WISB134

Modellen & Simulatie

Lecture 10 - Stabiliteit van numerieke methoden voor differentiaalvergelijkingen

Universiteit Utrecht

Overzicht van ModSim

Meeste aandacht (t/m 1 apr.)

- Basisbegrippen dynamische modellen
  - Definities recursies, DVs, numerieke methoden
  - Oplossingen DVs
  - Convergentie numerieke methoden
- Dynamica
  - Scalaire dynamica
  - ➡Dynamica op $\mathbf{R}^d$
  - Lineaire dynamica op $\mathbf{R}^2$
- Bijzondere gevallen
  - Lineaire kansmodellen (Markovketens)
  - Niet-autonome systemen (Resonantie)
  - Hogere orde numerieke methoden

Dynamica op $\boldsymbol{R}^d$

- Tijdsreeks en fase ruimte
- Lineaire dynamica:
  - Lineaire recursies
  - Lineaire DVs
- Niet-lineaire recursies
- Niet-lineaire DVs
- Stabiliteit van numerieke methoden

vandaag

Dynamica op $\boldsymbol{R}^d$

- Tijdsreeks en fase ruimte
- Lineaire dynamica:
  - Lineaire recursies
  - Lineaire DVs
- Niet-lineaire recursies
- Niet-lineaire DVs

vandaag

- Stabiliteit van numerieke methoden
  - Evenwichten en dekpunten
  - Stabiliteitsfunctie
  - Stabiliteitsgebied
  - Stijve DVs en impliciete methoden

Evenwichten en Dekpunten

- Evenwichten van de DV:

$$\mathcal{F} = \{\alpha \in \mathbf{R}^d \,|\, f(\alpha) = 0\}$$

- Numerieke recursie afbeelding:

$$y_{n+1} = \Psi_{\Delta t}(y_n), \qquad n = 0, 1, \ldots$$

- Evenwichten van de numerieke methode:

$$\mathcal{F}_{\Delta t} = \{\alpha \in \mathbf{R}^d \,|\, \Psi_{\Delta t}(\alpha) = \alpha\}$$

- “Stelling”: Voor *de meeste* methoden geldt:

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_{\Delta t}$$

- Het tegenovergestelde hoeft niet te gelden!

Dynamica op $\boldsymbol{R}^d$

- Tijdsreeks en fase ruimte
- Lineaire dynamica:
  - Lineaire recursies
  - Lineaire DVs
- Niet-lineaire recursies
- Niet-lineaire DVs

vandaag

- Stabiliteit van numerieke methoden
  - Evenwichten en dekpunten
  - Stabiliteitsfunctie
  - Stabiliteitsgebied
  - Stijve DVs en impliciete methoden

Stabiliteit: niet-lineair, meedere-dim

	Recursie	Diff. Vgl.
Vorm	$x_{n+1} = F(x_n)$	$\frac{dx}{dt} = f(x)$
Eigenprobleem		
Oplossing		
Evenwicht	$F(\alpha) = \alpha$	$f(\alpha) = 0$
Asympt. stabiel als	$\sigma(DF(\alpha)) \subset \mathcal{B}_1$	$\sigma(Df(\alpha)) \subset \mathbb{C}^-$
Instabiel als	$\exists \lambda \in \sigma(DF(\alpha)) : \lvert\lambda\rvert > 1$	$\exists \lambda \in \sigma(Df(\alpha)) : \mathrm{Re}\, \lambda > 0$

Stabiliteit: lineair, meerdere dimensies

	Recursie	Diff. Vgl.
Vorm	$x_{n+1} = Ax_n$	$\frac{dx}{dt} = Ax$
Eigenprobleem	$Av_i = \lambda_i v_i, \; i = 1, \ldots, d, \quad v_i$ lin. onafh.	
Oplossing	$x_n = \sum_{i=1}^{d} \gamma_i \lambda_i^n v_i$	$x(t) = \sum_{i=1}^{d} \gamma_i e^{\lambda_i t} v_i$
Evenwicht	$x = 0$	$x = 0$
Asympt. stabiel als	$\sigma(A) \subset \mathcal{B}_1$	$\sigma(A) \subset \mathbb{C}^-$
Instabiel als	$\exists \lambda \in \sigma(A) : \lvert\lambda\rvert > 1$	$\exists \lambda \in \sigma(A) : \operatorname{Re} \lambda > 0$

Stabiliteitsbegrippen

- Spectrum van een matrix:

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, Av = \lambda v, \text{ voor een } v \neq 0\}$$

