WISB134

Modellen & Simulatie

Lecture 12 - Wrap-up stabiliteit differentiaalvergelijkingen

Universiteit Utrecht

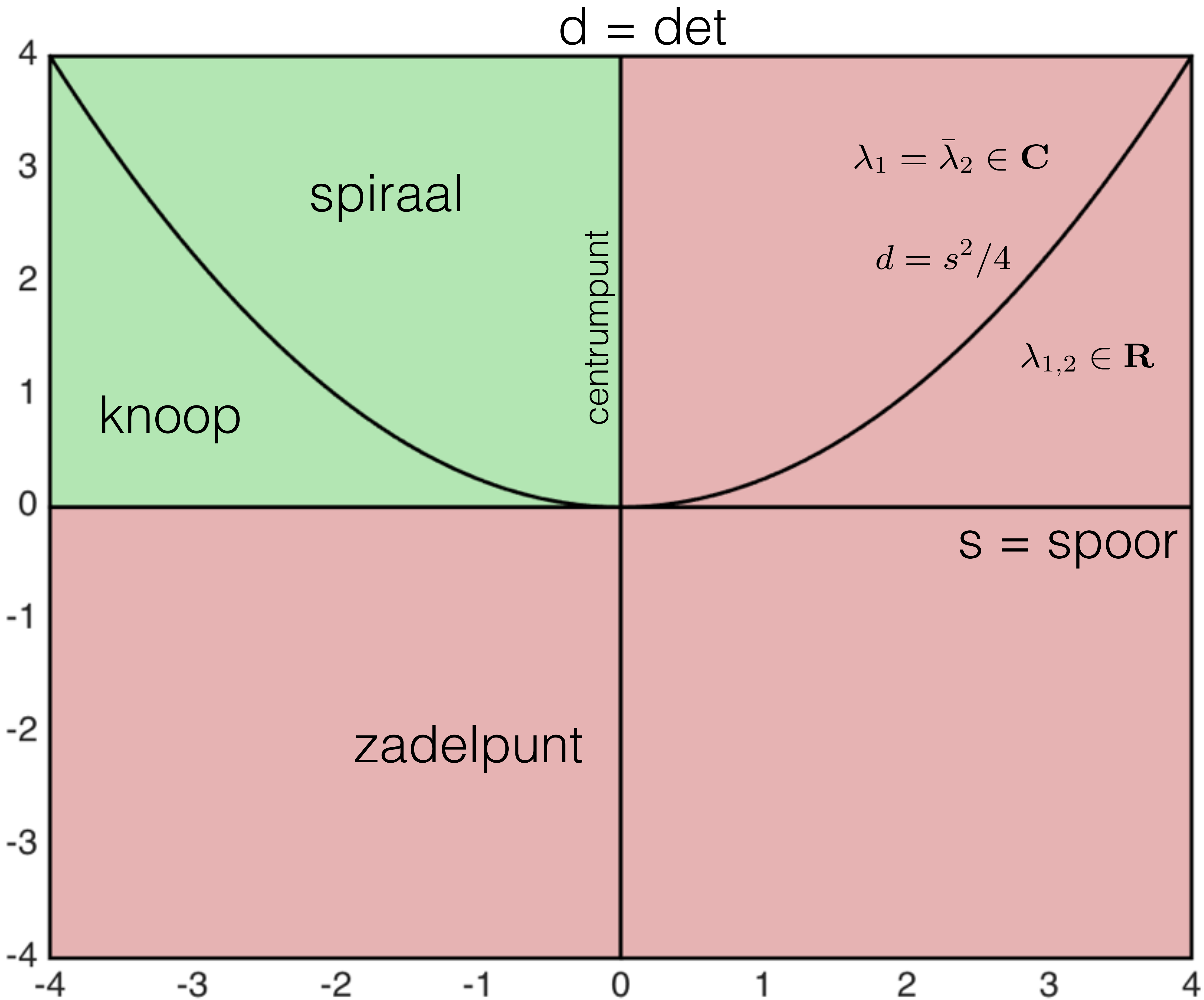
Overzicht van ModSim

Meeste aandacht (t/m 6 apr.)

- Basisbegrippen dynamische modellen
  - Definities recursies, DVs, numerieke methoden
  - Oplossingen DVs
  - Convergentie numerieke methoden
- Dynamica
  - Scalaire dynamica
  - Dynamica op $\mathbf{R}^d$
  - ➡ Lineaire dynamica op $\mathbf{R}^2$
- Bijzondere gevallen
  - Lineaire kansmodellen (Markovketens)
  - Niet-autonome systemen (Resonantie)
  - Hogere orde numerieke methoden

