WISB134

Modellen & Simulatie

Lecture 8 - Niet-lineaire recursies in meerdere dimensies

Universiteit Utrecht

Overzicht van ModSim

Meeste aandacht (t/m 1 apr.)

- Basisbegrippen dynamische modellen
  - Definities recursies, DVs, numerieke methoden
  - Oplossingen DVs
  - Convergentie numerieke methoden
- Dynamica
  - Scalaire dynamica
  - ➡Dynamica op $\mathbf{R}^d$
  - Lineaire dynamica op $\mathbf{R}^2$
- Bijzondere gevallen
  - Lineaire kansmodellen (Markovketens)
  - Niet-autonome systemen (Resonantie)
  - Hogere orde numerieke methoden

Dynamica op $\boldsymbol{R}^d$

- Tijdsreeks en fase ruimte
- Lineaire dynamica:
  - Lineaire recursies
  - Lineaire DVs
- vandaag Niet-lineaire recursies
- Niet-lineaire DVs
- Stabiliteit van numerieke methoden

Dynamica op $\boldsymbol{R}^d$

- Tijdsreeks en fase ruimte
- Lineaire dynamica:
  - Lineaire recursies
  - Lineaire DVs
- Niet-lineaire recursies
  - Samenvatting resultaten tot nu toe
  - Voorbeeld niet-lineaire recursiemodel
  - Dekpunten
  - Meer-dimensionale Taylor, Jacobiaan matrix
  - Stelling stabiliteit van niet-lineaire recursies
  - Methode van Newton
  - Julia verzamelingen
- Niet-lineaire DVs
- Stabiliteit van numerieke methoden

vandaag

Stabiliteit: scalaar, lineair

	Recursie	Diff. Vgl.
Vorm	$x_{n+1} = A x_n$	$\frac{dx}{dt} = a\,x$
Eigenprobleem		
Oplossing	$x_n = A^n x_0$	$x(t) = e^{at} x_0$
Evenwicht	$x = 0$	$x = 0$
Asympt. stabiel als	$\|A\| < 1$	$e^{at} < 1, \ \forall t > 0$ $\Rightarrow a < 0$
Instabiel als	$\|A\| > 1$	$a > 0$

Stabiliteit: scalaar, niet-lineair

	Recursie	Diff. Vgl.
Vorm	$x_{n+1} = F(x_n)$	$\frac{dx}{dt} = f(x)$
Eigenprobleem		
Oplossing		
Evenwicht	$F(\alpha) = \alpha$	$f(\alpha) = 0$
Asympt. stabiel als	$\lvert F'(\alpha)\rvert < 1$	$f'(\alpha) < 0$
Instabiel als	$\lvert F'(\alpha)\rvert > 1$	$f'(\alpha) > 0$

Stabiliteit: lineair, meerdere dimensies

	Recursie	Diff. Vgl.
Vorm	$x_{n+1} = Ax_n$	$\frac{dx}{dt} = Ax$
Eigenprobleem	$Av_i = \lambda_i v_i, \; i = 1, \ldots, d, \quad v_i$ lin. onafh.	
Oplossing	$x_n = \sum_{i=1}^{d} \gamma_i \lambda_i^n v_i$	$x(t) = \sum_{i=1}^{d} \gamma_i e^{\lambda_i t} v_i$
Evenwicht	$x = 0$	$x = 0$
Asympt. stabiel als	$\sigma(A) \subset \mathcal{B}_1$	$\sigma(A) \subset \mathbb{C}^-$
Instabiel als	$\exists \lambda \in \sigma(A) : \lvert\lambda\rvert > 1$	$\exists \lambda \in \sigma(A) : \mathrm{Re}\, \lambda > 0$

Dynamica op $\boldsymbol{R}^d$

- Tijdsreeks en fase ruimte
- Lineaire dynamica:
  - Lineaire recursies
  - Lineaire DVs
- Niet-lineaire recursies
  - Samenvatting resultaten tot nu toe
  - Voorbeeld niet-lineaire recursiemodel
  - Dekpunten
  - Meer-dimensionale Taylor, Jacobiaan matrix
  - Stelling stabiliteit van niet-lineaire recursies
  - Methode van Newton
  - Julia verzamelingen
- Niet-lineaire DVs
- Stabiliteit van numerieke methoden

vandaag

Stabiliteit: niet-lineair, meedere-dim

	Recursie	Diff. Vgl.
Vorm	$x_{n+1} = F(x_n)$	
Eigenprobleem		
Oplossing		
Evenwicht	$F(\alpha) = \alpha$	
Asympt. stabiel als	$\sigma(DF(\alpha)) \subset \mathcal{B}_1$	
Instabiel als	$\exists \lambda \in \sigma(DF(\alpha)) : \lvert\lambda\rvert > 1$	

Complex als 2-d reëel

Voor $c \in \mathbb{C}$, bekijk

$$z_{n+1} = F(z_n) \quad \text{met} \quad F(z) \equiv z^2 + c \qquad (z \in \mathbb{C})$$

Complex als 2-d reëel

Voor $c \in \mathbb{C}$, bekijk

$$z_{n+1} = F(z_n) \quad \text{met} \quad F(z) \equiv z^2 + c \qquad (z \in \mathbb{C})$$

Voor $z \in \mathbb{C}$, schrijf $z = x+iy$ met $x, y \in \mathbb{R}$. Evenzo $c = a+ib$.