- Stabiliteitsfunctie

$$y' = \lambda y, \qquad \lambda, y(t) \in \mathbb{C}$$

$$R(z): \qquad y_{n+1} = \Psi_{\Delta t}(y_n) = R(\Delta t \lambda)\, y_n$$

- Stabiliteitsgebied (stabiliteitsdomein)

$$\mathcal{S} = \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |R(z)| < 1\}$$

- Asymptotische stabiliteit:

$$\Delta t \text{ zodanig dat} \quad \forall \lambda \in \sigma(A): \quad \Delta t\, \lambda \in \mathcal{S}$$

Stabiliteitsbegrippen

- Spectrum van een matrix:

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, Av = \lambda v, \text{ voor een } v \neq 0\}$$

- Stabiliteitsfunctie

$$y' = \lambda y, \qquad \lambda, y(t) \in \mathbb{C}$$

$$R(z): \qquad y_{n+1} = \Psi_{\Delta t}(y_n) = R(\Delta t \lambda)\, y_n$$

- Stabiliteitsgebied (stabiliteitsdomein)

$$\mathcal{S} = \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |R(z)| < 1\}$$

- Asymptotische stabiliteit:

$$\Delta t \text{ zodanig dat } \quad \forall \lambda \in \sigma(Df): \quad \Delta t\, \lambda \in \mathcal{S}$$

