WISB134

Modellen & Simulatie

Lecture 6 - Scalaire dynamica (deel 3)

Universiteit Utrecht

Overzicht van ModSim

Meeste aandacht (t/m 1 apr.)

- Basisbegrippen dynamische modellen
  - Definities recursies, DVs, numerieke methoden
  - Oplossingen DVs
  - Convergentie numerieke methoden
- Dynamica
  - ➡ Scalaire dynamica
  - Dynamica op $\mathbf{R}^d$
  - Lineaire dynamica op $\mathbf{R}^2$
- Bijzondere gevallen
  - Lineaire kansmodellen (Markovketens)
  - Niet-autonome systemen (Resonantie)
  - Hogere orde numerieke methoden

Scalaire dynamica

- Recursies op $\mathbf{R}^1$
    - Grafische analyse methode
    - Evenwichten
    - Stabiliteit
    - Periodieke banen
    - Bifurcaties
    - Chaos

vandaag

- Differentiaalvergelijkingen op $\mathbf{R}^1$
    - Evenwichten en stabiliteit
- Numerieke methoden op $\mathbf{R}^1$
    - Evenwichten en stabiliteit

Scalaire dynamica

	$x_{n+1} = F(x_n)$	$y' = f(y)$	$y_{n+1}=y_n+\tau f(y_n)$
Evenwicht			
Criterion asymp. stabiliteit			
Periodieke banen			
Chaos			

Evenwichten

Scalaire dynamica

- Recursies op $\mathbf{R}^1$
  - Grafische analyse
  - Evenwichten
  - Stabiliteit
  - Periodieke banen
  - Bifurcaties
  - Chaos
- DVs op $\mathbf{R}^1$
  - Evenwicht./stab.
- NMs op $\mathbf{R}^1$
  - Evenwicht./stab.

- Een *baan* is een rij

$$\{x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots\}$$

waarvan $x_{n+1} = F(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

- Een *evenwicht* of *dekpunt* is een triviale baan $x_n = x_{n-1} = \cdots = x_1 = x_0 = \alpha$
- Een dekpunt voldoet dus aan

$$\alpha = F(\alpha)$$

Stabiliteit

Scalaire dynamica
- Recursies op $\mathbf{R}^1$
  - Grafische analyse
  - Evenwichten
  - Stabiliteit
  - Periodieke banen
  - Bifurcaties
  - Chaos
- DVs op $\mathbf{R}^1$
  - Evenwicht./stab.
- NMs op $\mathbf{R}^1$
  - Evenwicht./stab.

- Een dekpunt α is *stabiel in de zin van Lyapunov* als voor elk $\varepsilon > 0$ er een $\delta > 0$ te vinden is zodanig dat

$$|x_n - \alpha| \leq \varepsilon, \; n = 0, 1, \ldots, \quad \text{als} \quad |x_0 - \alpha| \leq \delta$$

  Anders is het dekpunt *instabiel*.
- Een dekpunt α is *asymptotisch stabiel* als bovendien geldt $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$

Stelling Een dekpunt α is:

- asymptotisch stabiel als $|F'(\alpha)| < 1$,
- instabiel als $|F'(\alpha)| > 1$.

2-periodieke banen

Scalaire dynamica

- Recursies op $\mathbf{R}^1$
  - Grafische analyse
  - Evenwichten
  - Stabiliteit
  - Periodieke banen
  - Bifurcaties
  - Chaos
- DVs op $\mathbf{R}^1$
  - Evenwicht./stab.
- NMs op $\mathbf{R}^1$
  - Evenwicht./stab.

- Een *2-periodieke baan* is een paar

$$\alpha, \beta \in \mathbf{R}, \qquad \alpha \neq \beta$$

waarvoor geldt $\alpha = F(\beta), \quad \beta = F(\alpha)$

- Deze zijn beiden dekpunten van de samengestelde functie

$$F \circ F(x) = F(F(x))$$

- Stabiel als $|F'(\alpha)F'(\beta)| < 1$

$$(F \circ F)'(\alpha) = F'(F(\alpha))F'(\alpha) = F'(\beta)F'(\alpha)$$

Een recursie $x_{n+1} = F(x_n), \; F : D \to D$
is **chaotisch** op D als

- er voor ieder x_0 kleine storingen zijn die leiden tot grote afwijkingen

- er in iedere buurt van iedere $x \in D$ een x_0 te vinden is waarvoor de baan x_n periodiek is

- er een baan (x_n) bestaat die voor iedere $x \in D$ willekeurig dicht in de buurt van x komt.