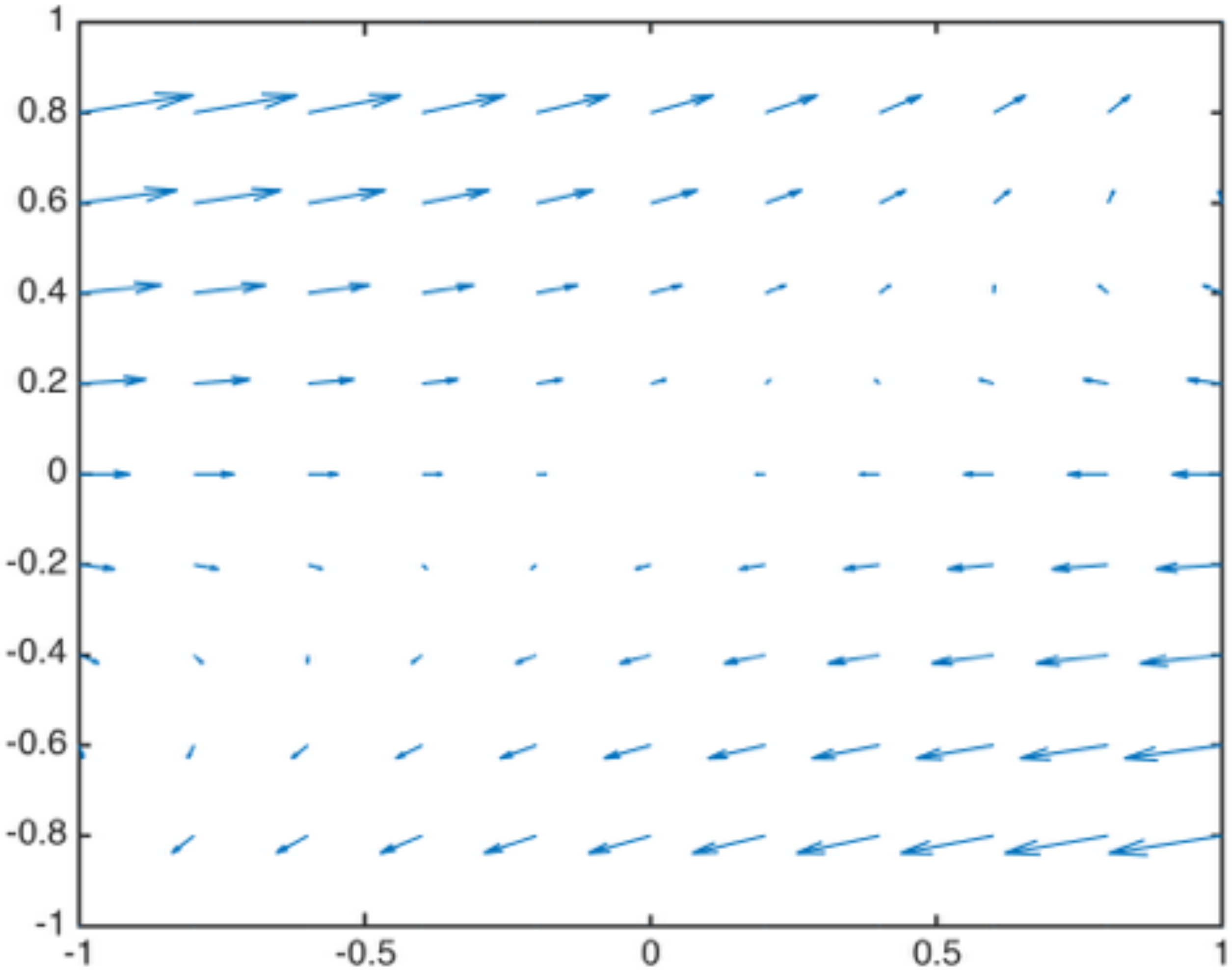
Lineaire Dynamica op $\boldsymbol{R}^2$

- Klassificatie van evenwichten: zadels, knopen, spiralen
- Klassificatie van evenwichten: grensgevallen
- Stelling van Hartman-Grobman
- Faseportretten niet-lineaire DVs
- Stelling Poincaré-Bendixson

