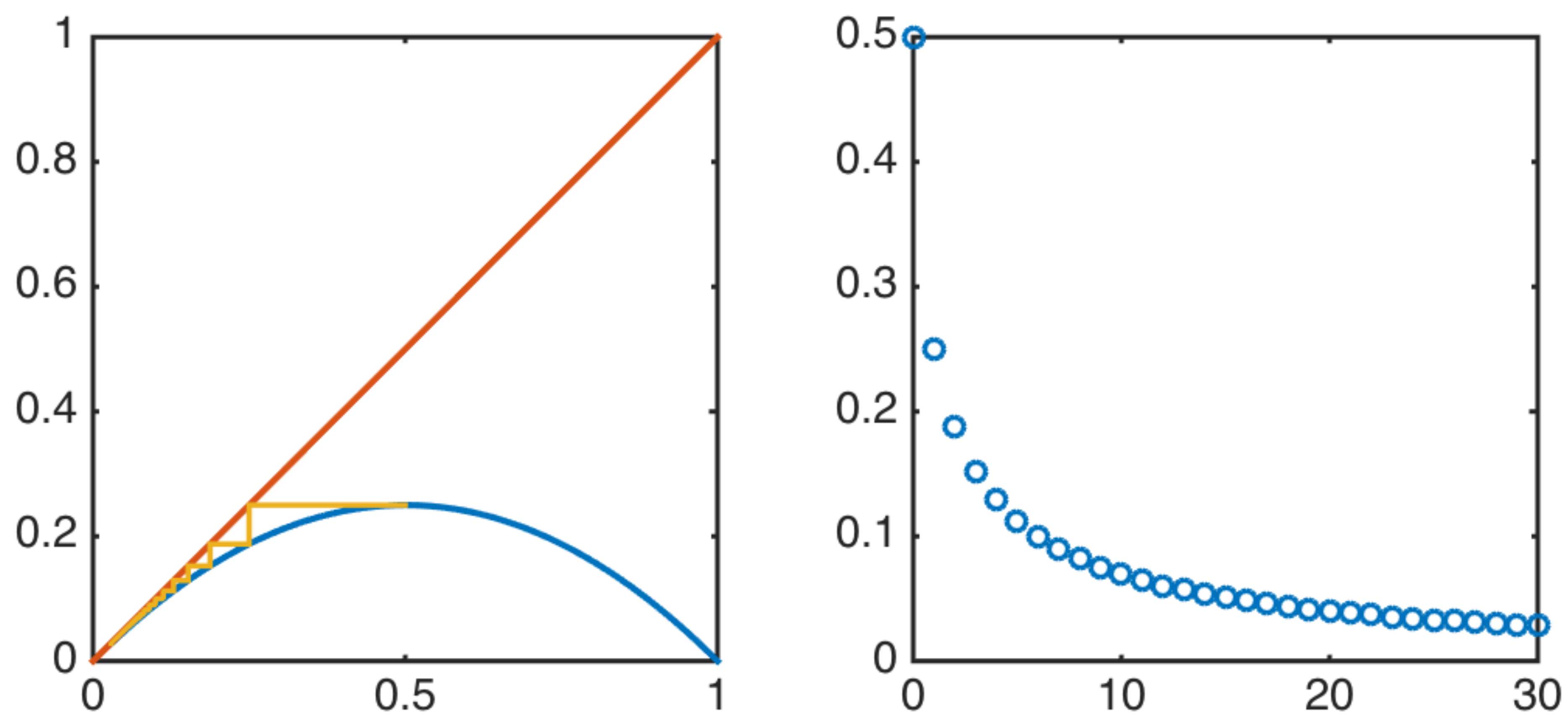
- $D=[0,1]$ invariant als $r<4$
- Twee evenwichten: $\alpha=0, \; \alpha=1-1/r$
- $\alpha=0$ stabiel als $r<1$
- $\alpha=1-1/r$ stabiel als $1<r<3$
- monotone convergentie als $r<2$
- oscillerende convergentie als $r>2$

Grafische analyse methode

Scalaire dynamica

- Recursies op $\mathbf{R}^1$
  - Grafische analyse
  - Evenwichten
  - Stabiliteit
  - Periodieke banen
  - Bifurcaties
  - Chaos
- DVs op $\mathbf{R}^1$
  - Evenwicht./stab.
- NMs op $\mathbf{R}^1$
  - Evenwicht./stab.

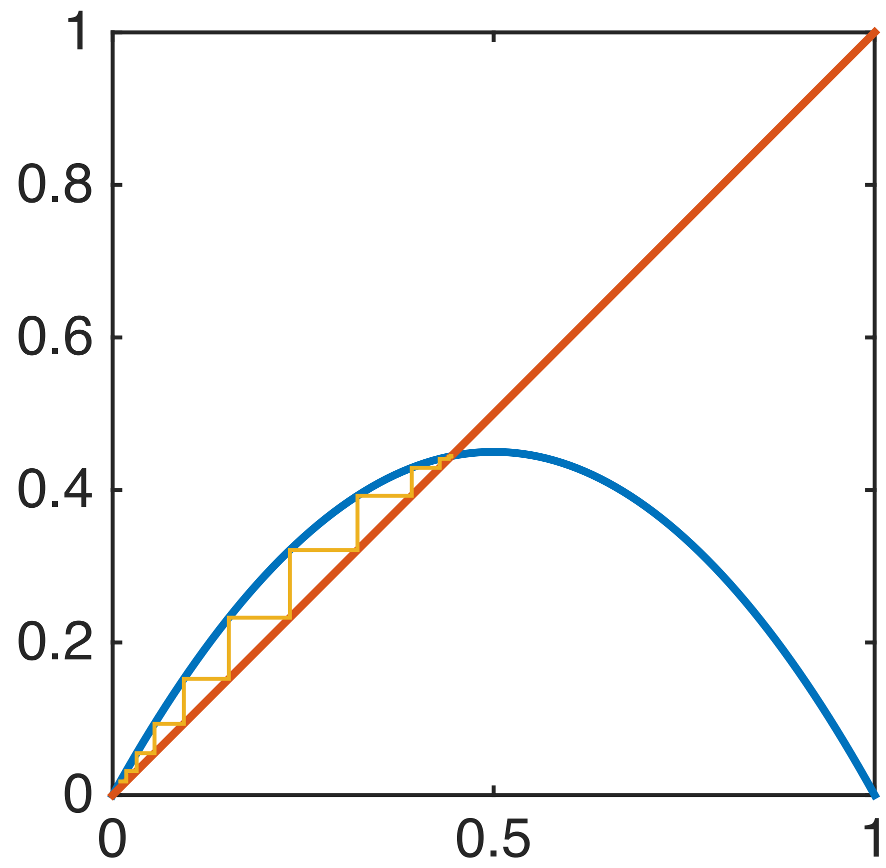
Logistic model, $F(x) = rx(1-x), \; r=1$

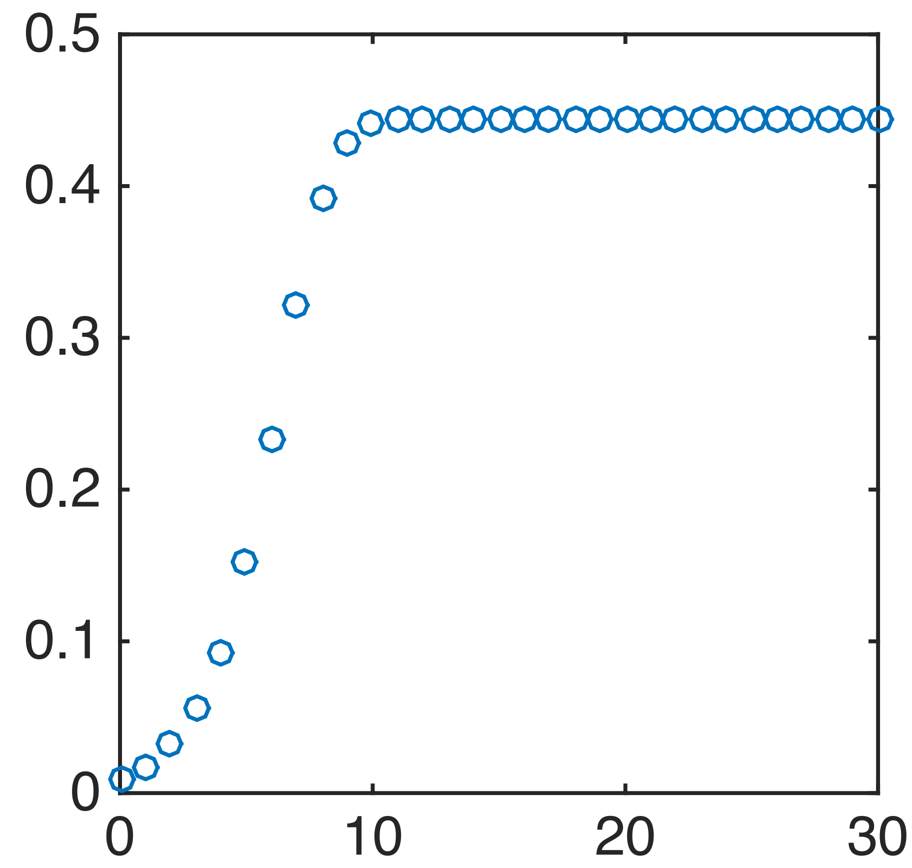


Grafische analyse methode

Scalaire dynamica
- Recursies op $\mathbf{R}^1$
  - Grafische analyse
  - Evenwichten
  - Stabiliteit
  - Periodieke banen
  - Bifurcaties
  - Chaos
- DVs op $\mathbf{R}^1$
  - Evenwicht./stab.
- NMs op $\mathbf{R}^1$
  - Evenwicht./stab.