Dan $\quad F(x + iy) = (x^2 - y^2 + a) + i(2xy + b).$

Complex als 2-d reëel

Voor $c \in \mathbb{C}$, bekijk

$$z_{n+1} = F(z_n) \quad \text{met} \quad F(z) \equiv z^2 + c \qquad (z \in \mathbb{C})$$

Voor $z \in \mathbb{C}$, schrijf $z = x + iy$ met $x, y \in \mathbb{R}$. Evenzo $c = a + ib$.

Dan $\quad F(x + iy) = (x^2 - y^2 + a) + i(2xy + b)$.

Schrijf $z_n = x_n + iy_n$. Dan

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n) \equiv x_n^2 - y_n^2 + a \\ y_{n+1} = g(x_n, y_n) \equiv 2x_n y_n + b \end{cases}$$

Complex als 2-d reëel

Voor $c \in \mathbb{C}$, bekijk

$$z_{n+1} = F(z_n) \quad \text{met} \quad F(z) \equiv z^2 + c \qquad (z \in \mathbb{C})$$

Voor $z \in \mathbb{C}$, schrijf $z = x+iy$ met $x, y \in \mathbb{R}$. Evenzo $c = a+ib$.

Dan $\quad F(x+iy) = (x^2 - y^2 + a) + i(2xy + b).$

Schrijf $z_n = x_n + iy_n$. Dan

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n) \equiv x_n^2 - y_n^2 + a \\ y_{n+1} = g(x_n, y_n) \equiv 2x_n y_n + b \end{cases}$$

Conclusie.

(1-d) Complex is equivalent met 2-dimensionaal reëel.

In onze volgende voorbeelden rekenen we complex omdat dat de notatie vereenvoudigt.

Complex als 2-d reëel

Voor $c \in \mathbb{C}$, bekijk

$$z_{n+1} = F(z_n) \quad \text{met} \quad F(z) \equiv z^2 + c \qquad (z \in \mathbb{C})$$

Voor $z \in \mathbb{C}$, schrijf $z = x + iy$ met $x, y \in \mathbb{R}$. Evenzo $c = a + ib$.

Dan $\quad F(x + iy) = (x^2 - y^2 + a) + i(2xy + b)$.

Schrijf $z_n = x_n + iy_n$. Dan

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n) \equiv x_n^2 - y_n^2 + a \\ y_{n+1} = g(x_n, y_n) \equiv 2x_n y_n + b \end{cases}$$

Stabiliteit. Jacobi matrix in (x, y): $\begin{bmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix}$

met eigenwaarden $\lambda_1 = 2(x + iy)$ en $\lambda_2 = 2(x - iy)$.

Met $z = x + iy$ is $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 2|z| = |F'(z)|$.

Evenwicht (in $\mathbb{C}$) in $\zeta_1 \equiv \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - 4c})$. Stabiel als $|2\zeta_1| < 1$

Voorbeeld

Kies $c \in \mathbb{C}$. Definieer $F(z) \equiv z^2 + c \qquad (z \in \mathbb{C})$.

Voor iedere rij (z_n) met $z_{n+1} = F(z_n)$ zijn er drie mogelijkheden:

1) $z_n \to \alpha \qquad (n \to \infty)$ met α evenwicht: $\alpha = F(\alpha)$
2) $z_n \to \infty \qquad (n \to \infty)$
3) anders (chaos, periodieke banen)

Voorbeeld

Kies $c \in \mathbb{C}$. Definieer $F(z) \equiv z^2 + c \qquad (z \in \mathbb{C})$.