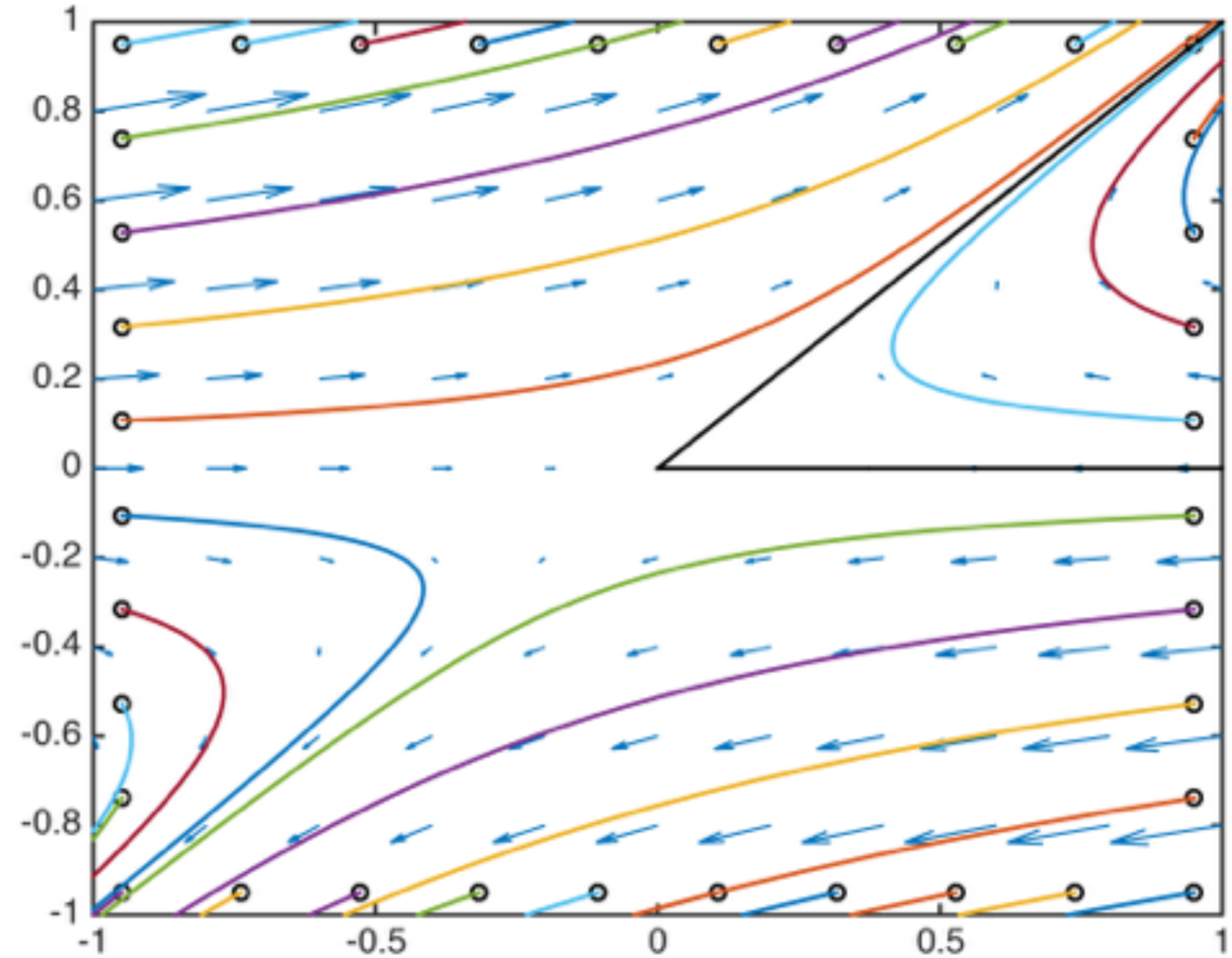

d = det
spiraal
knoop
centrumpunt
$\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 \in \mathbf{C}$
$d = s^2/4$
$\lambda_{1,2} \in \mathbf{R}$
s = spoor
zadelpunt
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4

$$\lambda_1 = -1.5, \;\; \lambda_2 = 0.8 \qquad\qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \;\; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vector Field