Logistic model, $F(x) = rx(1\text{-}x),\ r=1.8$



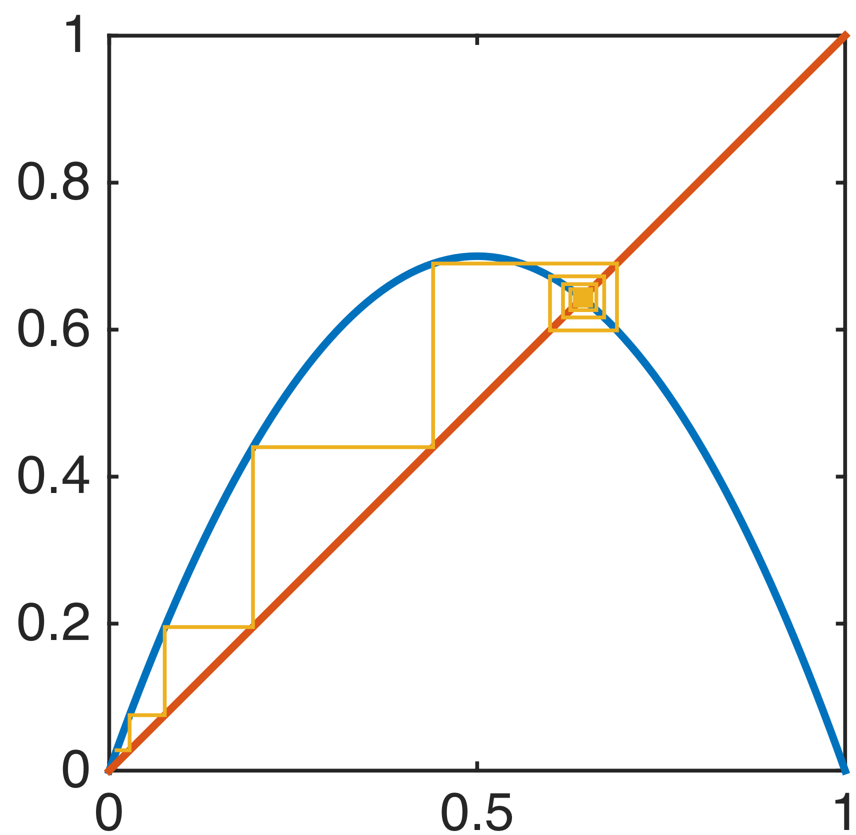


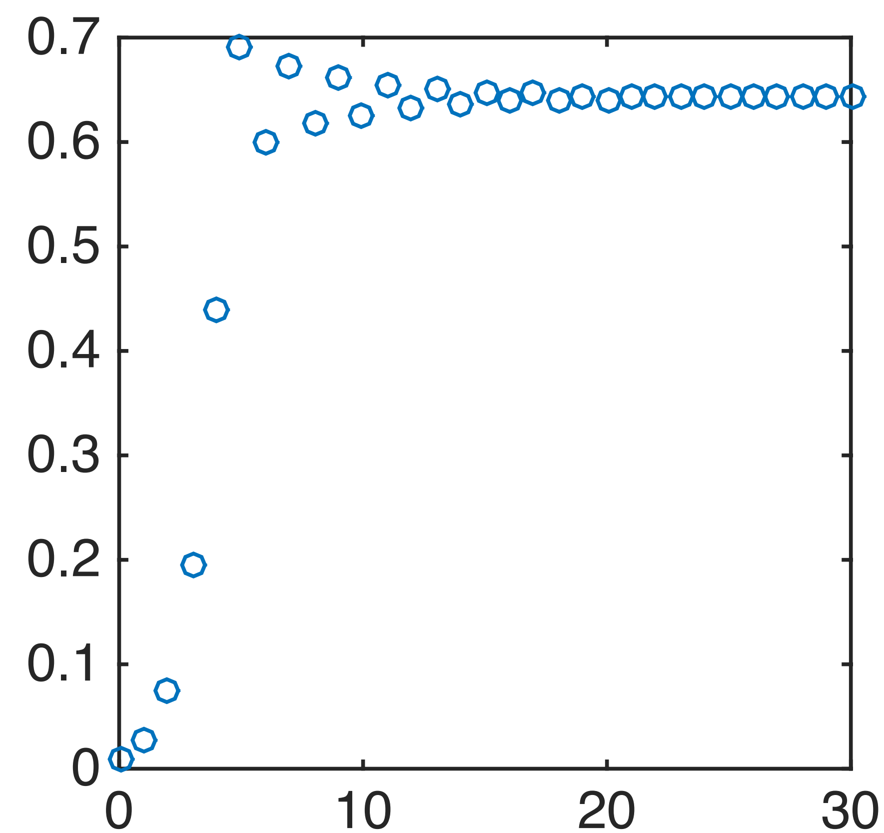
Grafische analyse methode

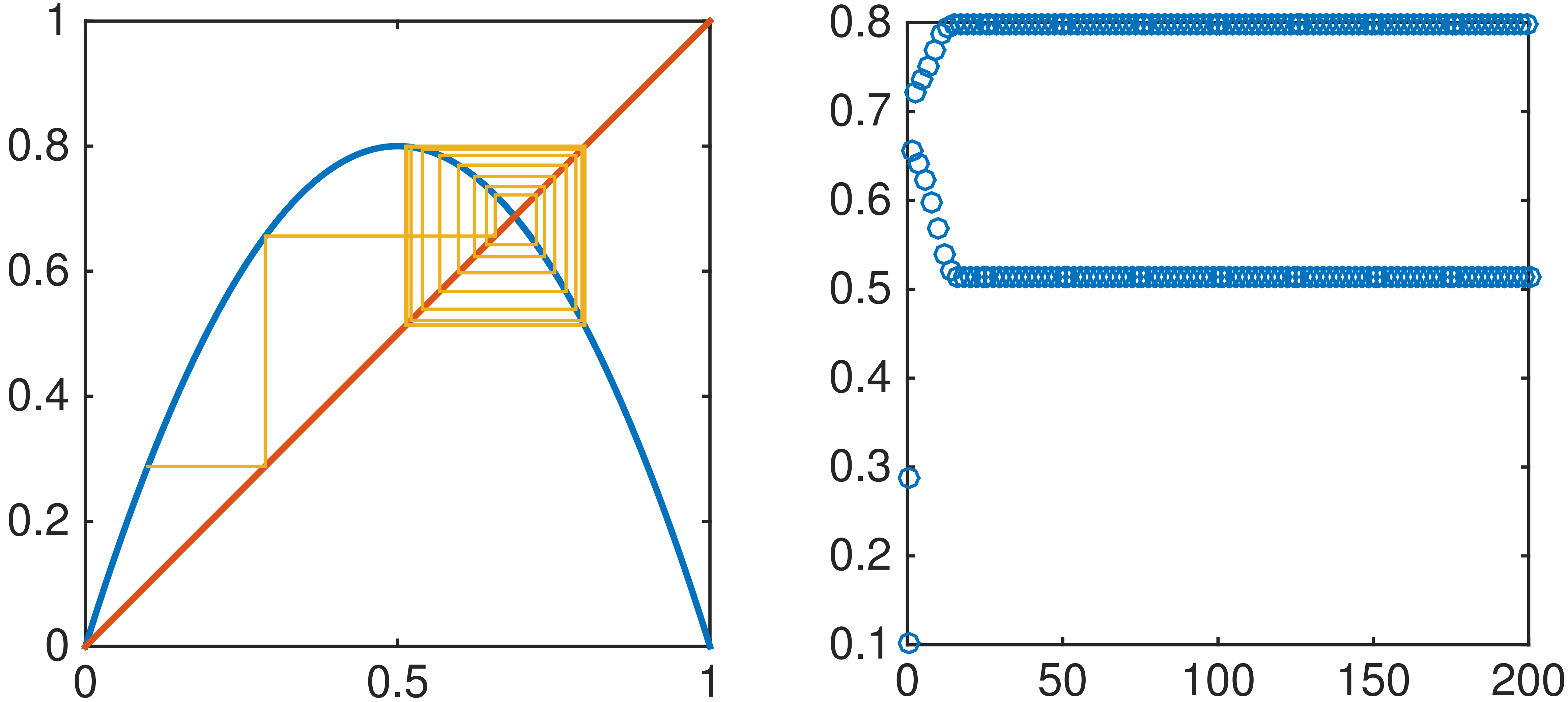
Scalaire dynamica

- Recursies op $\mathbf{R}^1$
    - Grafische analyse
    - Evenwichten
    - Stabiliteit
    - Periodieke banen
    - Bifurcaties
    - Chaos
- DVs op $\mathbf{R}^1$
    - Evenwicht./stab.
- NMs op $\mathbf{R}^1$
    - Evenwicht./stab.

Logistic model, $F(x) = rx(1-x),\ r=2.8$







0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
0
0.5
1
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0
50
100
150
200

2-periodieke banen

Scalaire dynamica

- Recursies op $\mathbf{R}^1$
  - Grafische analyse
  - Evenwichten
  - Stabiliteit
  - Periodieke banen
  - Bifurcaties
  - Chaos
- DVs op $\mathbf{R}^1$
  - Evenwicht./stab.
- NMs op $\mathbf{R}^1$
  - Evenwicht./stab.

- Een *2-periodieke baan* is een paar

$$\alpha, \beta \in \mathbf{R}, \qquad \alpha \neq \beta$$

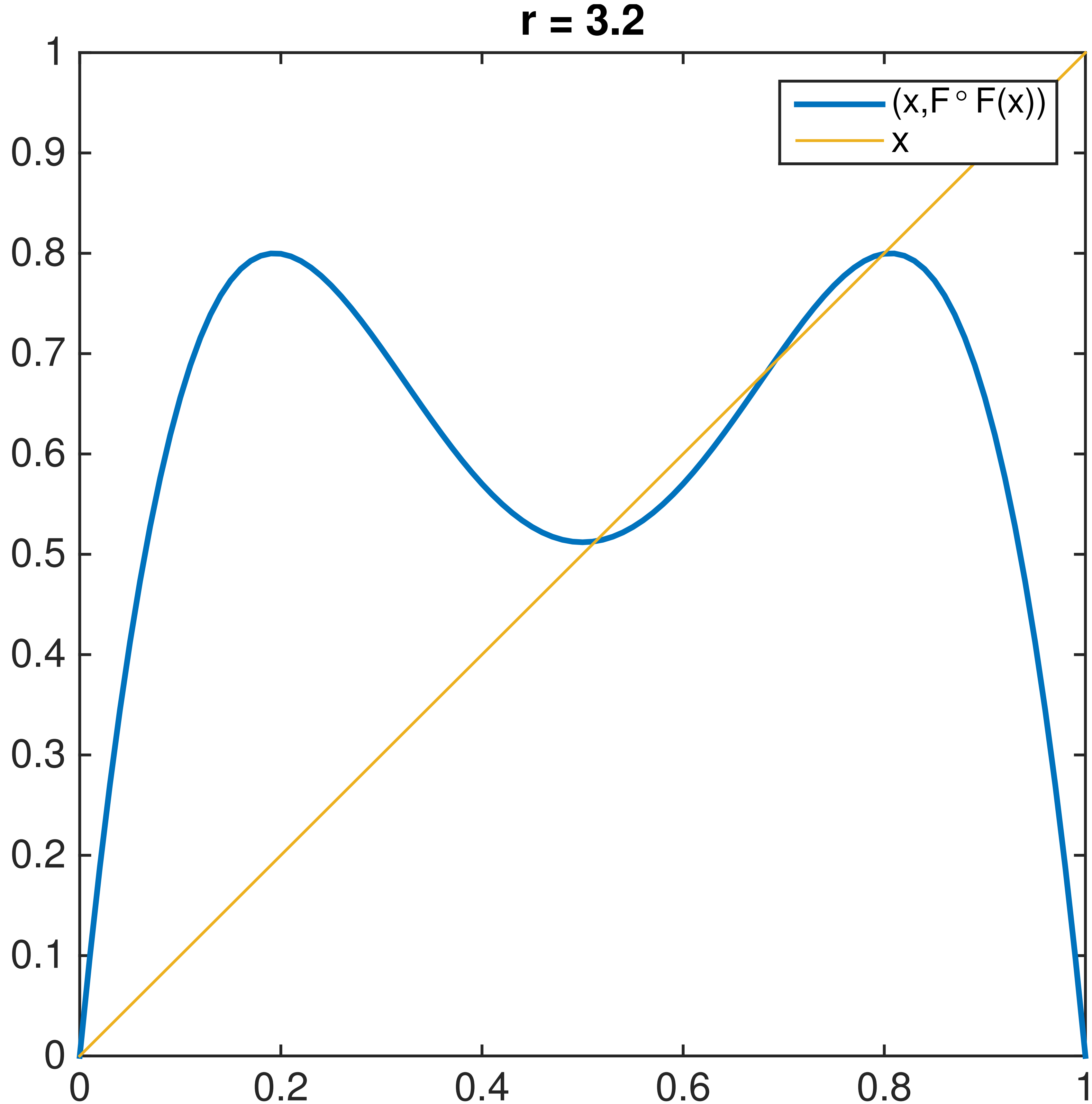
  waarvoor geldt $\alpha = F(\beta), \quad \beta = F(\alpha)$