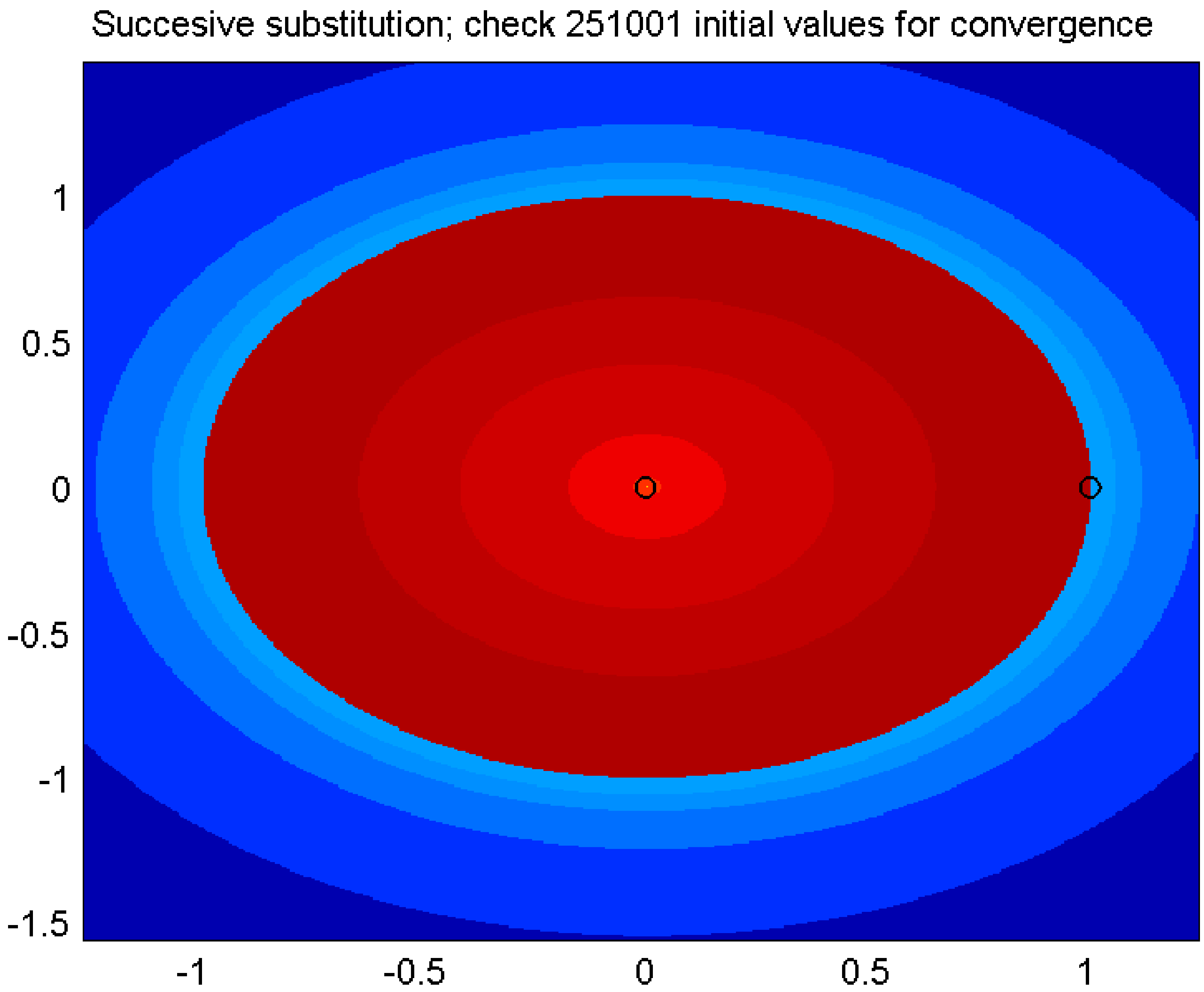
Voor iedere rij (z_n) met $z_{n+1} = F(z_n)$ zijn er drie mogelijkheden:

1) $z_n \to \alpha \qquad (n \to \infty)$ met α evenwicht: $\alpha = F(\alpha)$
2) $z_n \to \infty \qquad (n \to \infty)$
3) anders (chaos, periodieke banen)

Voorbeeld: $c = 0$. $\quad \alpha = 0$ is stabiel, $\alpha = 1$ is instabiel

(z_n) heeft eigenschap 1) als $|z_0| < 1$
(z_n) heeft eigenschap 2) als $|z_0| > 1$
(z_n) heeft eigenschap 3) als $|z_0| = 1$, $z_0 \neq 1$

Julia set


Succesive substitution; check 251001 initial values for convergence
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1

Newton proces

$$z_{n+1} = z_n - \frac{F(z_n)}{F'(z_n)} \qquad\qquad (z \in \mathbb{C})$$

Voorbeeld. $F(z) = z^3 - a.$

Dan $z_{n+1} = z_n - \dfrac{z_n^3 - a}{3z_n^2}$

Newton proces

$$z_{n+1} = z_n - \frac{F(z_n)}{F'(z_n)} \qquad\qquad (z \in \mathbb{C})$$

Voorbeeld. $\qquad F(z) = z^3 - a.$

Dan $\; z_{n+1} = z_n - \dfrac{z_n^3 - a}{3z_n^2} = G(z_n)$ met $G(z) \equiv \frac{2}{3}z + \frac{a}{3z^2}$.

Voor $z \in \mathbb{C}$, schrijf $z = x + iy$ met $x, y \in \mathbb{R}$.

Evenzo $a = \alpha + i\beta$.