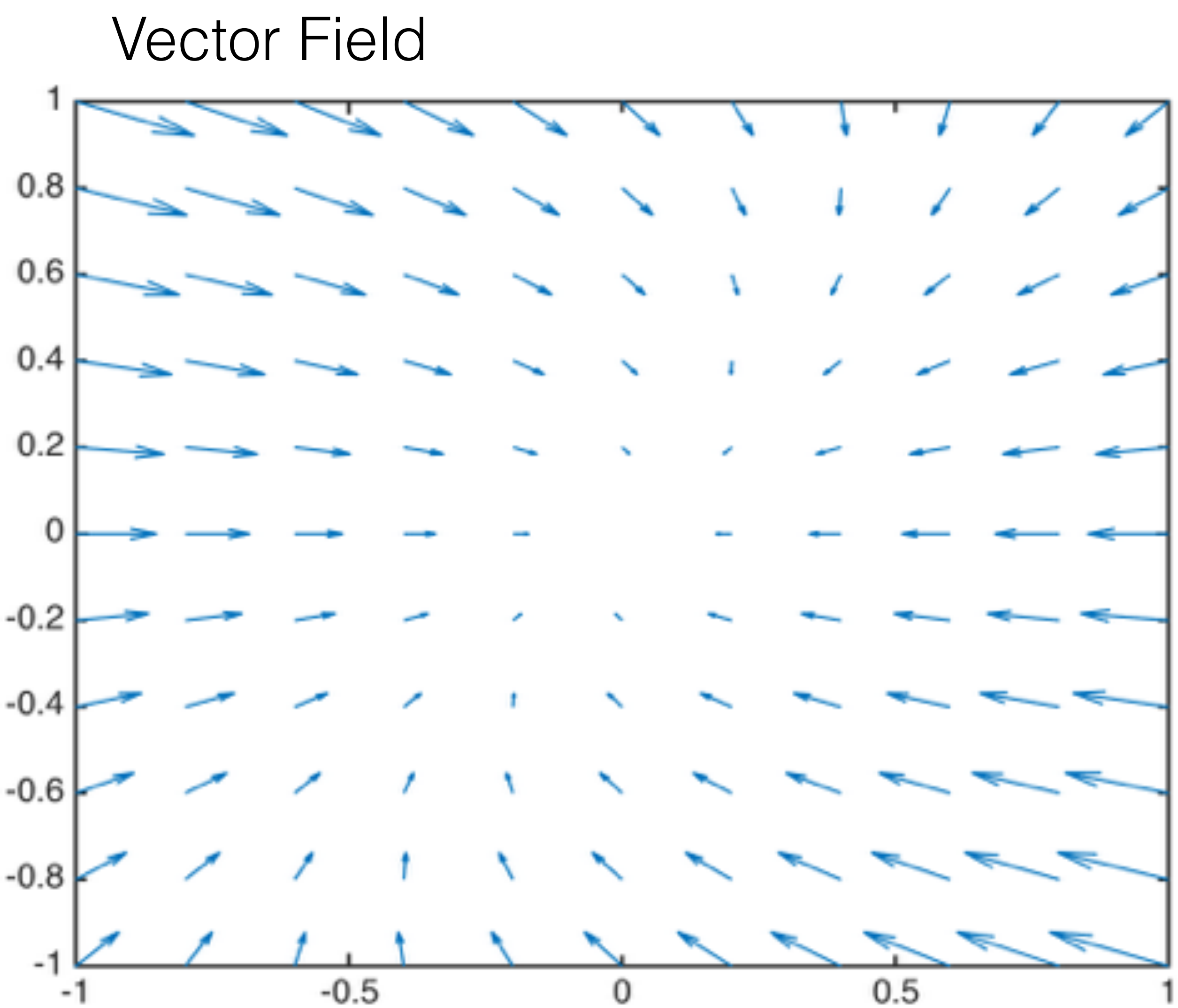


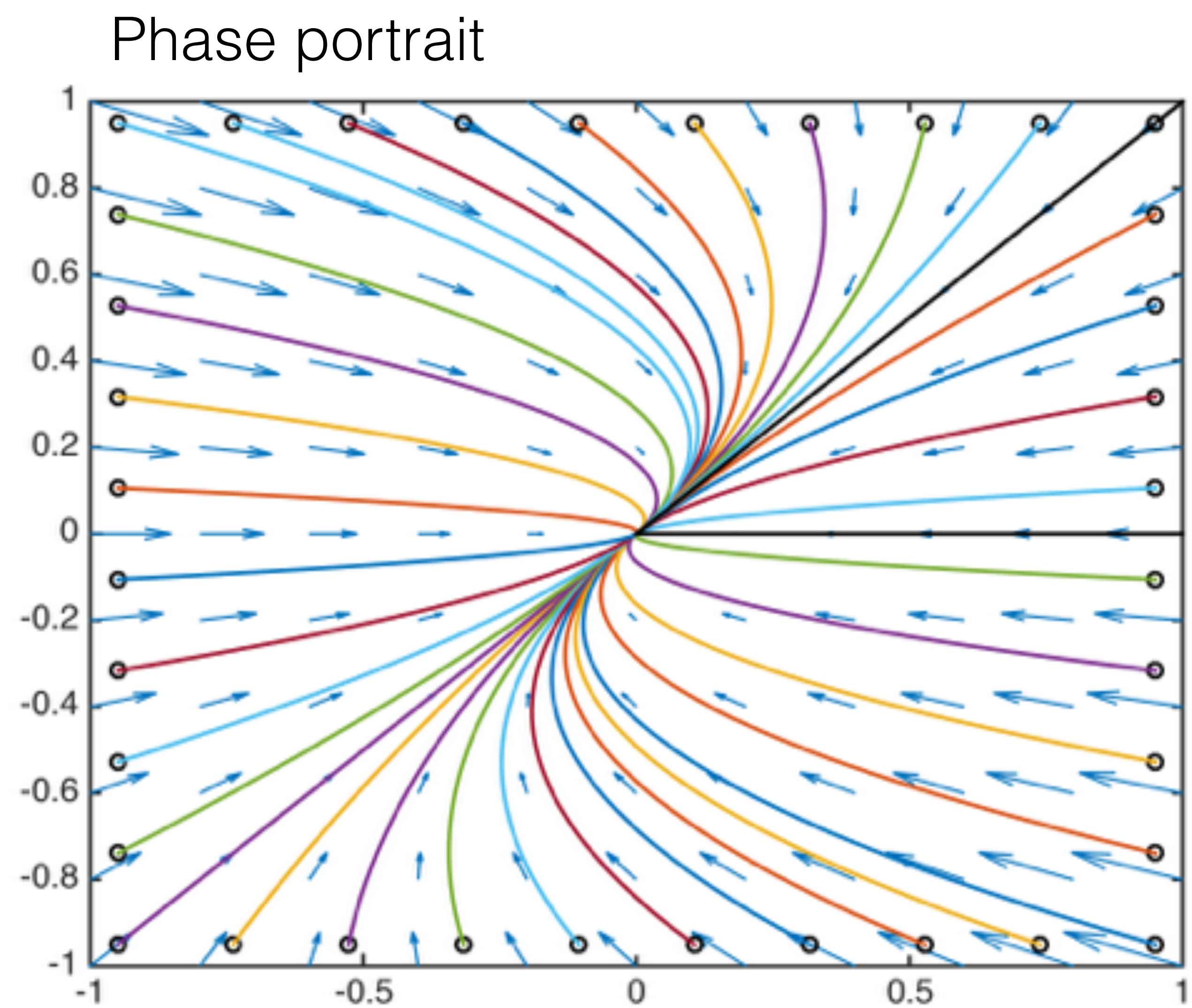
Phase portrait



Saddle point

$$\lambda_1 = -1.5,\ \ \lambda_2 = -0.8 \qquad\qquad v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \ v_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