- Deze zijn beiden dekpunten van de samengestelde functie

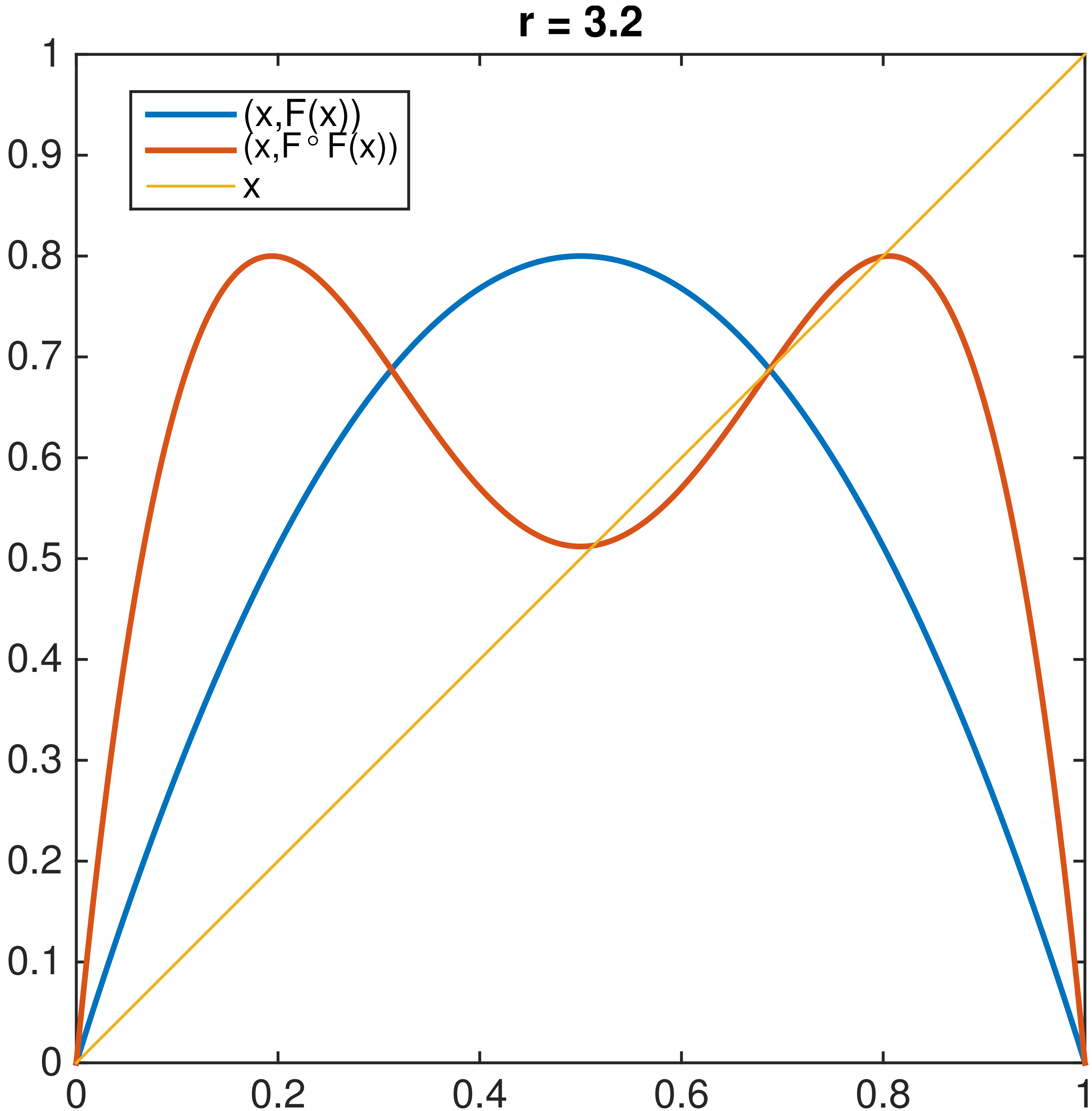
$$F \circ F(x) = F(F(x))$$

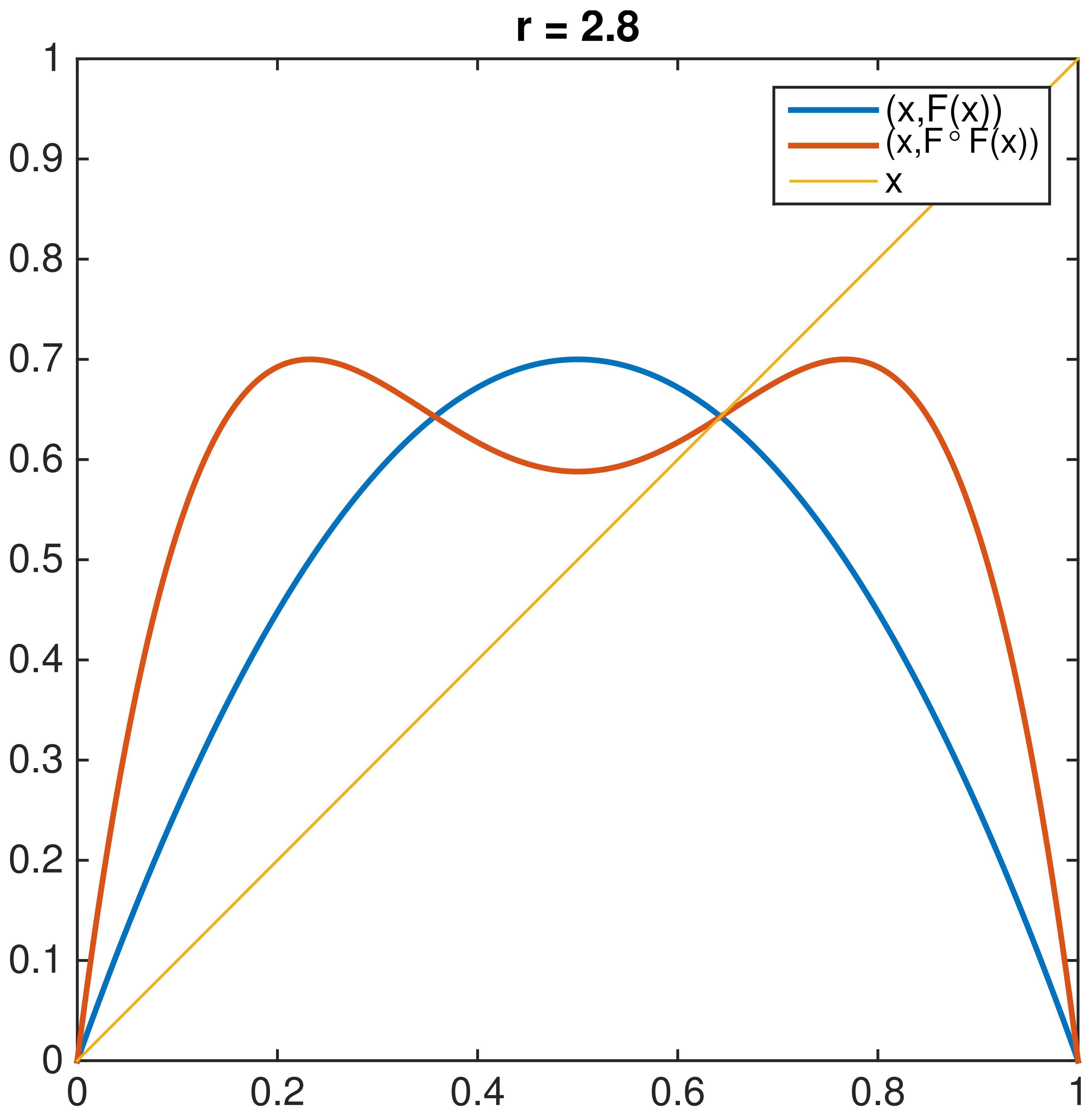
- Stabiel als $|F'(\alpha)F'(\beta)| < 1$

$$(F \circ F)'(\alpha) = F'(F(\alpha))F'(\alpha) = F'(\beta)F'(\alpha)$$



r = 3.2
(x,F∘F(x))
x
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

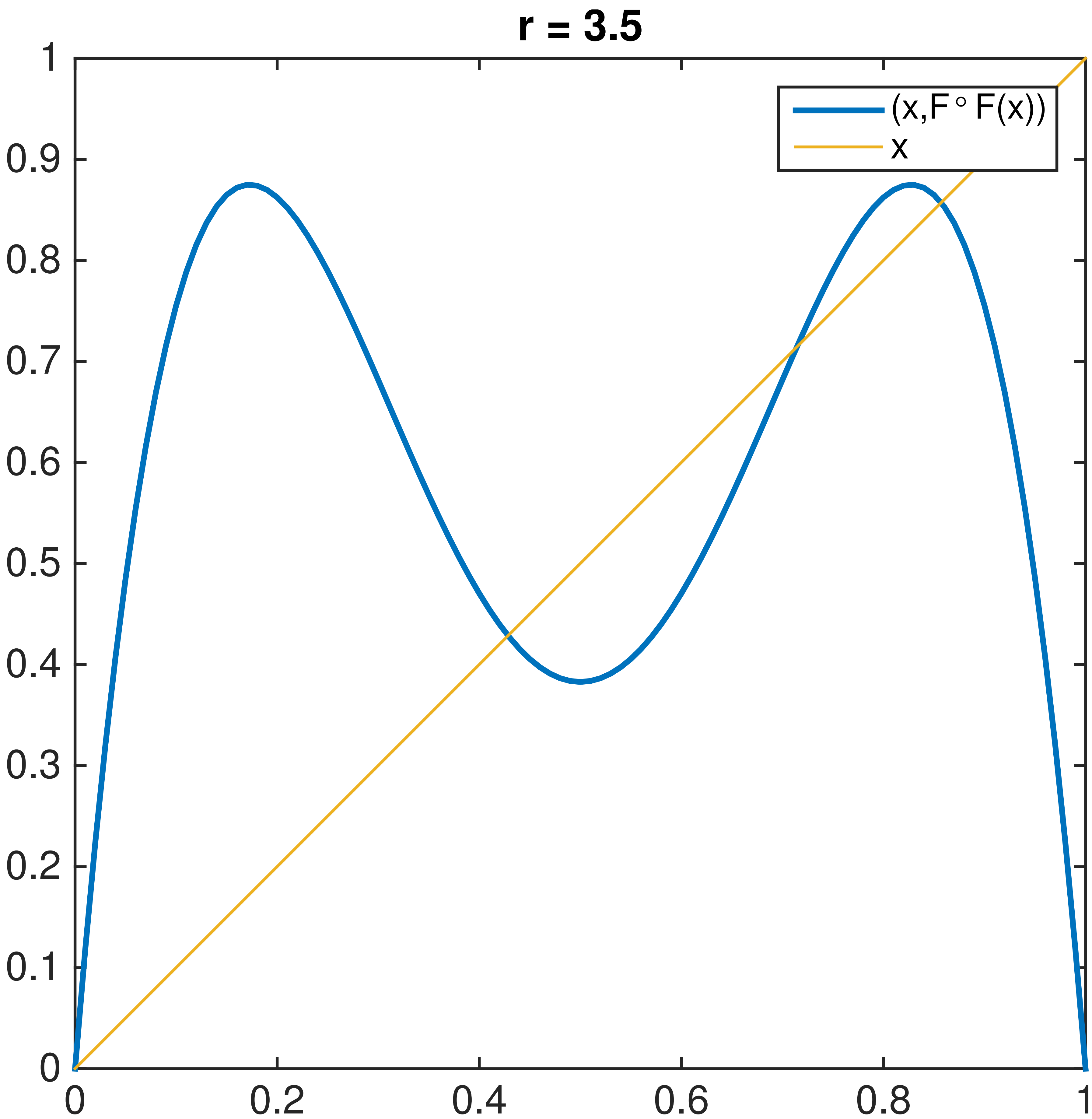

r = 3.2
(x,F(x))
(x,F ∘ F(x))
x
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

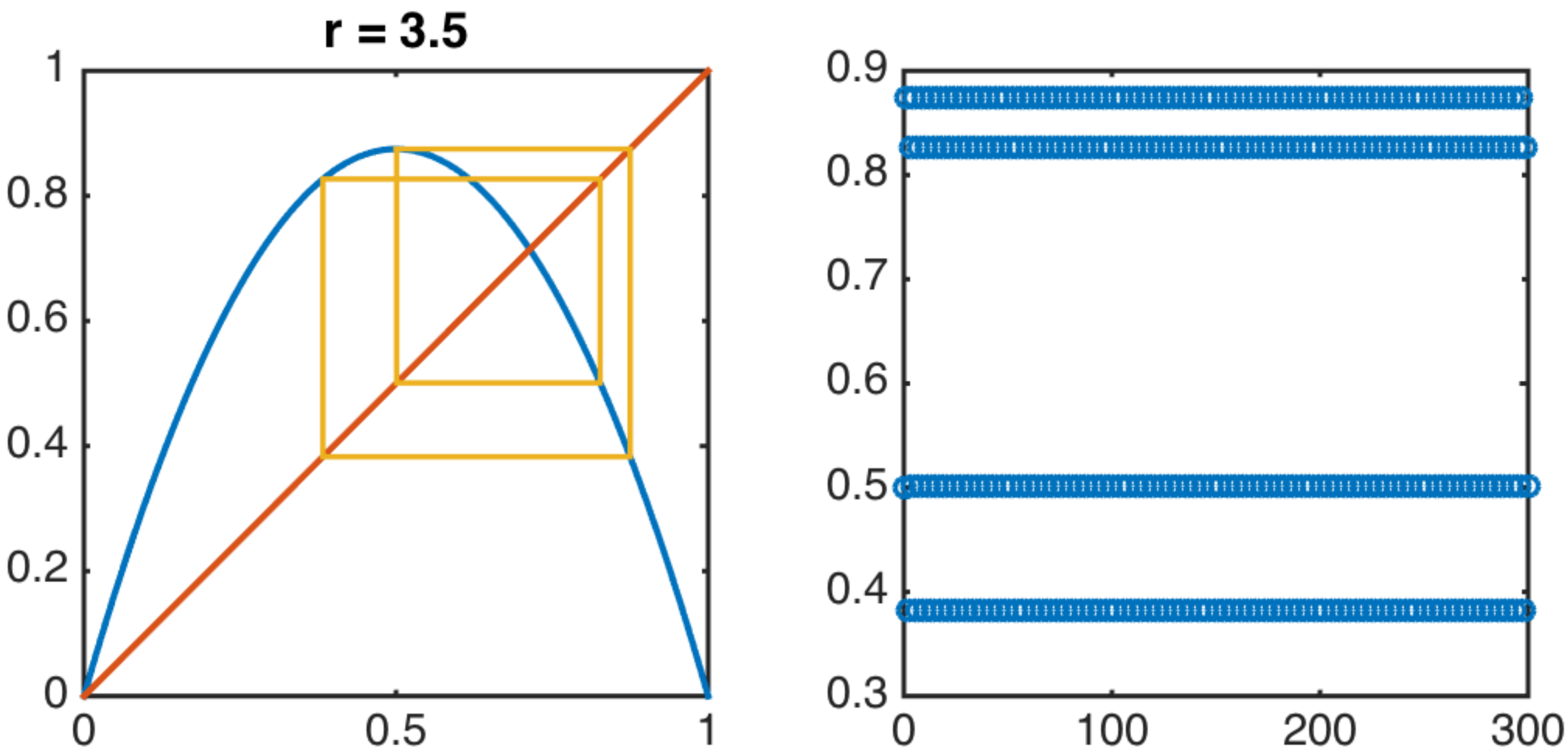

r = 2.8
(x,F(x))
(x,F ∘ F(x))
x
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