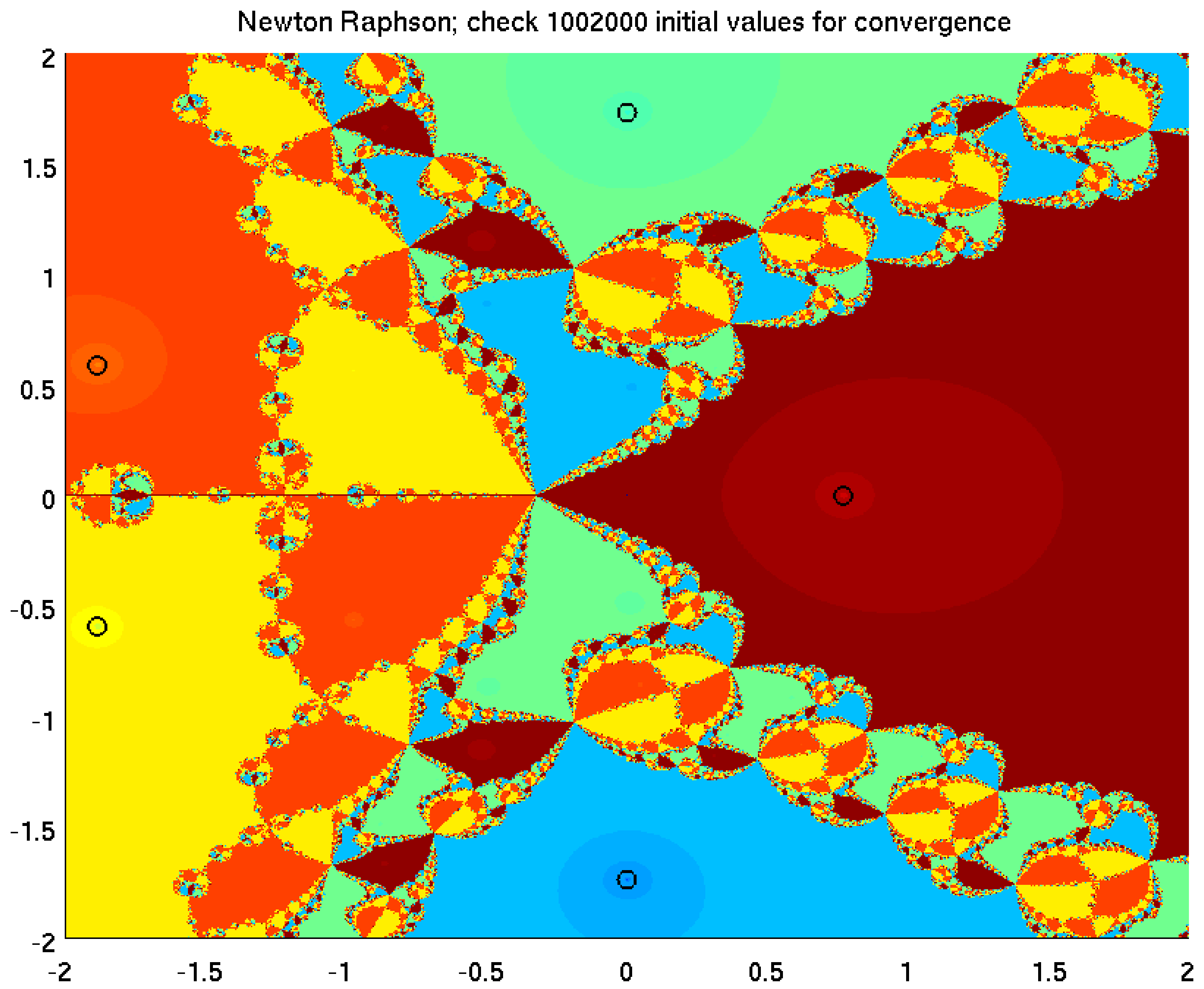
Definieer, $f(x, y) \equiv \mathrm{Re}(G(x + iy))$,

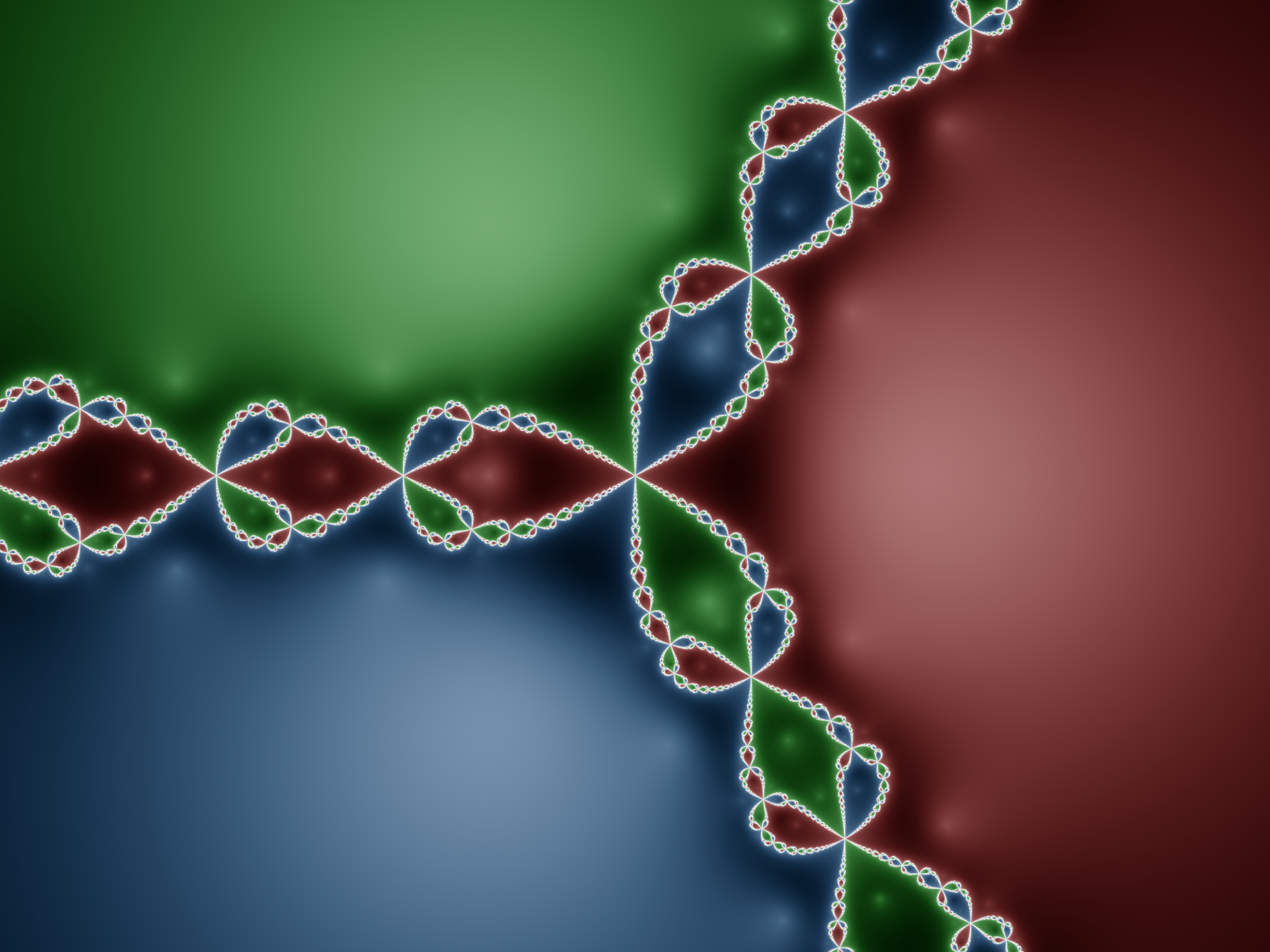
$\qquad\qquad g(x, y) \equiv \mathrm{Im}(G(x + iy))$.