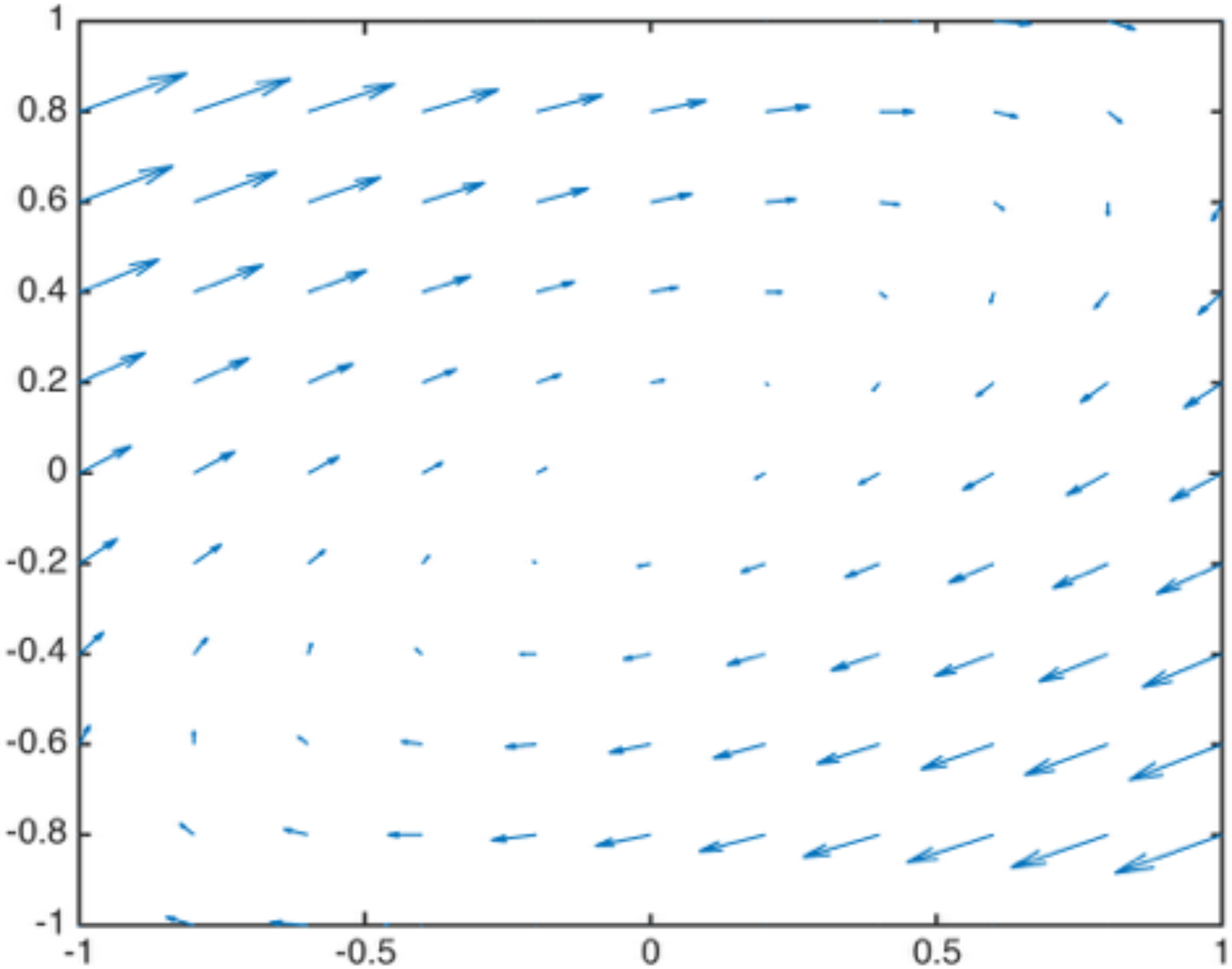




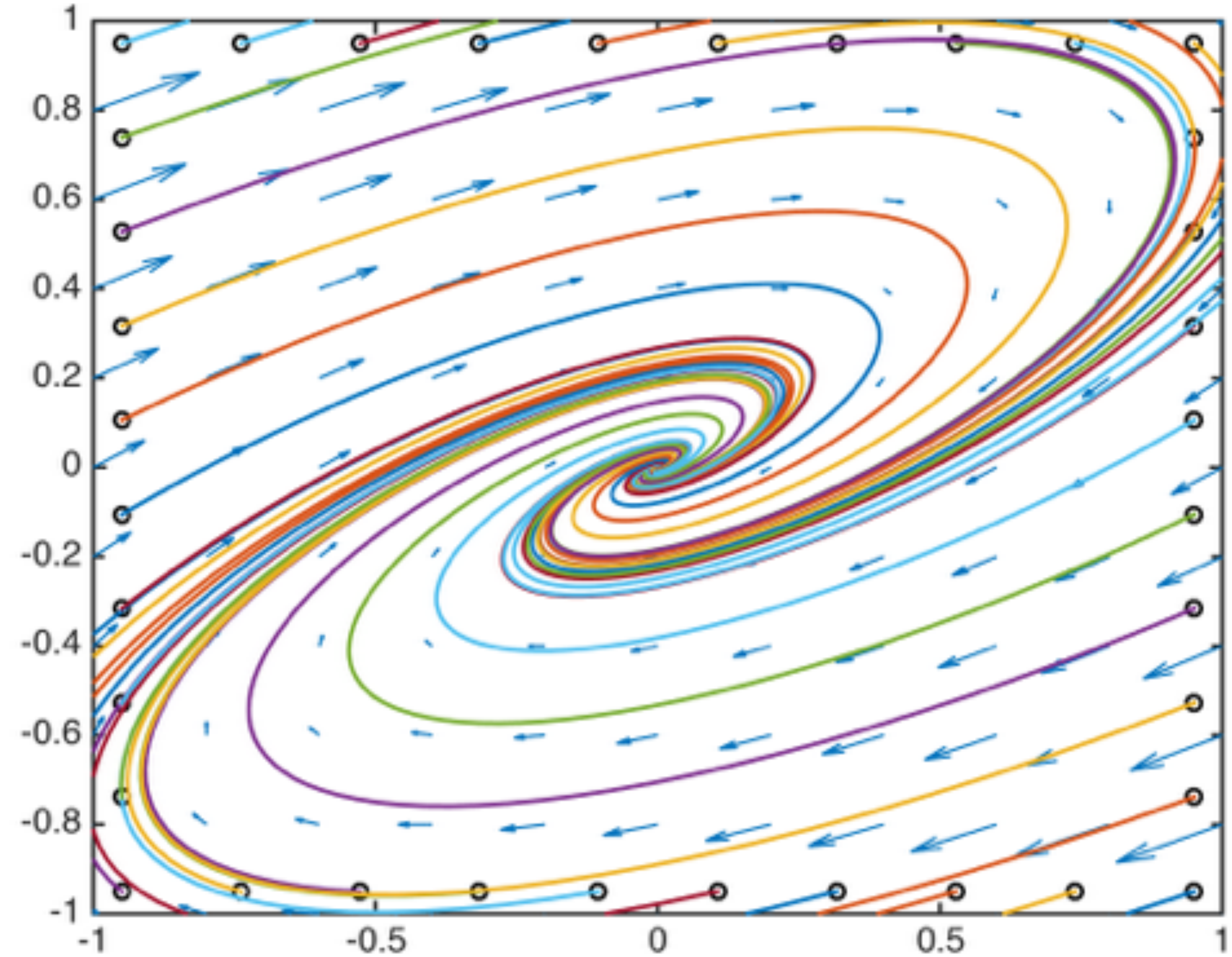
Stable node