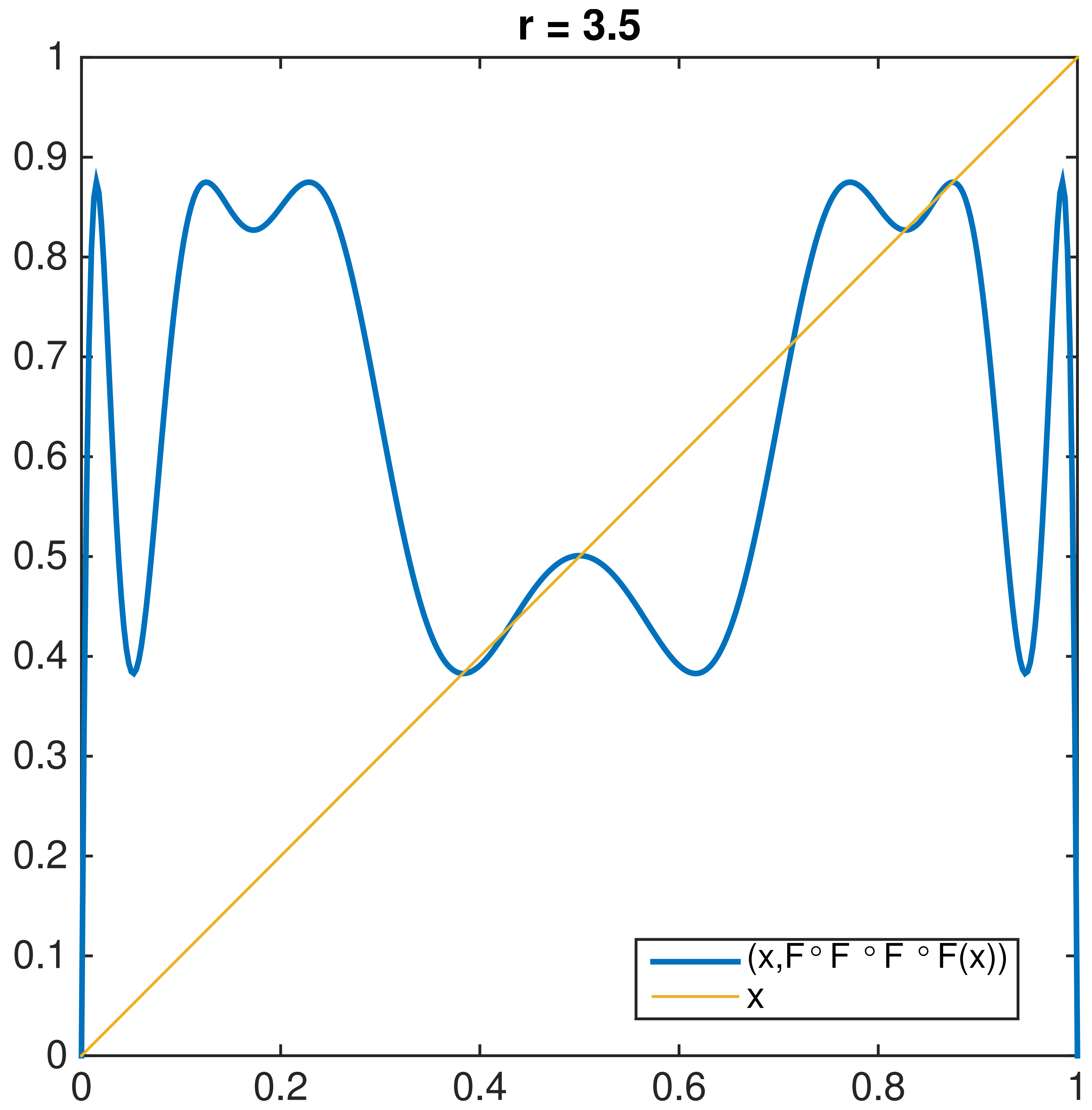
Scalaire dynamica

Vandaag en woensdag

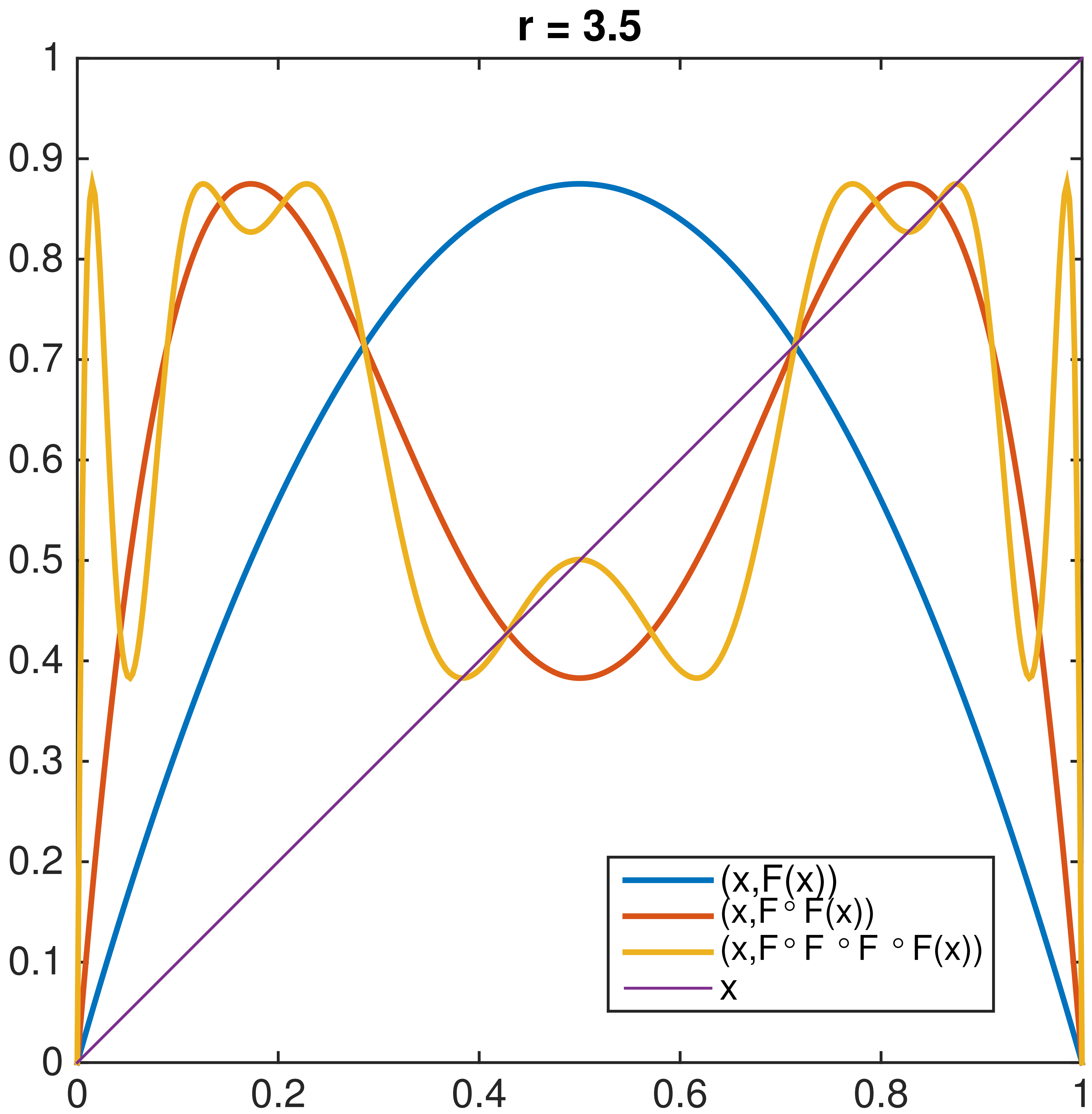
- Recursies op $\mathbf{R}^1$
  - Grafische analyse methode
  - Evenwichten
  - Stabiliteit
  - Periodieke banen
  - Bifurcaties
  - Chaos
- Differentiaalvergelijkingen op $\mathbf{R}^1$
  - Evenwichten en stabiliteit
- Numerieke methoden op $\mathbf{R}^1$
  - Evenwichten en stabiliteit


r = 3.5
(x,F∘F(x))
x
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

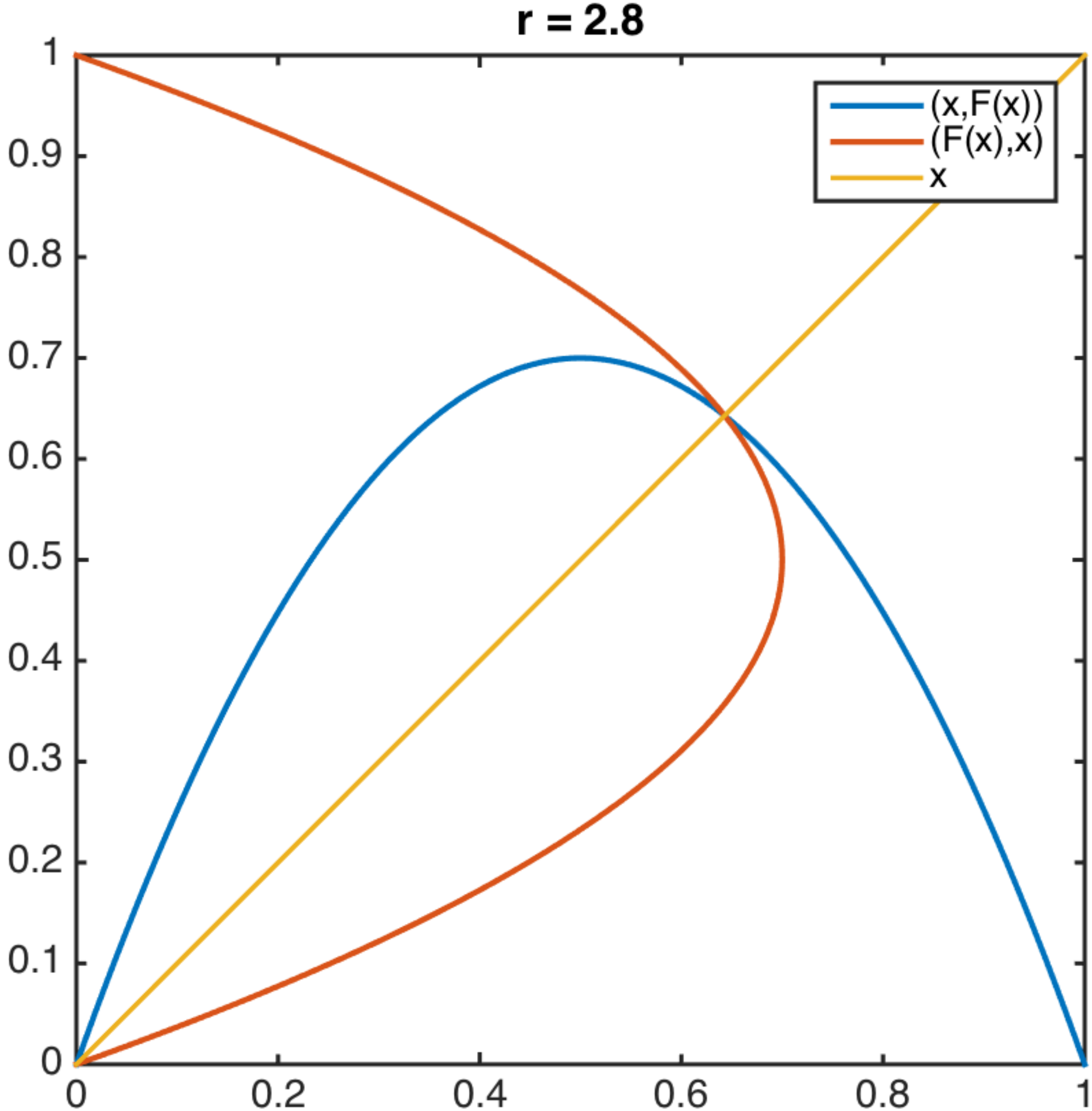

r = 3.5
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.5
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0
100
200
300



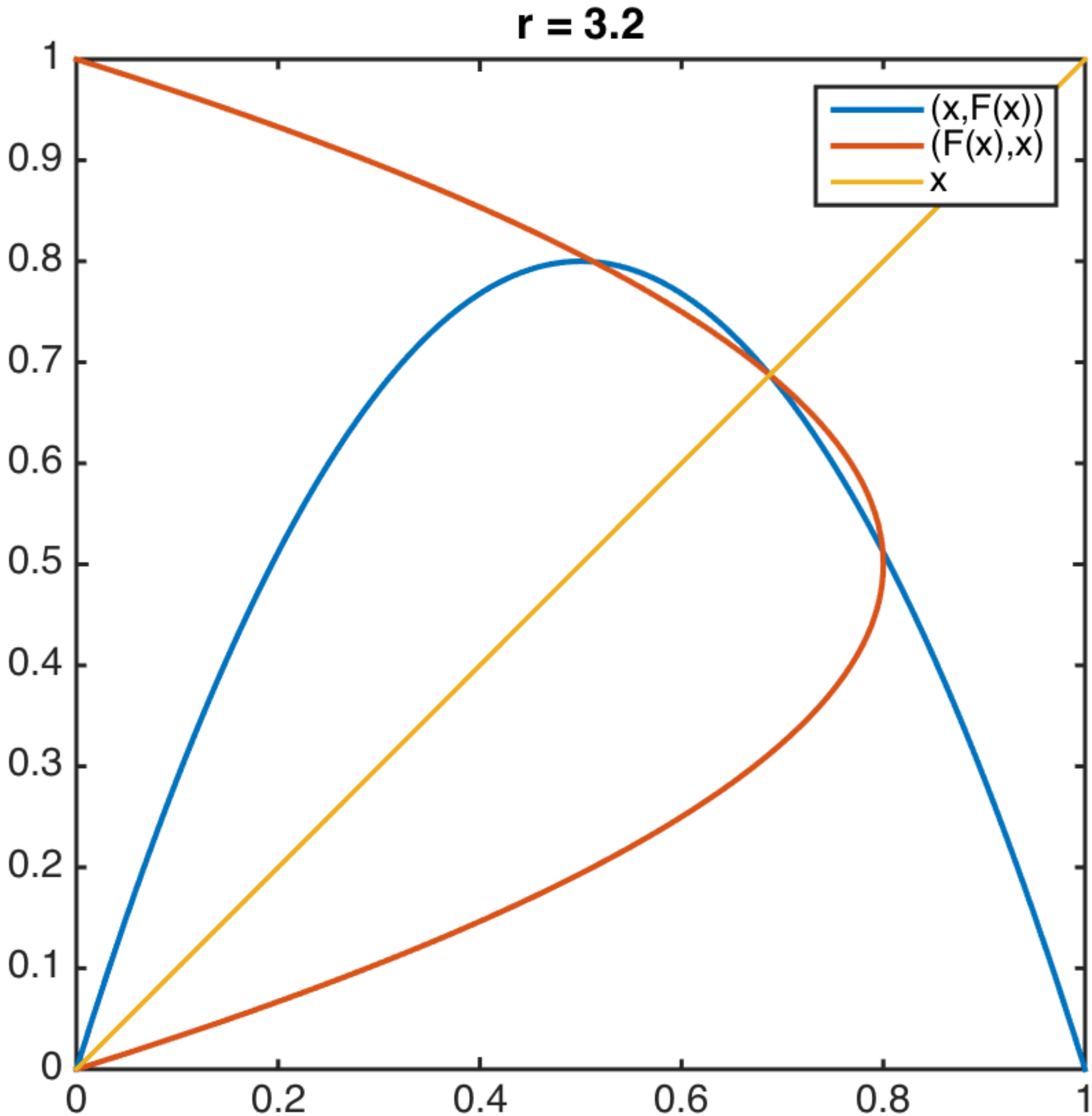
r = 3.5
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
(x,F ∘ F ∘ F ∘ F(x))
x