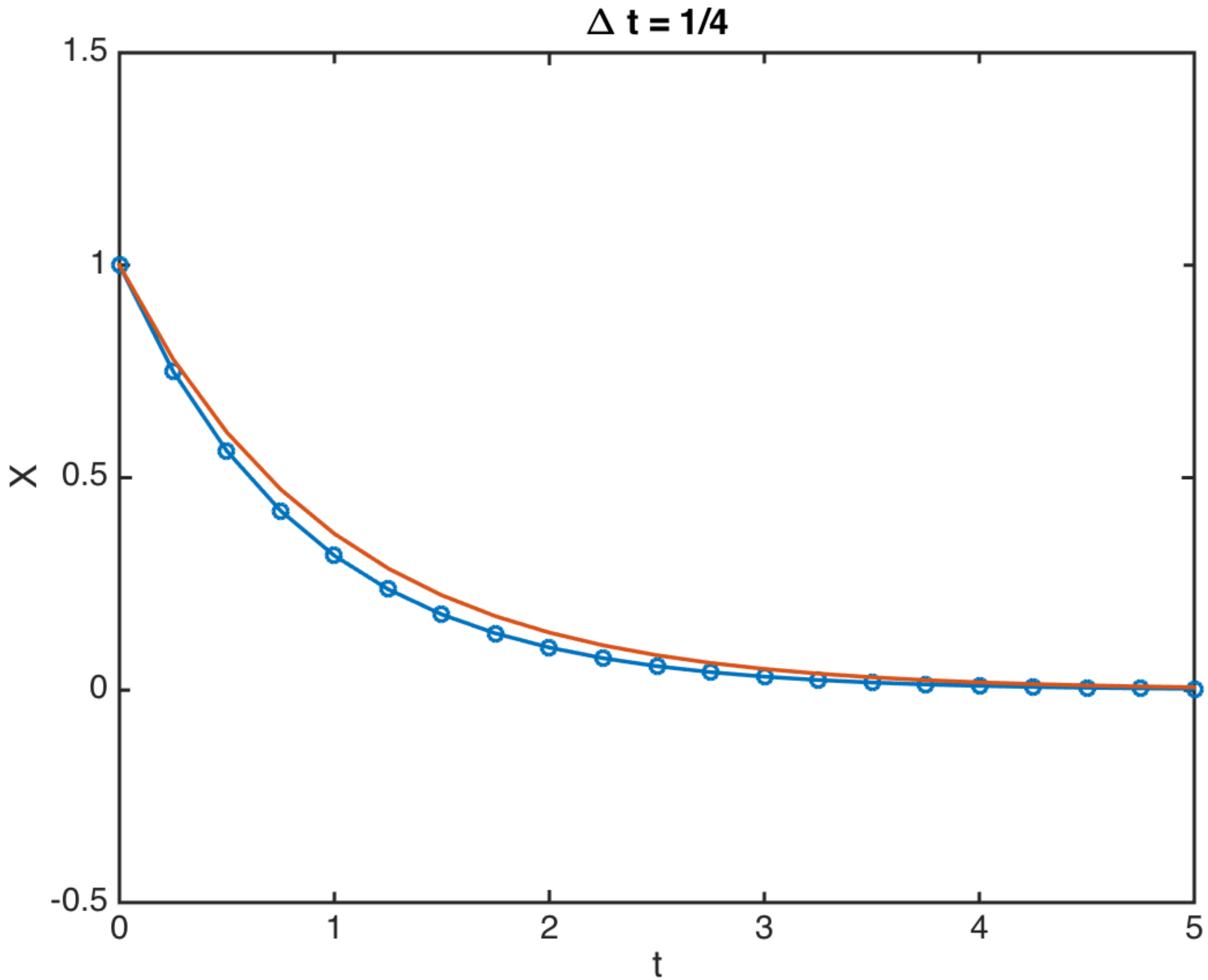
Dynamica op $\boldsymbol{R}^d$

- Tijdsreeks en fase ruimte
- Lineaire dynamica:
  - Lineaire recursies
  - Lineaire DVs
- Niet-lineaire recursies
- Niet-lineaire DVs

vandaag

- Stabiliteit van numerieke methoden
  - Evenwichten en dekpunten
  - Stabiliteitsfunctie
  - Stabiliteitsgebied
  - Stijve DVs en impliciete methoden