$$\lambda_{1,2} = -0.5 \pm 1.0\, i$$

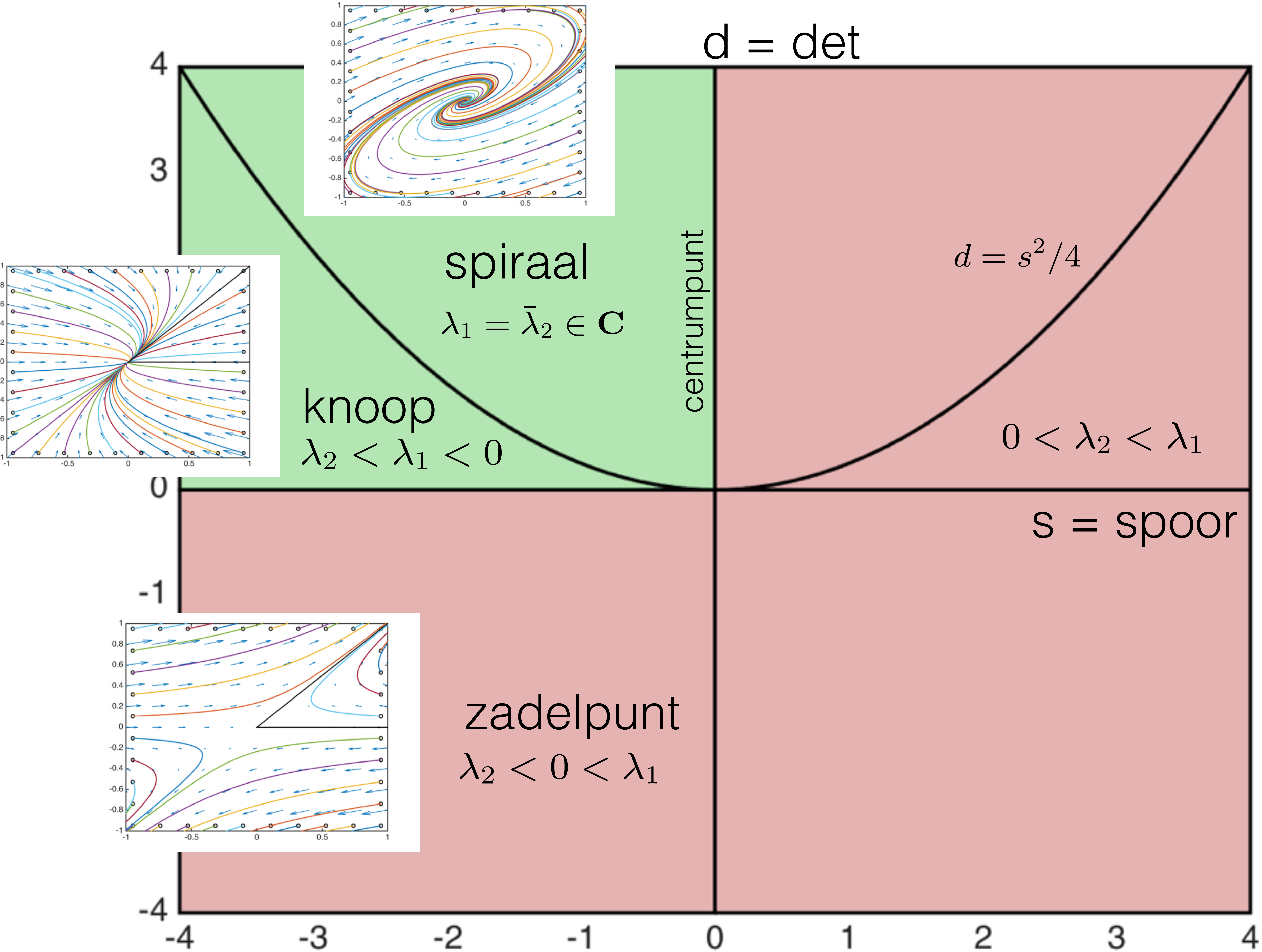
Vector Field