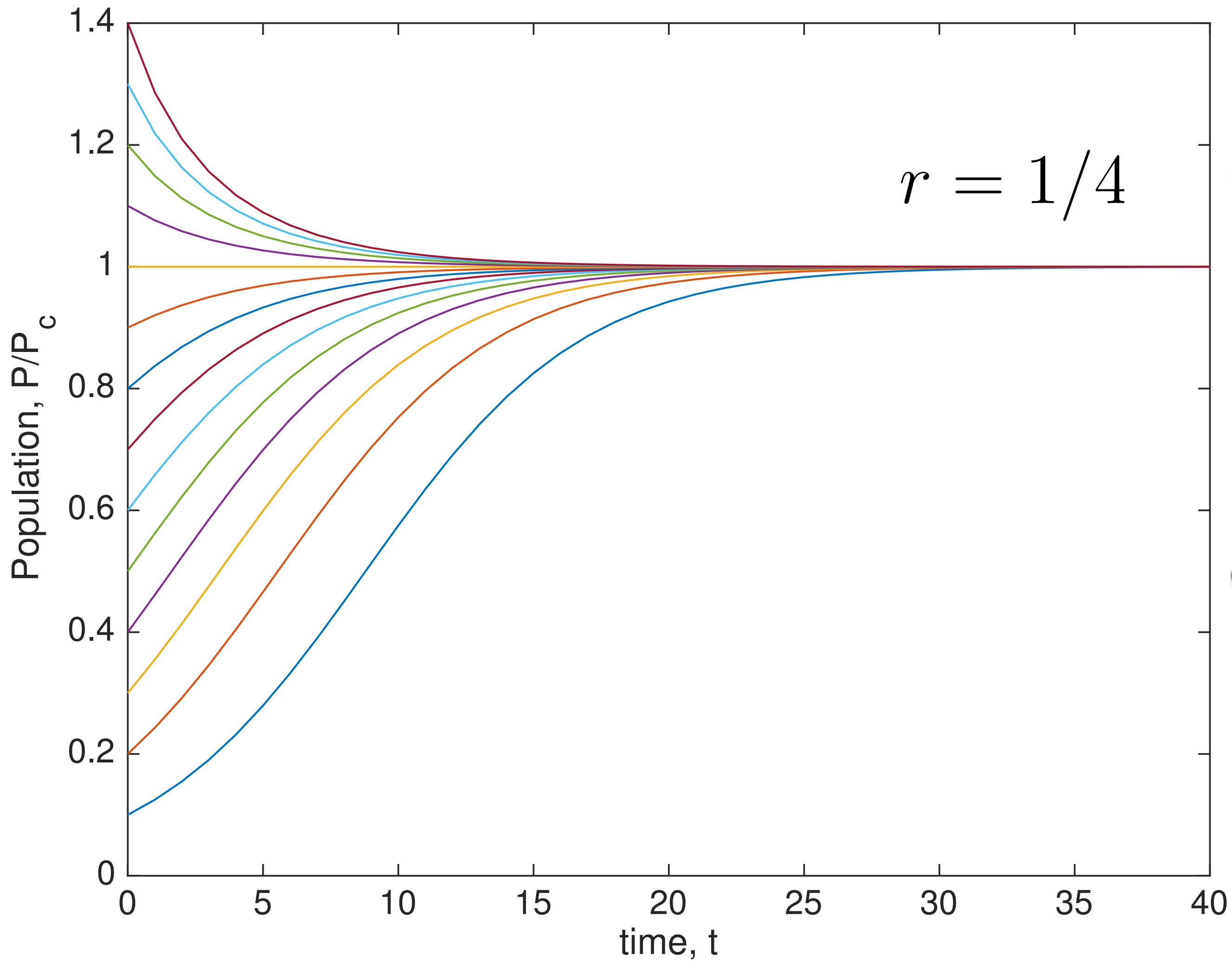
Scalaire dynamica

	$x_{n+1} = F(x_n)$	$y' = f(y)$	$y_{n+1} = y_n + \tau f(y_n)$
Evenwicht	$F(x^*)=x^*$		
Criterion asymp. stabiliteit	$\lvert F'(x^*)\rvert<1$		
Periodieke banen	$F \circ F(x^*)=x^*$		
Chaos	mogelijk		

Voorbeeld: bladluizen

Model continu in de tijd: differentiaalvergelijking

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{P_c}\right) \qquad P(t) = \frac{e^{r(t-t_0)}P_cP_0}{P_c + (e^{r(t-t_0)} - 1)P_0}$$



Scalaire dynamica

	$x_{n+1} = F(x_n)$	$y' = f(y)$	$y_{n+1} = y_n + \tau f(y_n)$
Evenwicht	$F(x^*)=x^*$	$f(y^*)=0$	
Criterion asymp. stabiliteit	$\|F'(x^*)\|<1$	$f'(y^*)<0$	
Periodieke banen	$F \circ F(x^*)=x^*$	niet mogelijk ($d \geq 2$)	
Chaos	mogelijk	niet mogelijk ($d \geq 3$)	

Scalaire dynamica

	$x_{n+1} = F(x_n)$	$y' = f(y)$	$y_{n+1} = y_n+\tau f(y_n)$
Evenwicht	$F(x^*)=x^*$	$f(y^*)=0$	$f(y^*)$
Criterion asymp. stabiliteit	$\|F'(x^*)\|<1$	$f'(y^*)<0$	$f'(y^*)<0$, $\tau<-2/f'(y^*)$
Periodieke banen	$F\circ F(x^*)=x^*$	niet mogelijk ($d\geq2$)	—
Chaos	mogelijk	niet mogelijk ($d\geq3$)	—

Werkcollege voor vandaag

- **Probleem 3.8** een stelsel van twee DVs eerst reduceren tot een scalaire DV. Daarna stabiliteit bewijzen aan de hand van de definitie.
- **Probleem 3.9** eenvoudig oefening met een oscillerend f(y).
- **Probleem 3.10** vaststellen van de gradientmethode
- **Probleem 3.11** stabiliteit van Euler voor de gradientmethod
- **Project 1: Inleveren woensdag 2 maart!**