Volgende plaatje: $\qquad F(z) = z^5 + 3z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 3z - 9$

$F(\zeta_j) = 0$. Kleur $\mathcal{S}_n(\zeta_j) \equiv \{z_0 \in \mathbb{C} \mid |z_{n-1} - \zeta_j| > 10^{-8},\ |z_n - \zeta_j| \le 10^{-8}\}$

Verschillende kleuren voor verschillende ζ_j,
verschillende kleurnuances voor verschillende n ('schillen').


Newton Raphson; check 1002000 initial values for convergence
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2



Voorbeeld

Kies $c \in \mathbb{C}$. Definieer $F(z) \equiv z^2 + c \qquad (z \in \mathbb{C})$.

Voor iedere rij (z_n) met $z_{n+1} = F(z_n)$ zijn er drie mogelijkheden:

1) $z_n \to \alpha \qquad (n \to \infty)$ met α evenwicht: $\alpha = F(\alpha)$
2) $z_n \to \infty \qquad (n \to \infty)$
3) anders (chaos, periodieke banen)

Julia set: $\{z_0 \in \mathbb{C} \mid (z_n)$ heeft eigenschap 3)$\}$

- Kies $c = -1.25$.

Kleur $z_0 \in \mathbb{C}$ met kleur afhankelijk van gedrag (z_n) voor $n \to \infty$.

Kleurnuance per n-de 'schil':

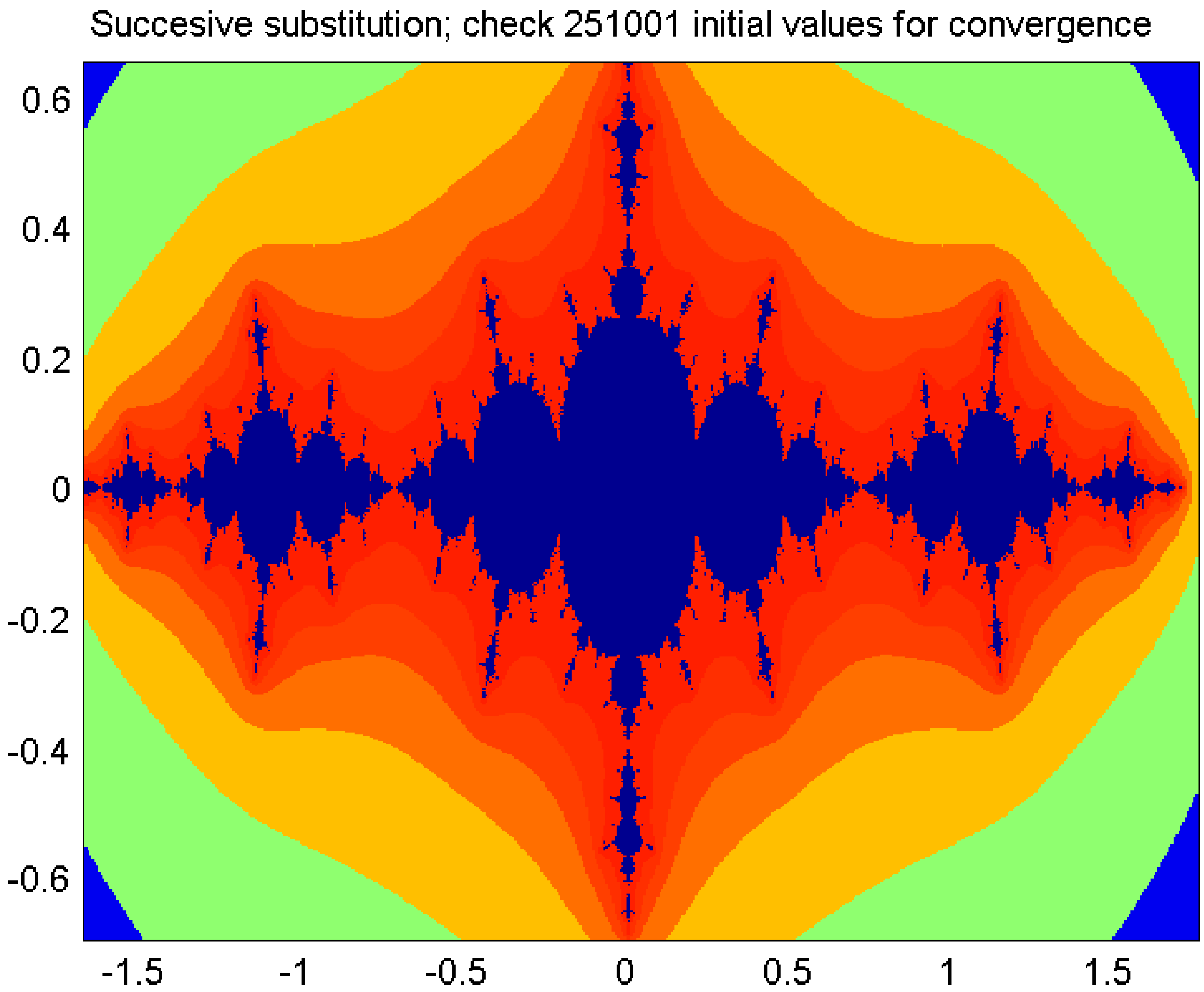
$\mathcal{S}_n(\alpha) = \{z_0 \in \mathbb{C} \mid |z_{n-1} - \alpha| > 10^{-8},\ |z_n - \alpha| \leq 10^{-8}\}$,