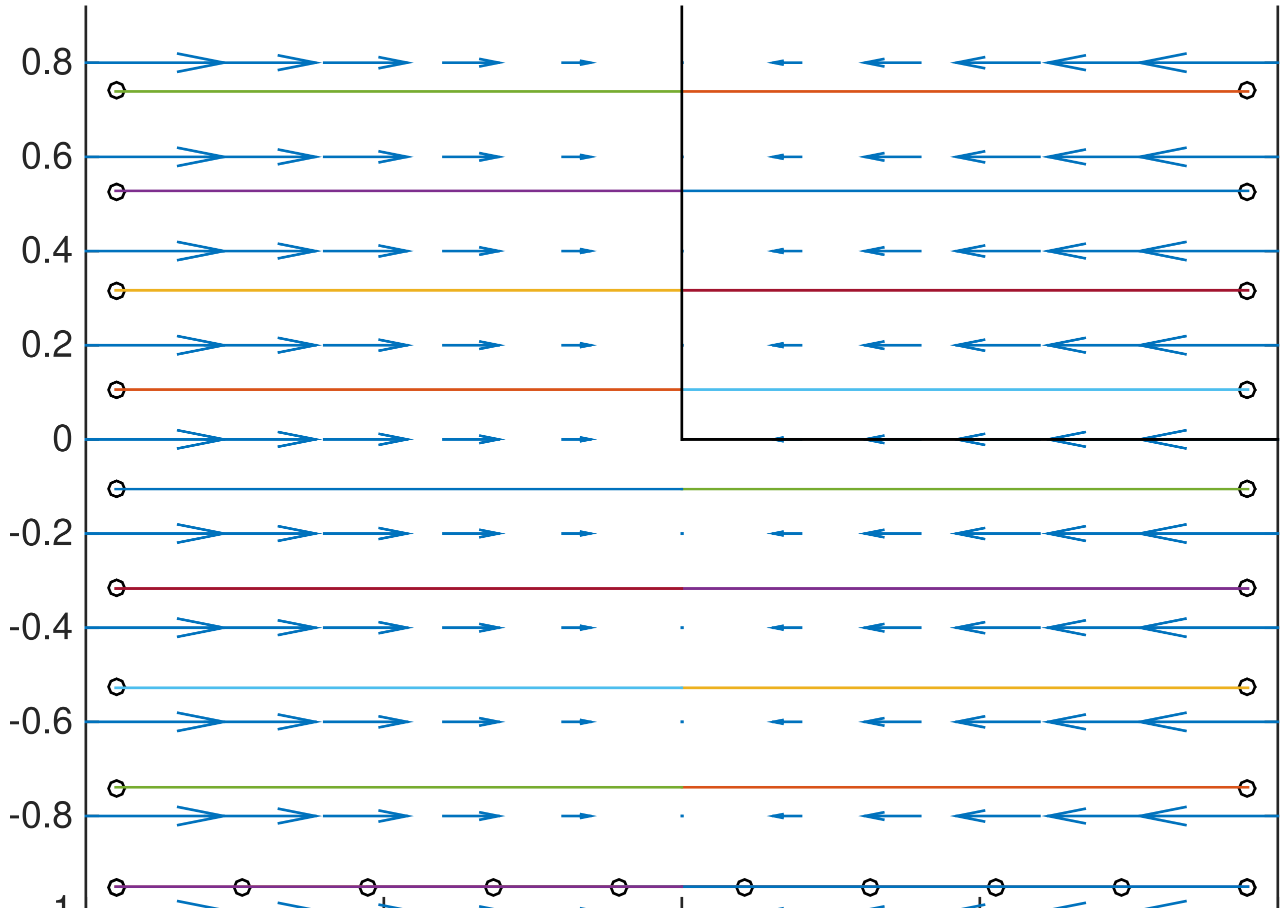
Phase portrait

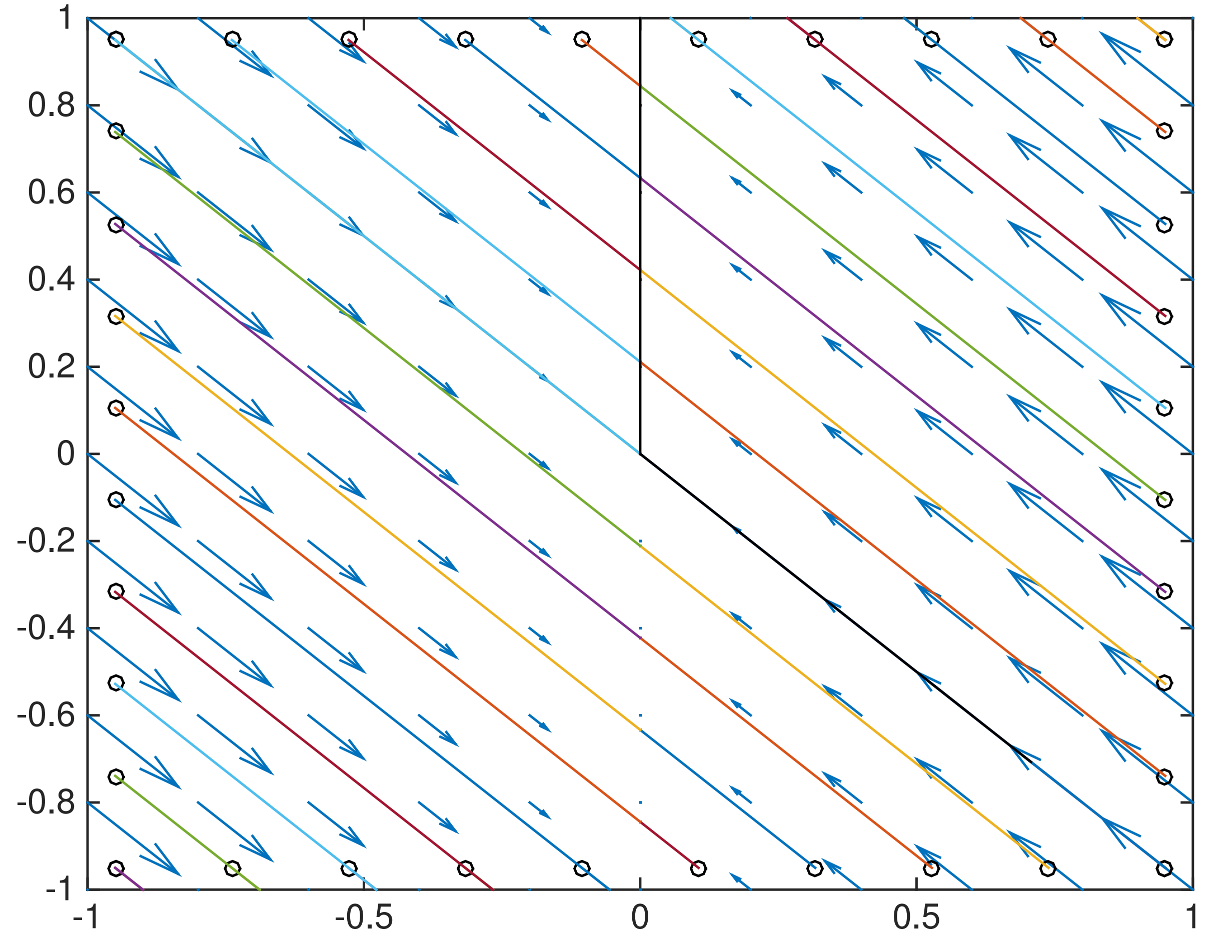


Stable spiral (focus)