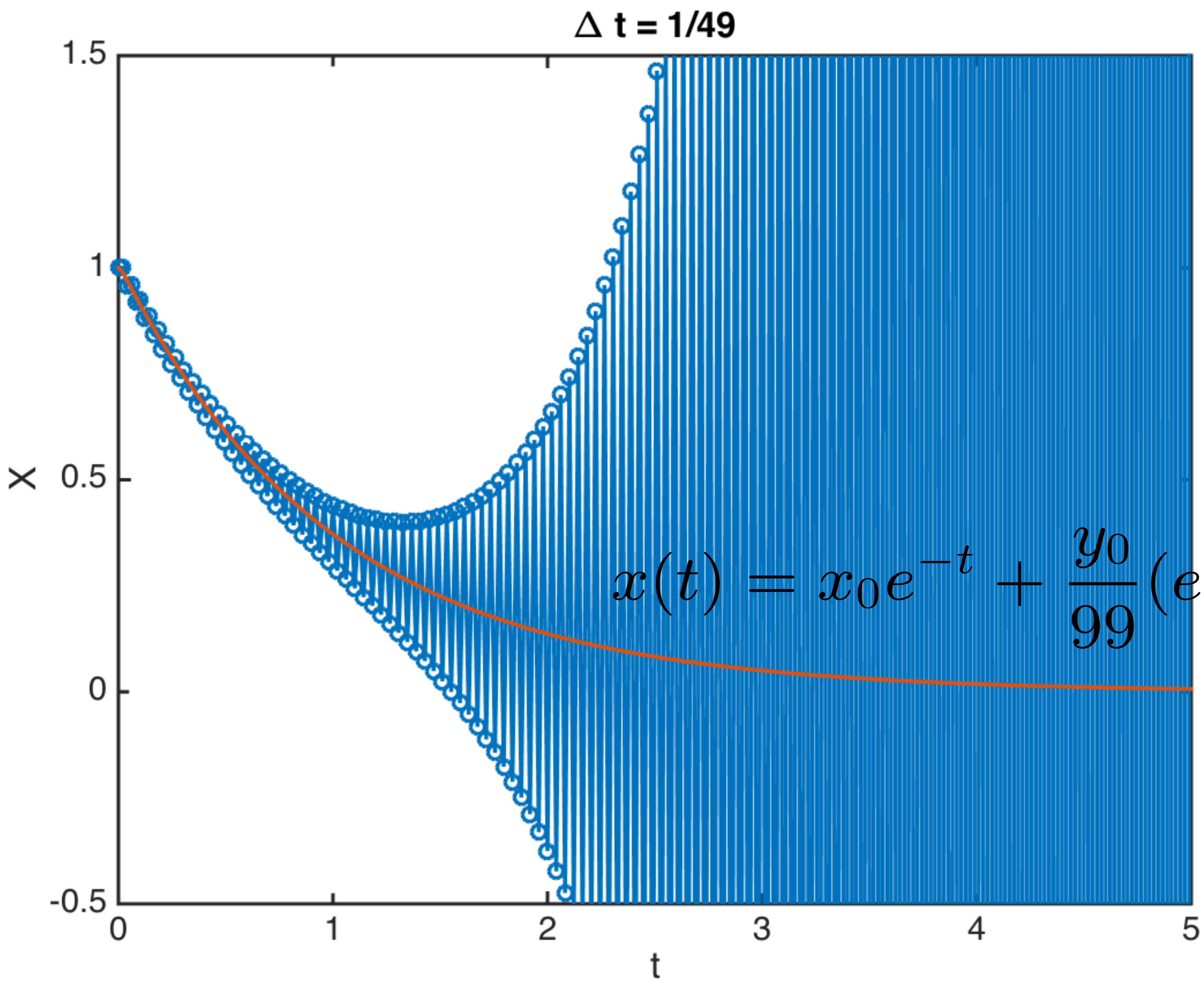
Stijve differentiaalvergelijkingen



$$\frac{dx}{dt} = -x, \quad x(0) = 1$$

Methode van Euler

Stijve differentiaalvergelijkingen

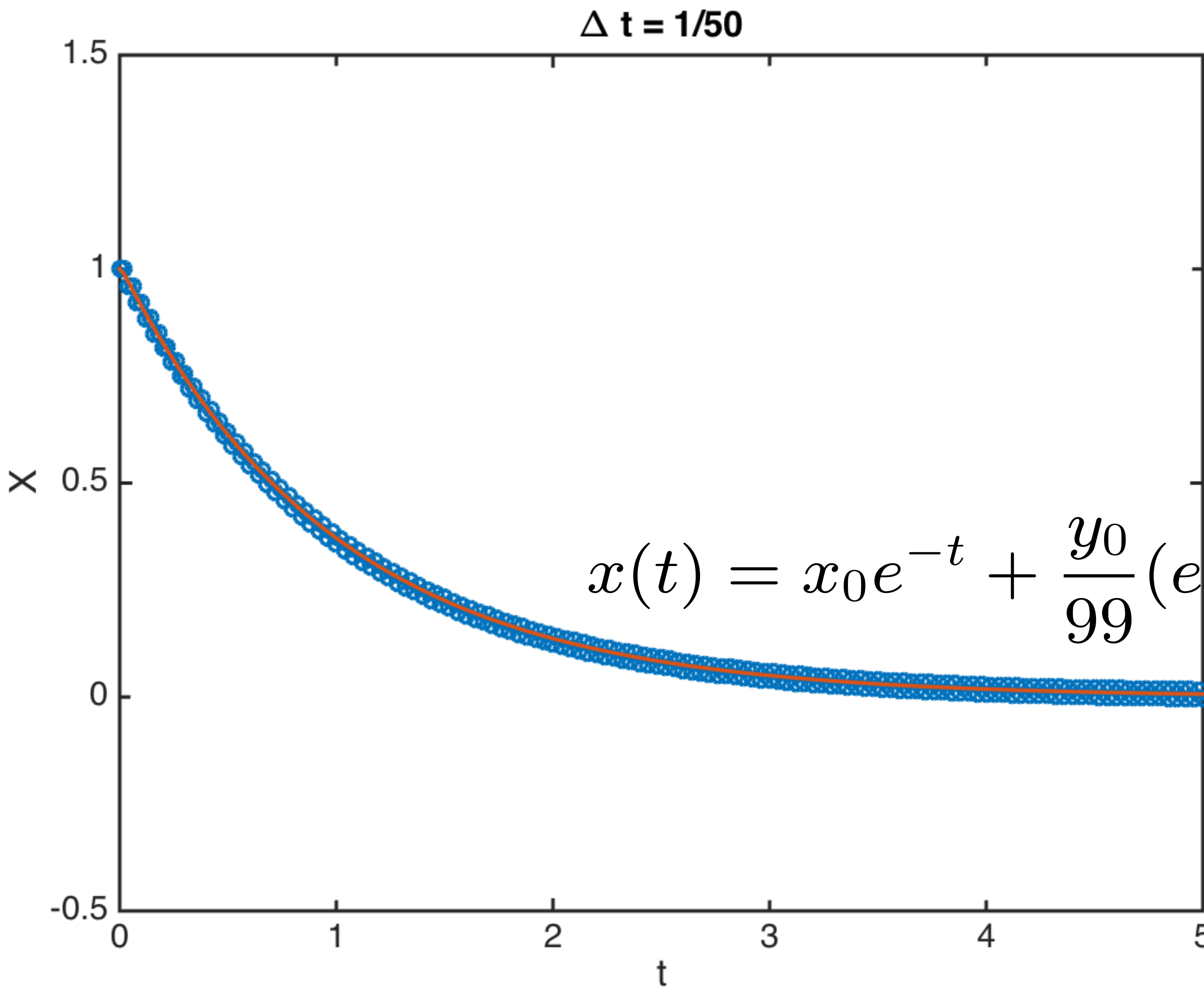


$$x(t) = x_0 e^{-t} + \frac{y_0}{99}(e^{-t} - e^{-100t})$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -100 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad x_0 = y_0 = 1$$