$\mathcal{S}_n(\infty) = \{z_0 \in \mathbb{C} \mid |z_{n-1}| < 10^8,\ |z_n| \geq 10^8\}$,

$\mathcal{S}_\infty$ (Julia set) is de rest;

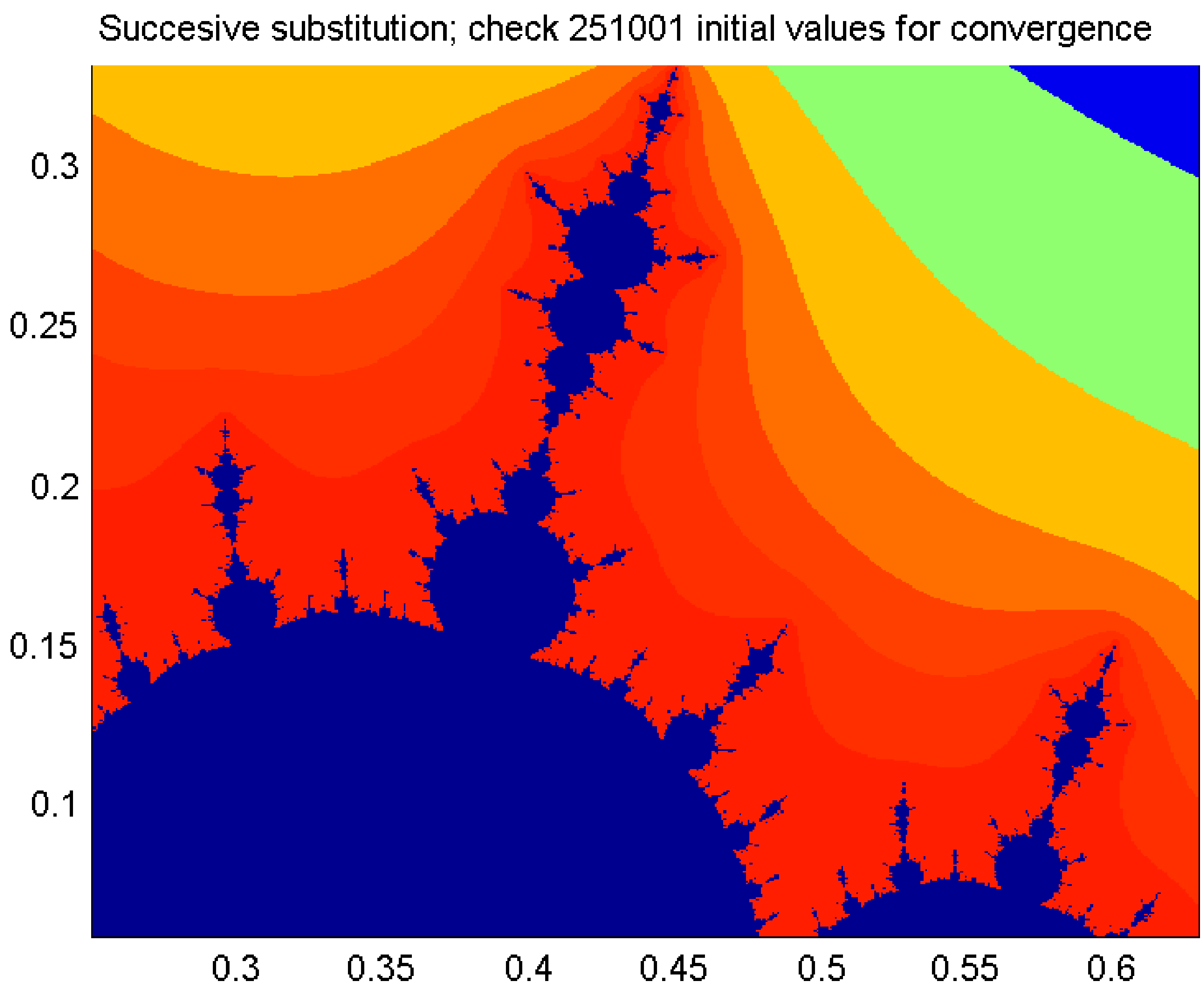
Kleurnuance voor 'n schil kan per plaatje verschillen.