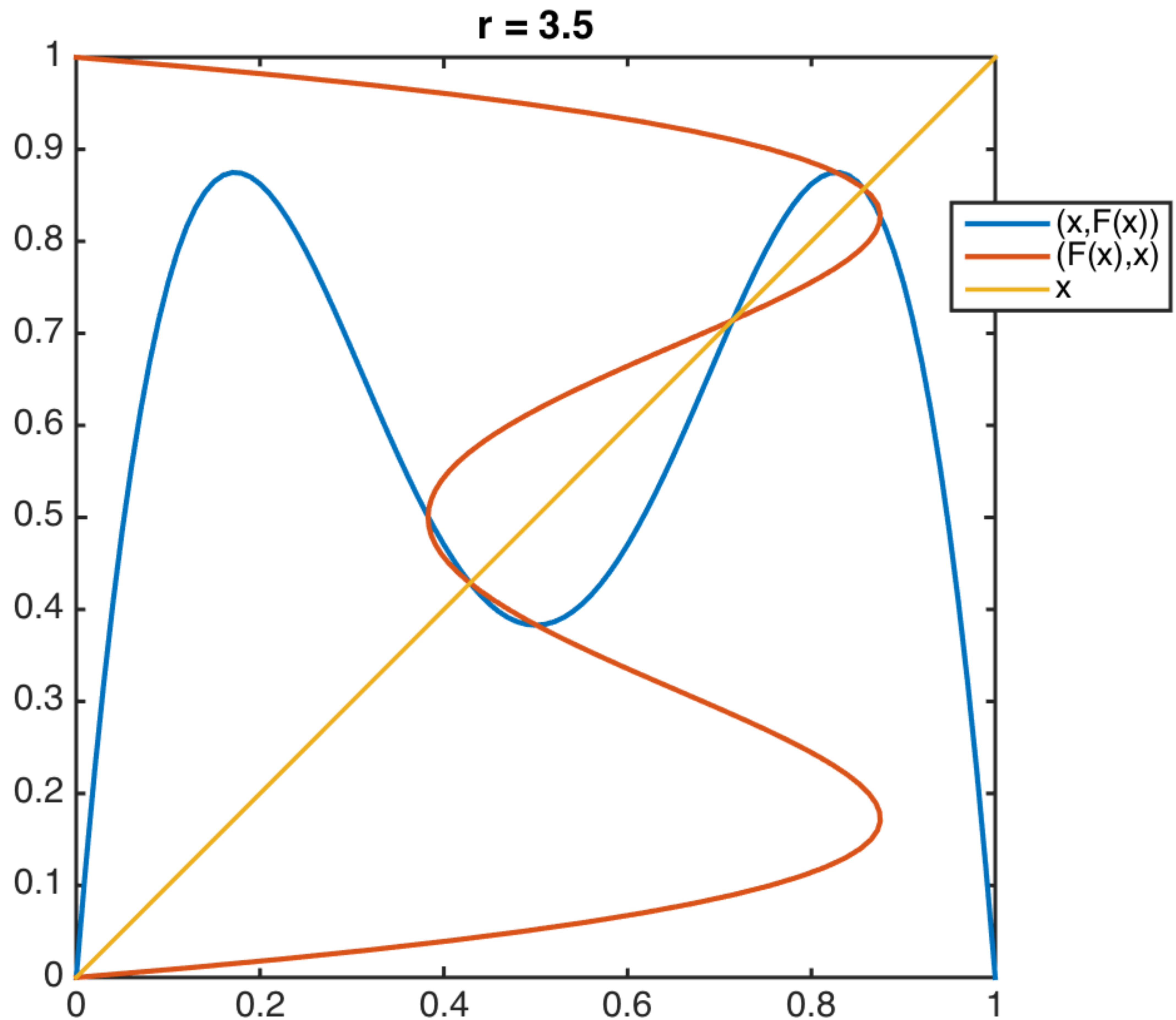


r = 3.5
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
(x,F(x))
(x,F ∘ F(x))
(x,F ∘ F ∘ F ∘ F(x))
x



r = 2.8
(x,F(x))
(F(x),x)
x
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

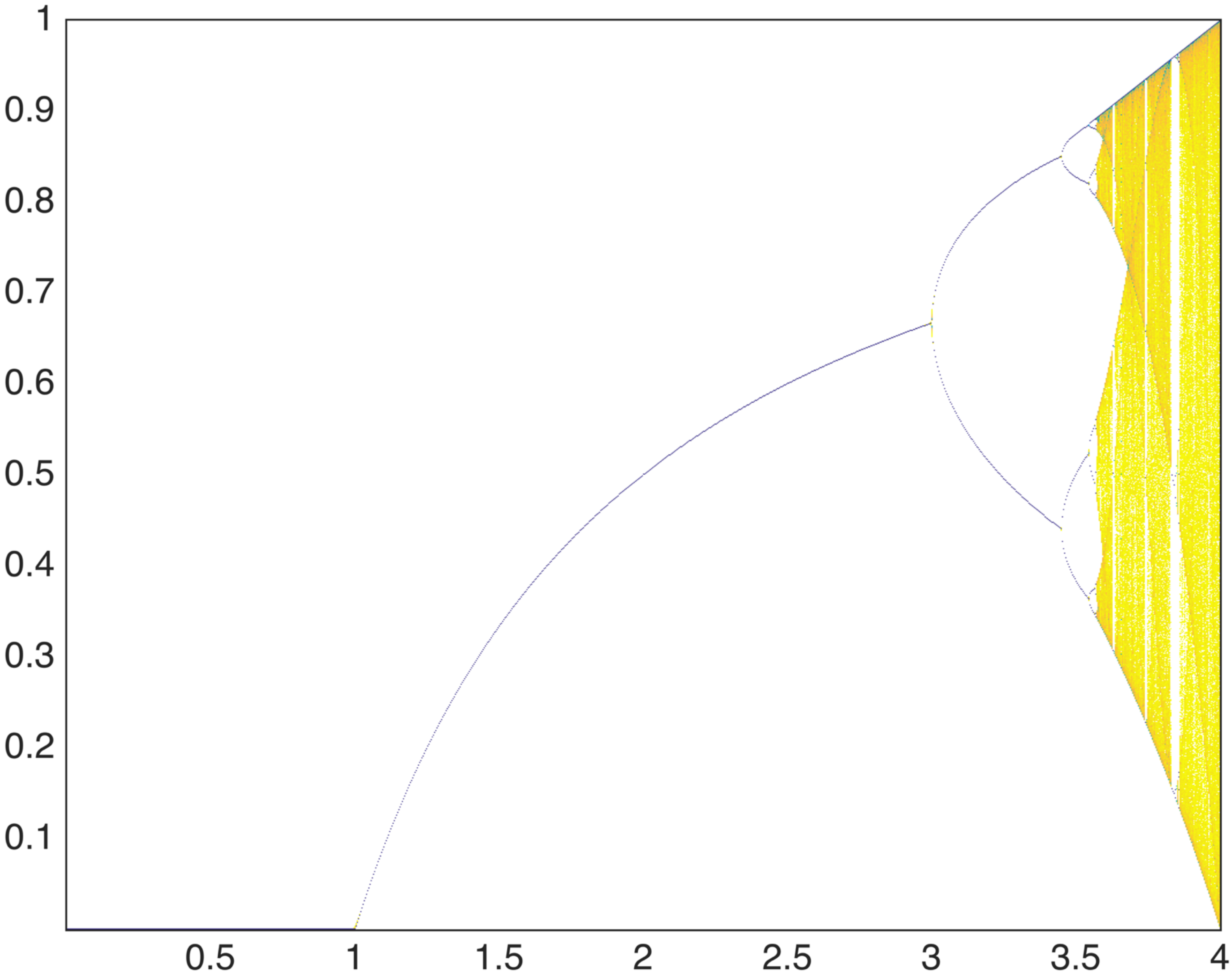

r = 3.2
(x,F(x))
(F(x),x)
x
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

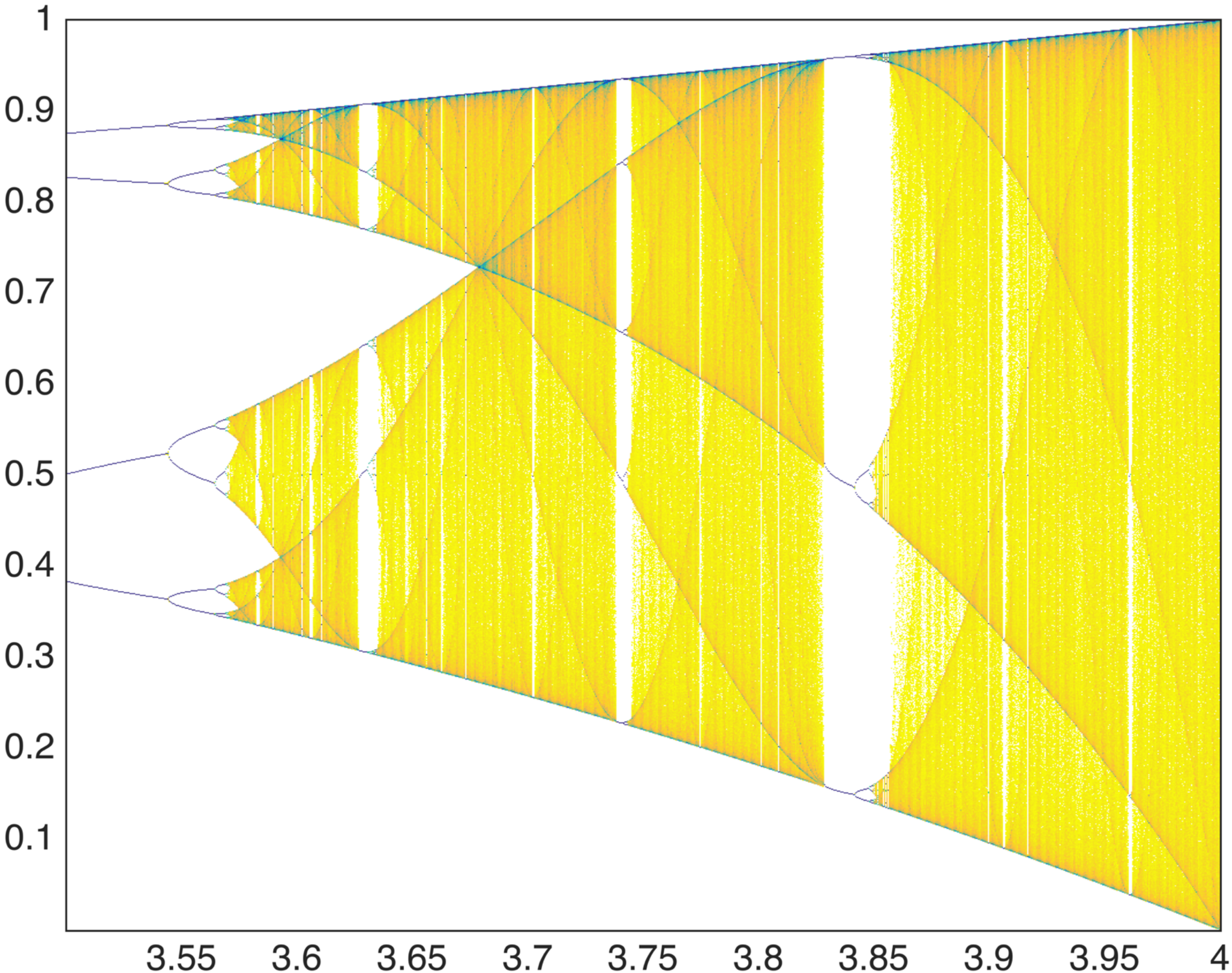

r = 3.5
(x,F(x))
(F(x),x)
x
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

Scalaire dynamica

- Recursies op $\mathbf{R}^1$
  - Grafische analyse
  - Evenwichten
  - Stabiliteit
  - Periodieke banen
  - Bifurcaties
  - Chaos
- DVs op $\mathbf{R}^1$
  - Evenwicht./stab.
- NMs op $\mathbf{R}^1$
  - Evenwicht./stab.