Methode van Euler

Stijve differentiaalvergelijkingen

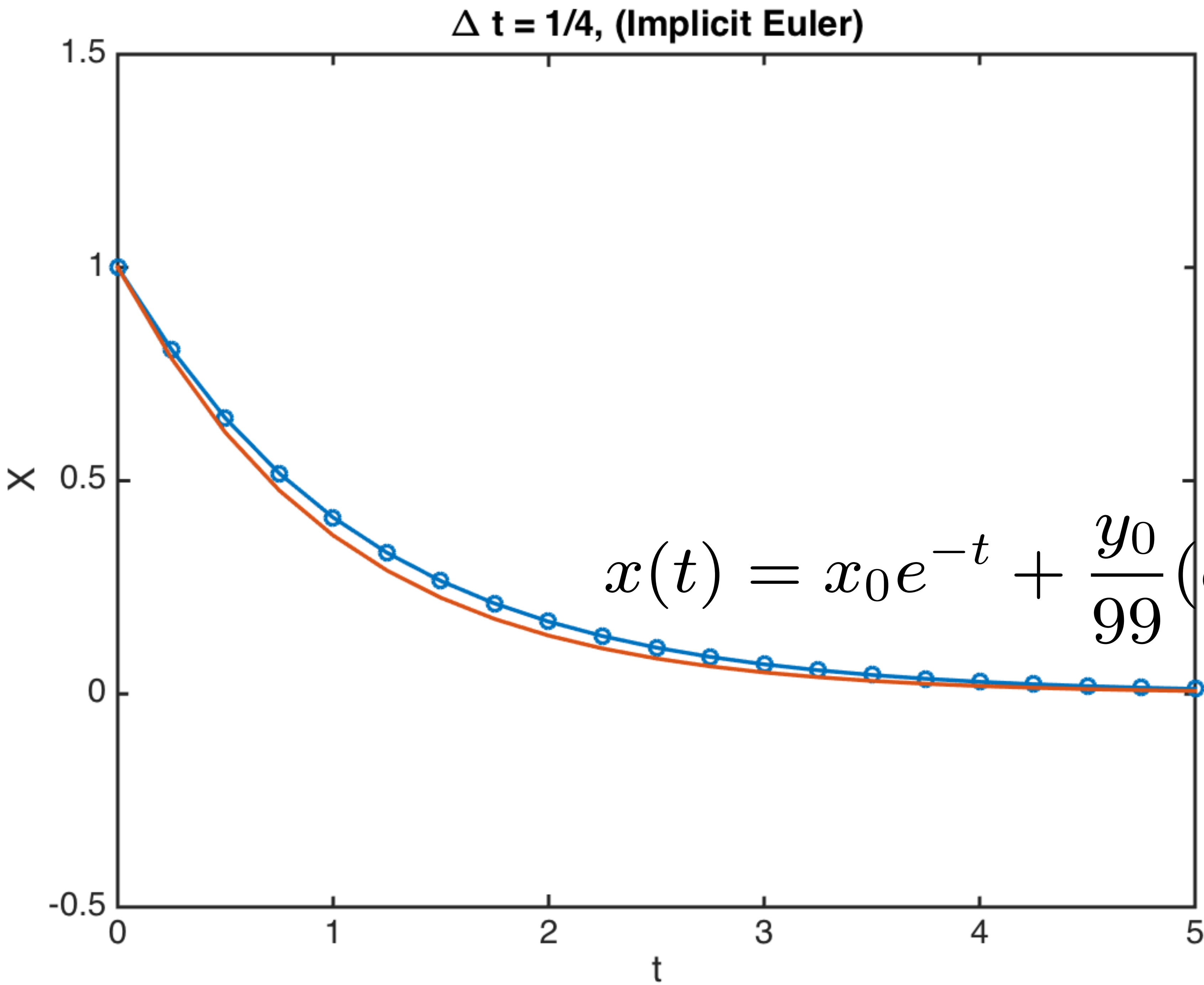


$$x(t) = x_0 e^{-t} + \frac{y_0}{99}(e^{-t} - e^{-100t})$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -100 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad x_0 = y_0 = 1$$

Methode van Euler

Stijve differentiaalvergelijkingen



$$x(t) = x_0 e^{-t} + \frac{y_0}{99}\left(e^{-t} - e^{-100t}\right)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -100 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad x_0 = y_0 = 1$$

Impliciete Euler

Werkcollege voor vandaag

- **Probleem 4.15** stabiliteitsgebied voor theta-methoden.
- **Probleem 4.16** stabiliteit van Euler voor een veer-massa-demper systeem.