Julia set



Succesive substitution; check 251001 initial values for convergence
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5

Julia set



Succesive substitution; check 251001 initial values for convergence
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.3
0.35
0.4
0.45
0.5
0.55
0.6

Voorbeeld

Kies $c \in \mathbb{C}$. Definieer $\quad F(z) \equiv z^2 + c \qquad (z \in \mathbb{C})$.

Voor iedere rij (z_n) met $\quad z_{n+1} = F(z_n) \quad$ zijn er drie mogelijkheden:

1) $z_n \to \alpha \qquad (n \to \infty)$ met α evenwicht: $\alpha = F(\alpha)$
2) $z_n \to \infty \qquad (n \to \infty)$
3) anders (chaos, periodieke banen)

Julia set: $\{z_0 \in \mathbb{C} \mid (z_n)$ heeft eigenschap 3)$\}$

- Kies $c = -1.25$.

Kleur $z_0 \in \mathbb{C}$ met kleur afhankelijk van gedrag (z_n) voor $n \to \infty$.

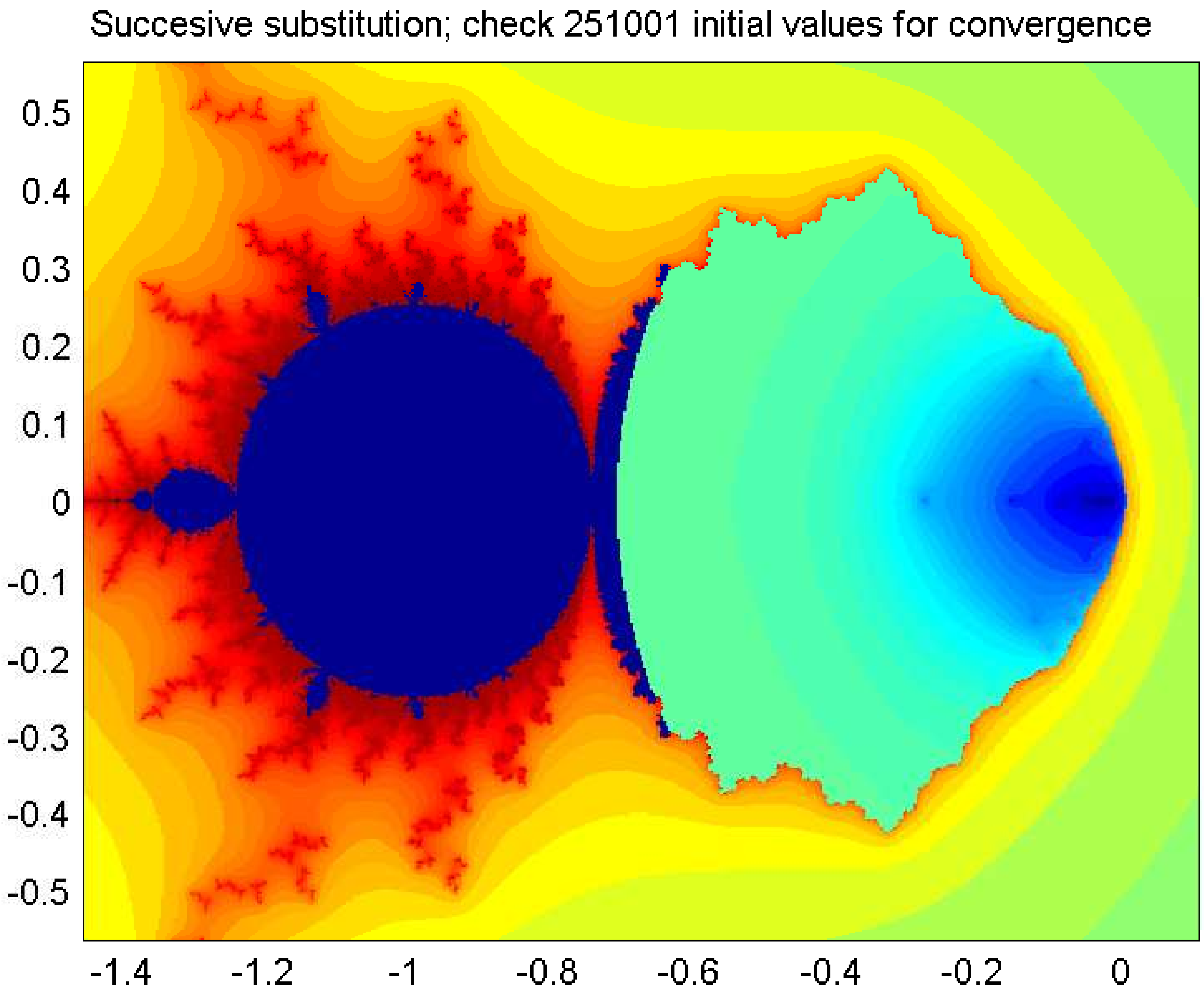
- Kies $z_0 = 1$.