Bifurcatiediagram


1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4



1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
3.55
3.6
3.65
3.7
3.75
3.8
3.85
3.9
3.95
4

Pauze

Scalaire dynamica

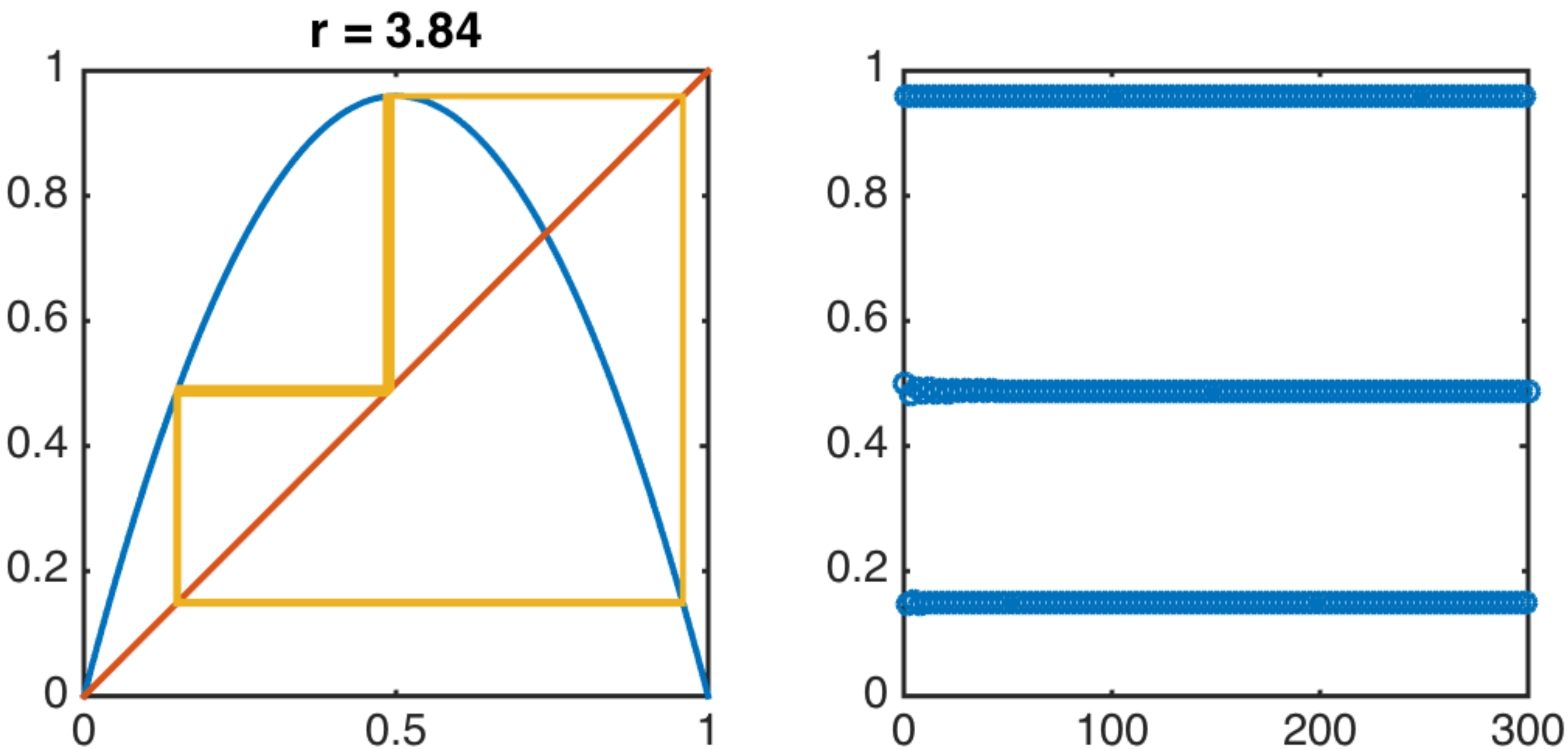
Vandaag en woensdag

- Recursies op $\mathbf{R}^1$
  - Grafische analyse methode
  - Evenwichten
  - Stabiliteit
  - Periodieke banen
  - Bifurcaties
  - Chaos
- Differentiaalvergelijkingen op $\mathbf{R}^1$
  - Evenwichten en stabiliteit
- Numerieke methoden op $\mathbf{R}^1$
  - Evenwichten en stabiliteit

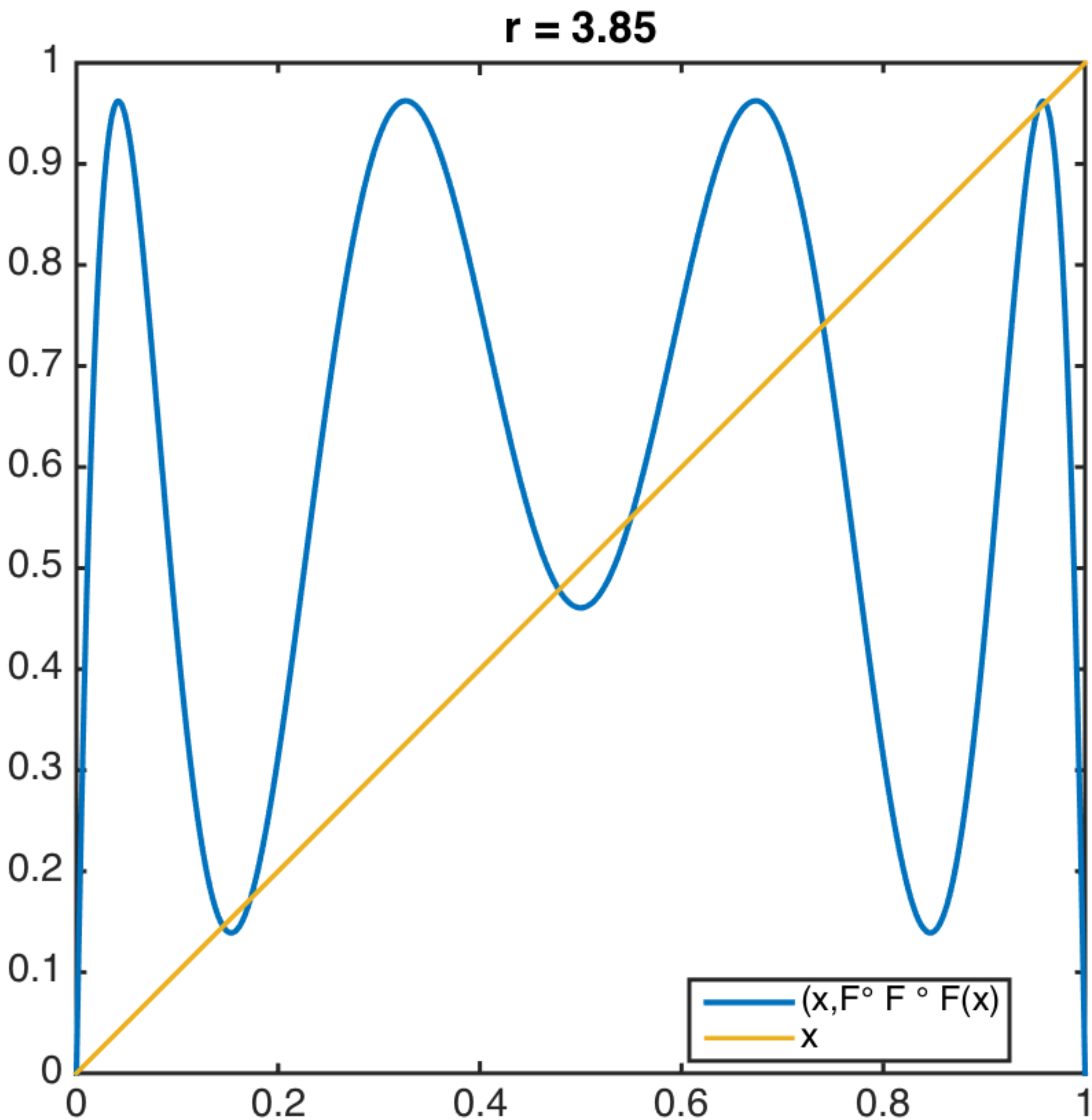
Stelling van Sharkovskii, 1964:

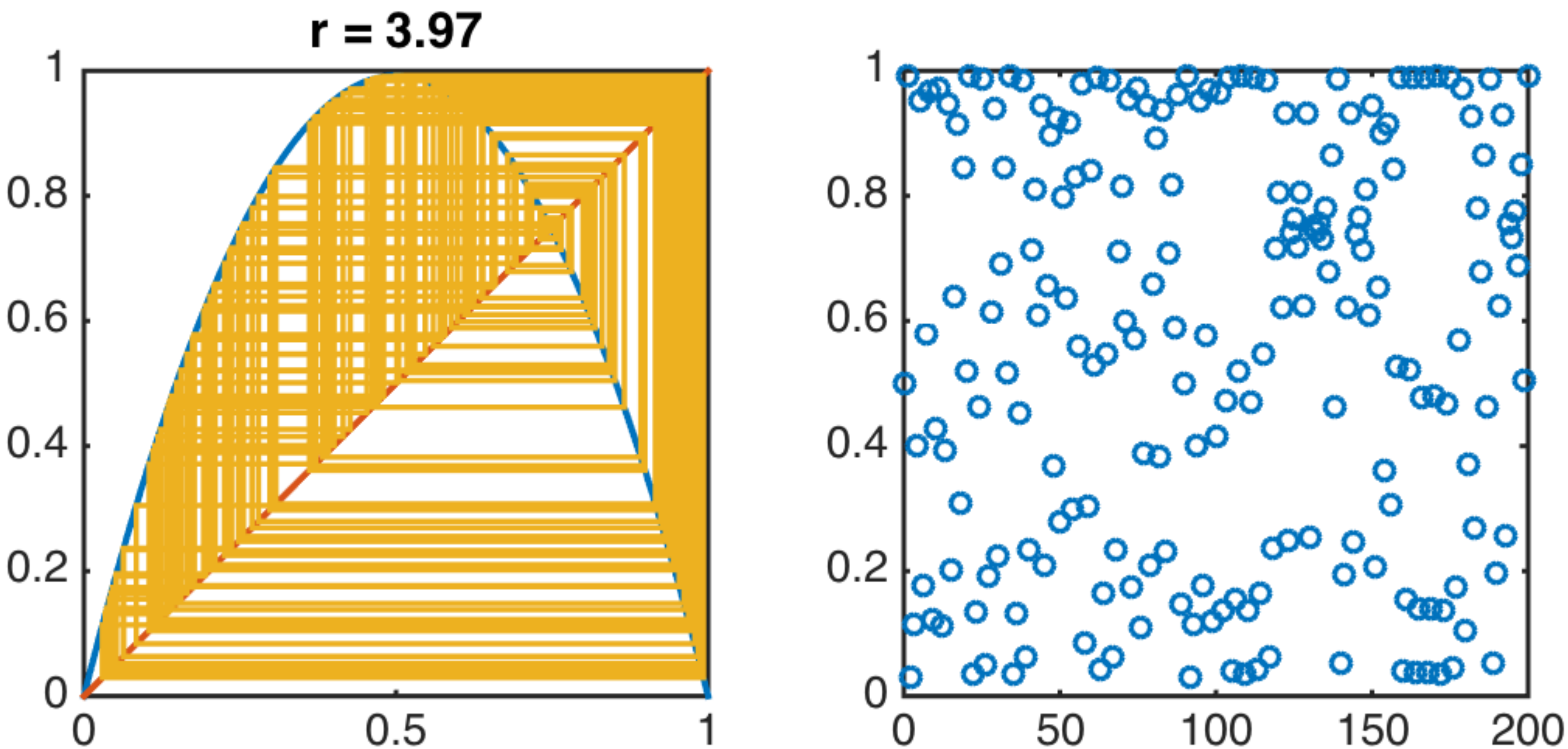
Als continue $F:[0,1] \longrightarrow [0,1]$ een 3-periodieke baan heeft, dan heeft het ook een p-periodieke baan voor alle $p=1, 2, 3, \ldots$

$$
\begin{array}{cccccccc}
3 & 5 & 7 & 9 & 11 & \ldots & (2n+1)\cdot 2^0 & \ldots \\
3\cdot 2 & 5\cdot 2 & 7\cdot 2 & 9\cdot 2 & 11\cdot 2 & \ldots & (2n+1)\cdot 2^1 & \ldots \\
3\cdot 2^2 & 5\cdot 2^2 & 7\cdot 2^2 & 9\cdot 2^2 & 11\cdot 2^2 & \ldots & (2n+1)\cdot 2^2 & \ldots \\
3\cdot 2^3 & 5\cdot 2^3 & 7\cdot 2^3 & 9\cdot 2^3 & 11\cdot 2^3 & \ldots & (2n+1)\cdot 2^3 & \ldots \\
 & \vdots & & & & & & \\
\ldots & 2^n & \ldots & 2^4 & 2^3 & 2^2 & 2 & 1
\end{array}
$$



r = 3.84
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.5
1
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
100
200
300


r = 3.85
(x,F∘ F ∘ F(x)
x
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1


r = 3.97
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
0
0.5
1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
0
50
100
150
200

Een recursie $x_{n+1} = F(x_n),\ F : D \to D$
is **chaotisch** op D als

- er voor ieder x_0 kleine storingen zijn die leiden tot grote afwijkingen
- er in iedere buurt van iedere $x \in D$ een x_0 te vinden is waarvoor de baan x_n periodiek is
- er een baan (x_n) bestaat die voor iedere $x \in D$ willekeurig dicht in de buurt van x komt.

$$x_{n+1} = 10\, x_n \mod 1$$

$$x_0 = 0.27578397684409087$$
$$x_1 = 0.7578397684409087 3$$
$$x_2 = 0.578397684409087 31$$
$$x_3 = 0.78397684409087 314$$
$$x_4 = 0.8397684409087 3143$$

$$x_0 = 0.27578397684409087$$

$$\tilde{x}_0 = 0.275783976844\textcolor{red}{23296}$$

$$x_{12} = 0.09087$$

$$\tilde{x}_{12} = 0.\textcolor{red}{23296}$$

$$|x_0 - \tilde{x}_0| < 2 \cdot 10^{-12}$$
$$|x_{12} - \tilde{x}_{12}| \geq 0.1$$

Een recursie $x_{n+1} = F(x_n),\ F : D \to D$
is **chaotisch** op D als

- er voor ieder x_0 kleine storingen zijn die leiden tot grote afwijkingen

- er in iedere buurt van iedere $x \in D$ een x_0 te vinden is waarvoor de baan x_n periodiek is

- er een baan (x_n) bestaat die voor iedere $x \in D$ willekeurig dicht in de buurt van x komt.

$$x_{n+1} = 10\,x_n \mod 1$$

$$x = 0.275783976844090 87\ldots$$

$$x_0 = 0.2757839768440\ 2757839768440\ 2757839768440\ldots$$

$$|x - x_0| < 10^{-12}$$

$$x_0 = x_{13} = x_{26} = \cdots$$

Een recursie $x_{n+1} = F(x_n),\ F : D \to D$
is **chaotisch** op D als

- er voor ieder x_0 kleine storingen zijn die leiden tot grote afwijkingen

- er in iedere buurt van iedere $x \in D$ een x_0 te vinden is waarvoor de baan x_n periodiek is

- er een baan (x_n) bestaat die voor iedere $x \in D$ willekeurig dicht in de buurt van x komt.

$$x_{n+1} = 10\,x_n \mod 1$$

$$x_0 = 0.01234567890001020304\ldots 9899000001002003\ldots$$

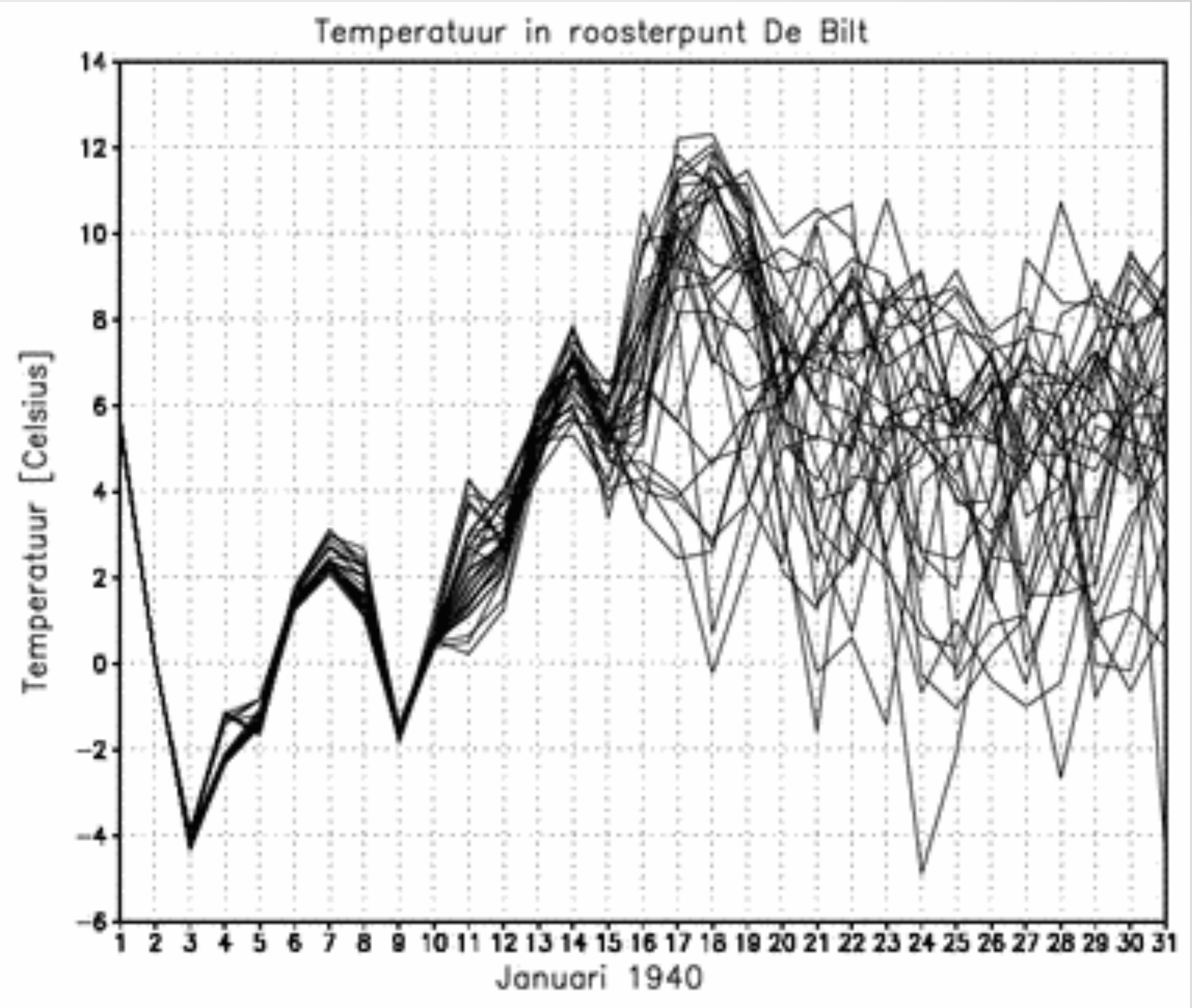
$$|0.7 - x_7| < 0.1$$

$$|0.02 - x_{14}| < 0.01$$

Universiteit Utrecht

KNMI/UU Dutch Challenge 2003

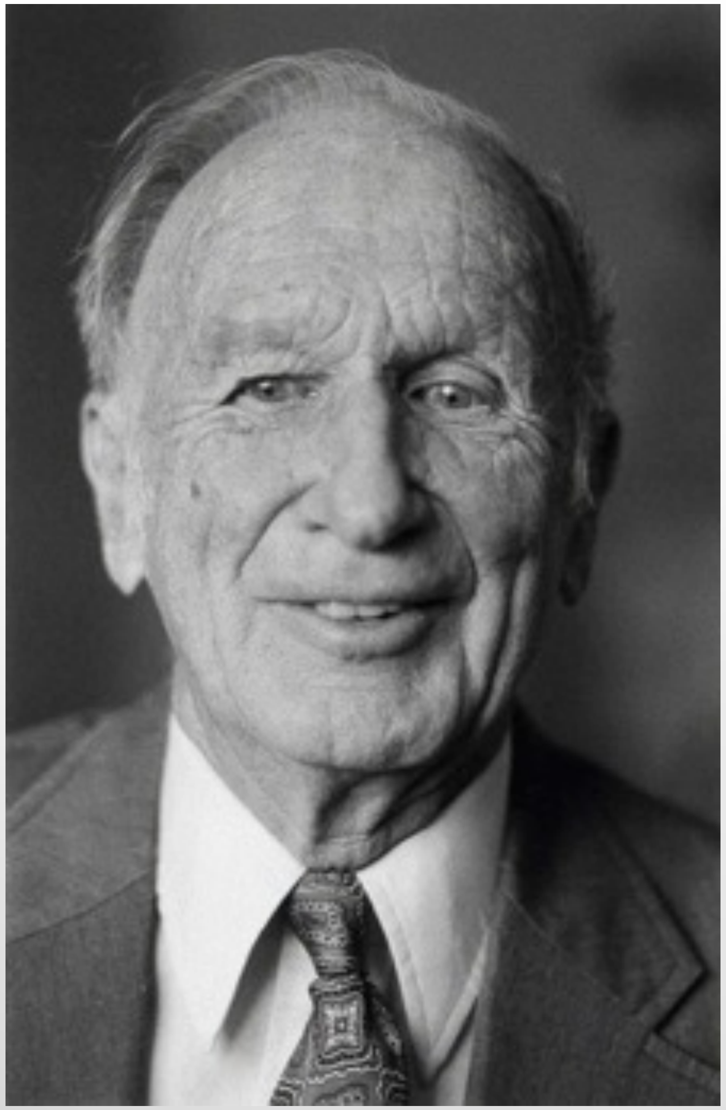
- Om de invloed van globale opwarming op klimaat te voorspellen: frequentie van neerslag, droogte, noodweer, stormen
- Volledige klimaatmodel (atmos., oceaan, ijs, land, transport, zonnestraling, ...)
- Simulatie over 140 jr. met beginconditities van 1 jan. 1940
- *Ensemble simulatie*: 64 onafhankelijke berekeningen. Verstoring door uniforme schaling van de atmospherische temp in [0.999, 1.001]
- Maar: rekenfouten geven al een grotere verstoring in het eerste uur.
- Dus: numerieke fouten overheersen de berekening al in de eerste maand. *De dynamica is compleet verkeerd voor de hele berekening.*