Kleur $c \in \mathbb{C}$ met kleur afhankelijk van gedrag (z_n) voor $n \to \infty$.

Kleurnuances corresponderen met

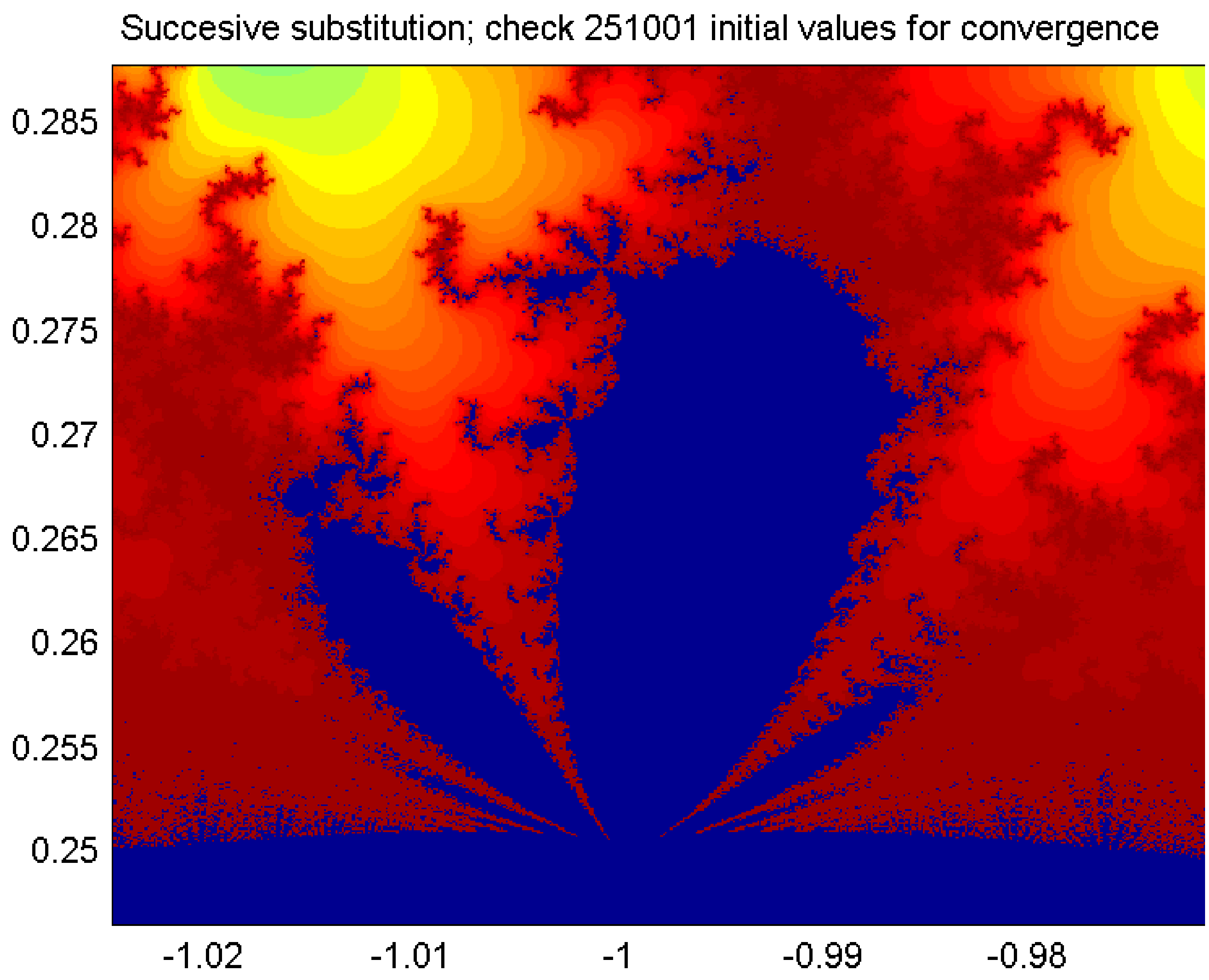
waarde n *waarvoor* $|z_n - \alpha| < 10^{-8}$ *of* $|z_n| > 10^8$

Julia set



Succesive substitution; check 251001 initial values for convergence
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
-0.5
-1.4
-1.2
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0

Julia set


Succesive substitution; check 251001 initial values for convergence
0.285
0.28
0.275
0.27
0.265
0.26
0.255
0.25
-1.02
-1.01
-1
-0.99
-0.98

Werkcollege voor vandaag

- **Problemen 4.6-4.8** onderzoek stabiliteit en dynamica van niet-lineaire recursies in meerdere dimensies.

https://www.youtube.com/watch?v=zXTpASSd9xE http://www.youtube.com/watch?v=gruJ0S3TTtI