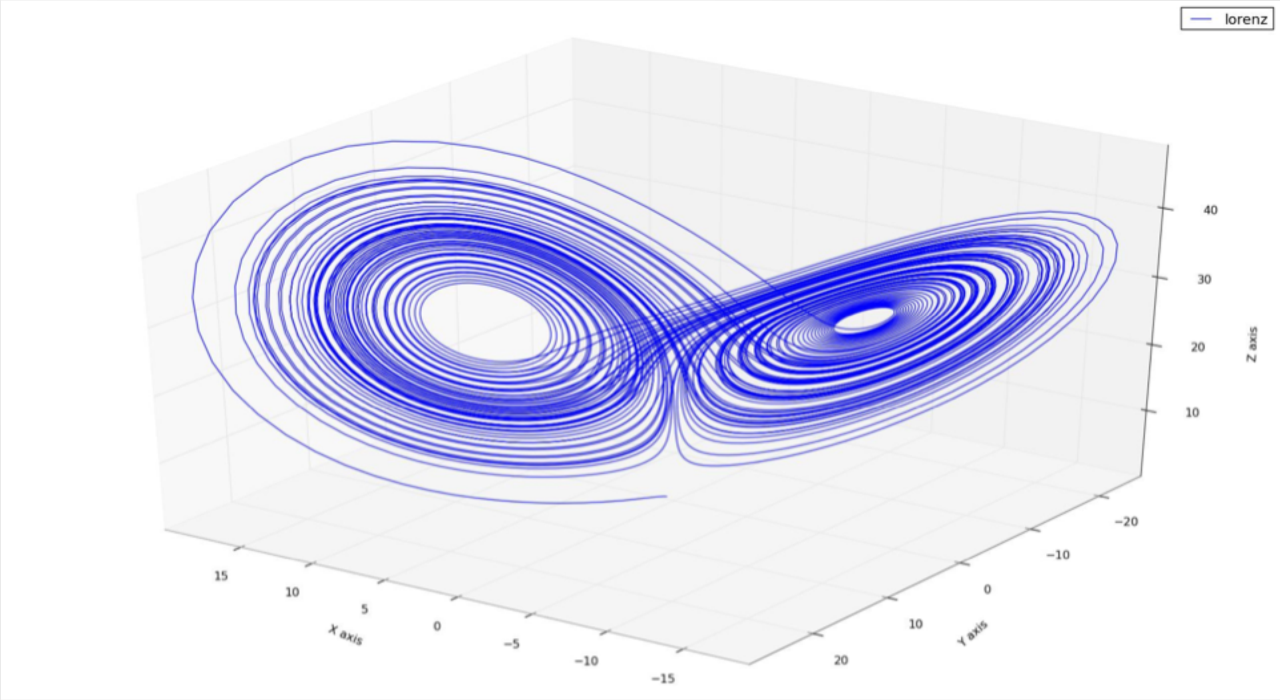
Universiteit Utrecht

Het Model van Lorenz

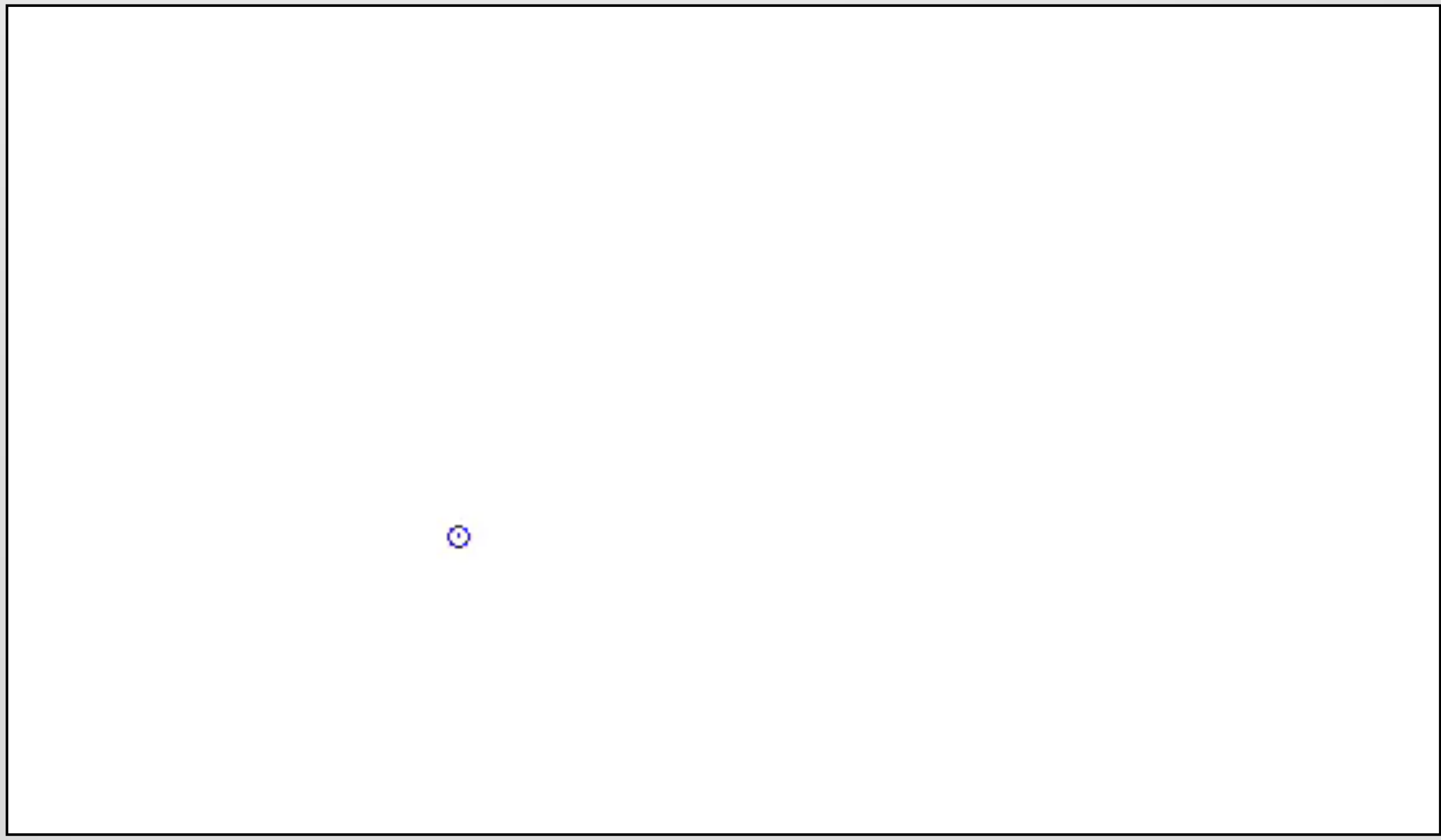
Lorenz Attractor



E.N. Lorenz
1917 - 2008

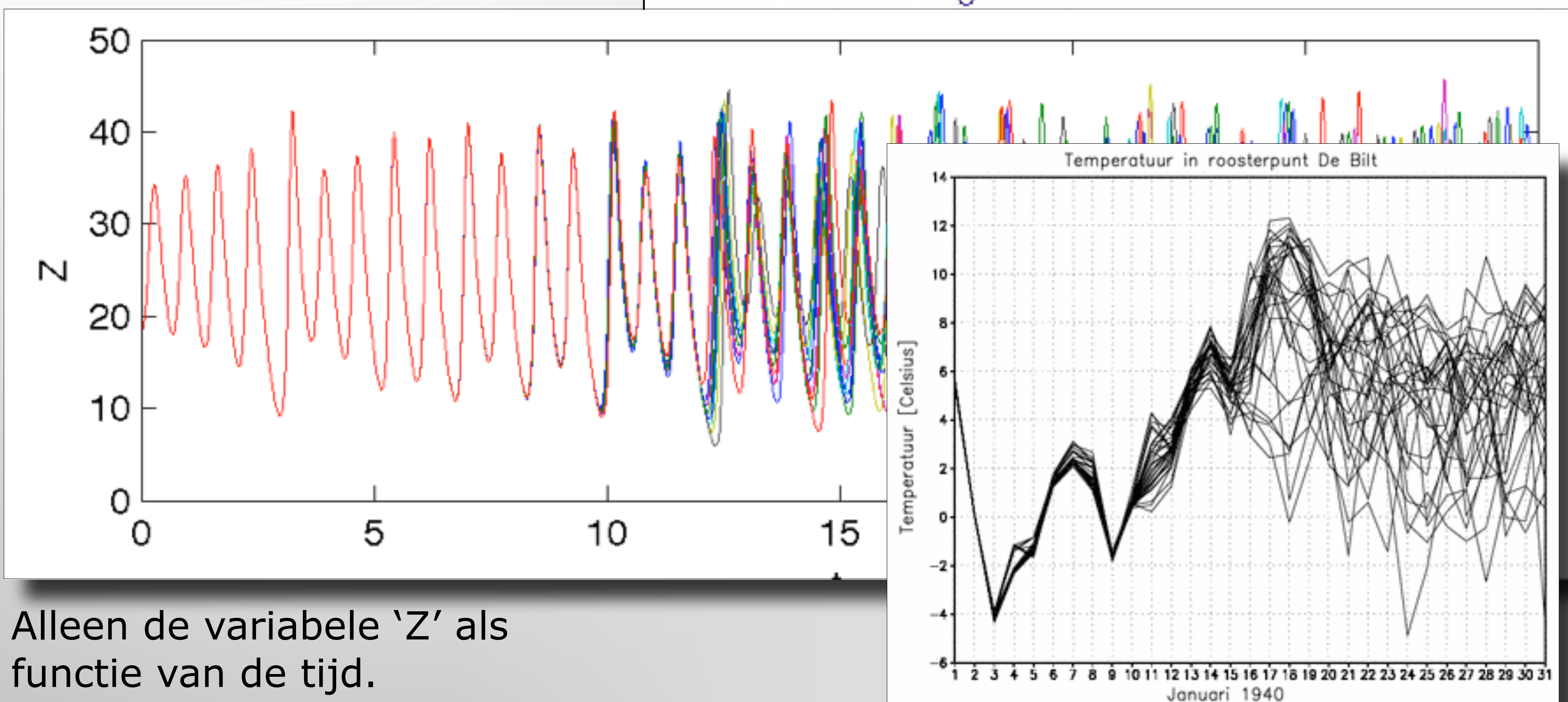


$$X_1 = X_0 + \Delta t\, s(Y_0 - X_0)$$
$$Y_1 = Y_0 + \Delta t\,(r X_0 - X_0 Z_0 - Y_0)$$
$$Z_1 = Z_0 + \Delta t\,(X_0 Y_0 - b Z_0)$$



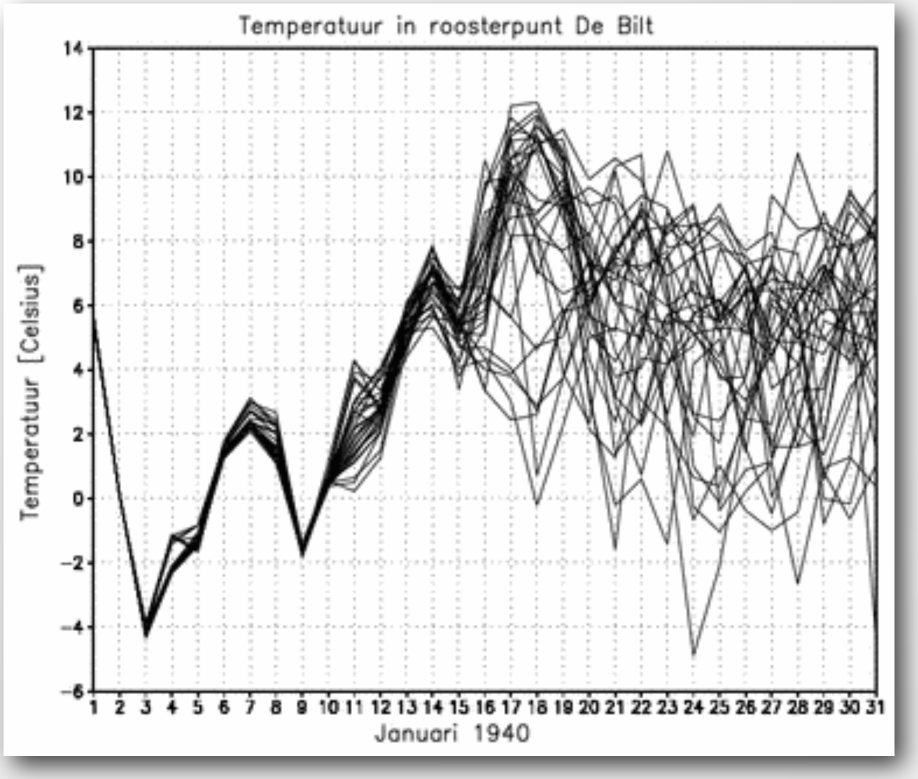
Chaotisch gedrag

Tien simulaties van het Lorenzsysteem met kleine verstoringen in de begintoestand:



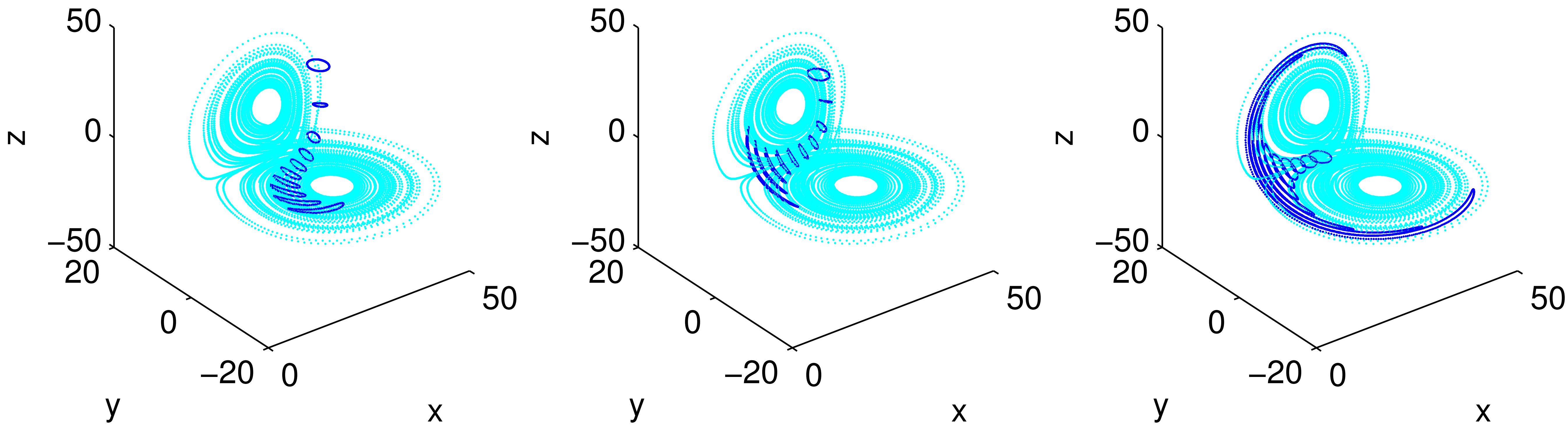
Alleen de variabele 'Z' als functie van de tijd.

Chaos en voorspelbaarheid



Voor chaotische systemen is deterministisch voorspelbaarheid in de zin van de planeten onmogelijk over lange tijd.

Toch zijn er 'stabiele weerspatronen'...



Werkcollege voor vandaag

- **Probleem 3.4** zelf de analyse van de periodieke banen van het logistische vergelijking uitvoeren.
- **Probleem 3.5** chaos vaststellen in de “tent map”.
- **Probleem 3.6** bewijs chaos in logistische vergelijking, r=4.
- **Probleem 3.7** bifurcatiediagram maken voor de “Gaussian map”.
- **Project 1: Inleveren woensdag 2 maart!**