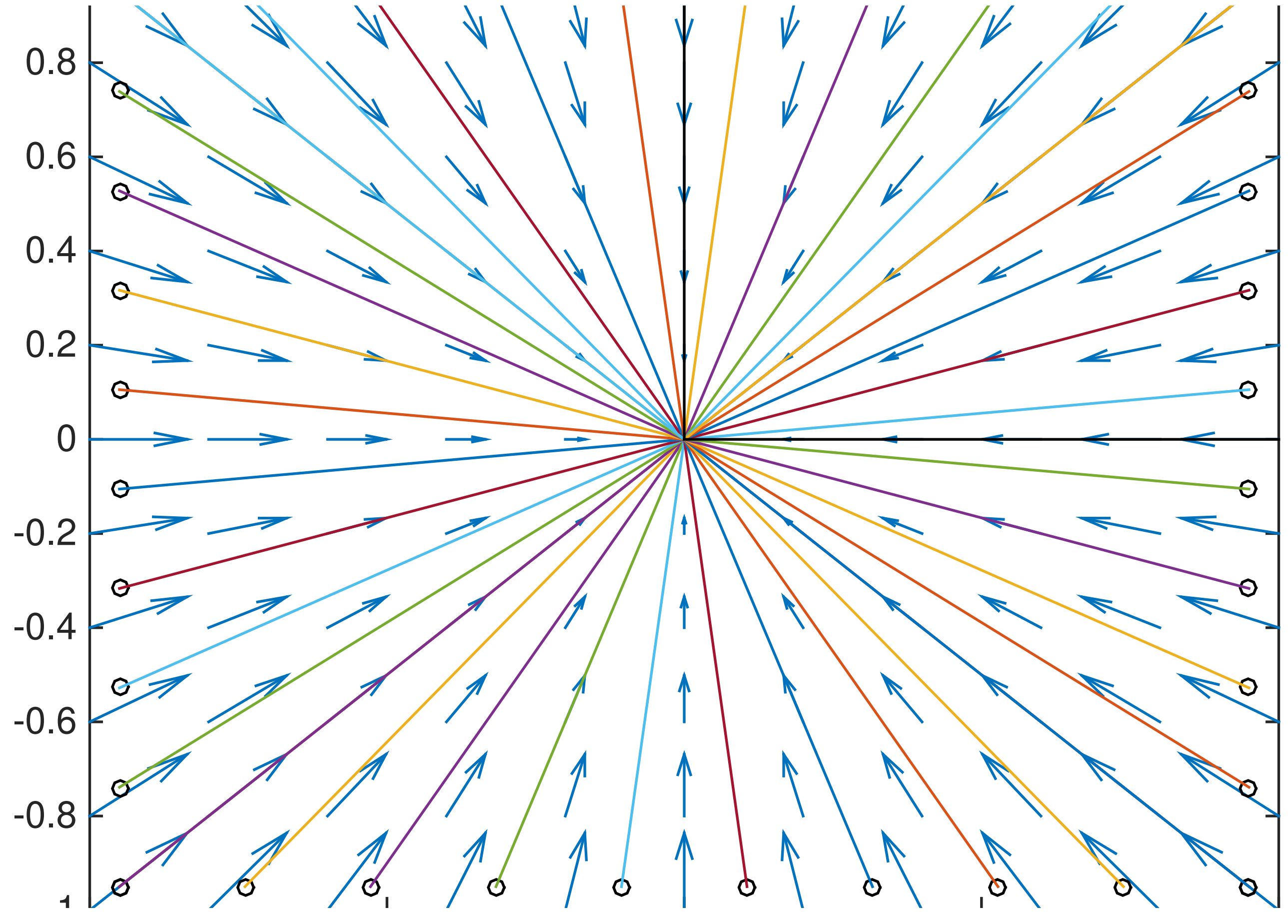


d = det
spiraal
$\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 \in \mathbf{C}$
centrumpunt
$d = s^2/4$
knoop
$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$
$0 < \lambda_2 < \lambda_1$
s = spoor
zadelpunt
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$
4
3
0
-1
-4
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4

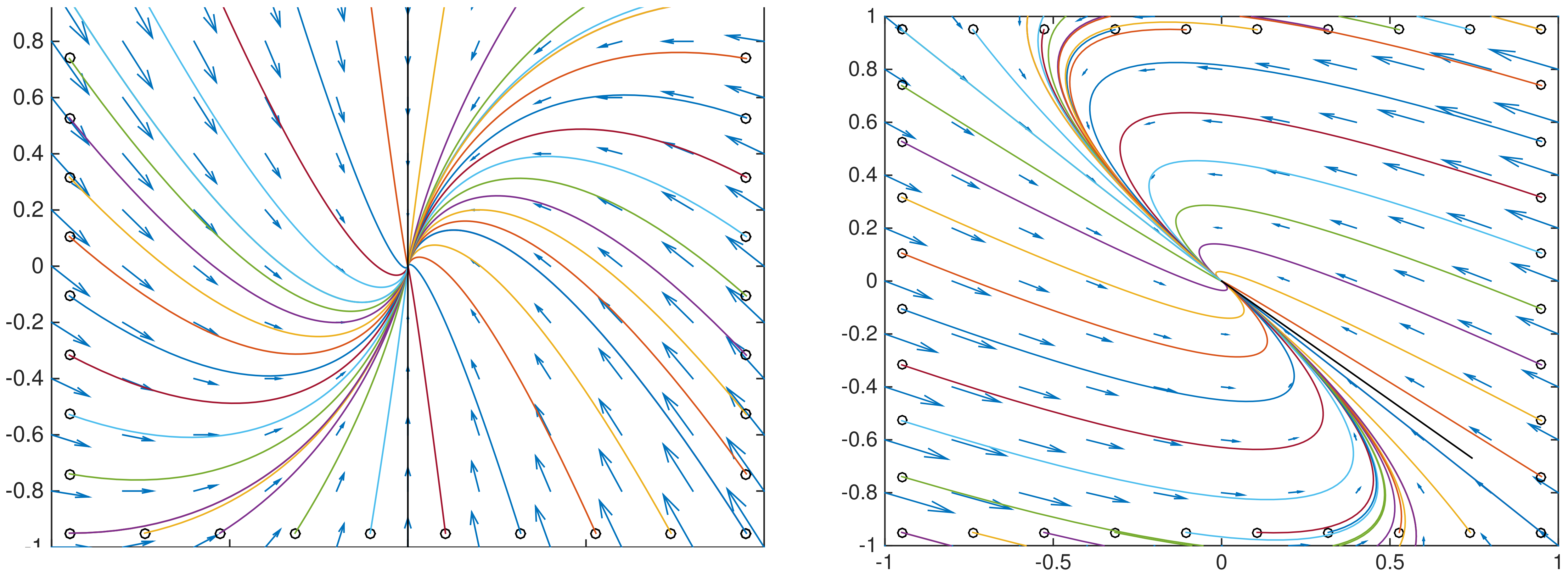




d=0



$d=s^2/4$, case I

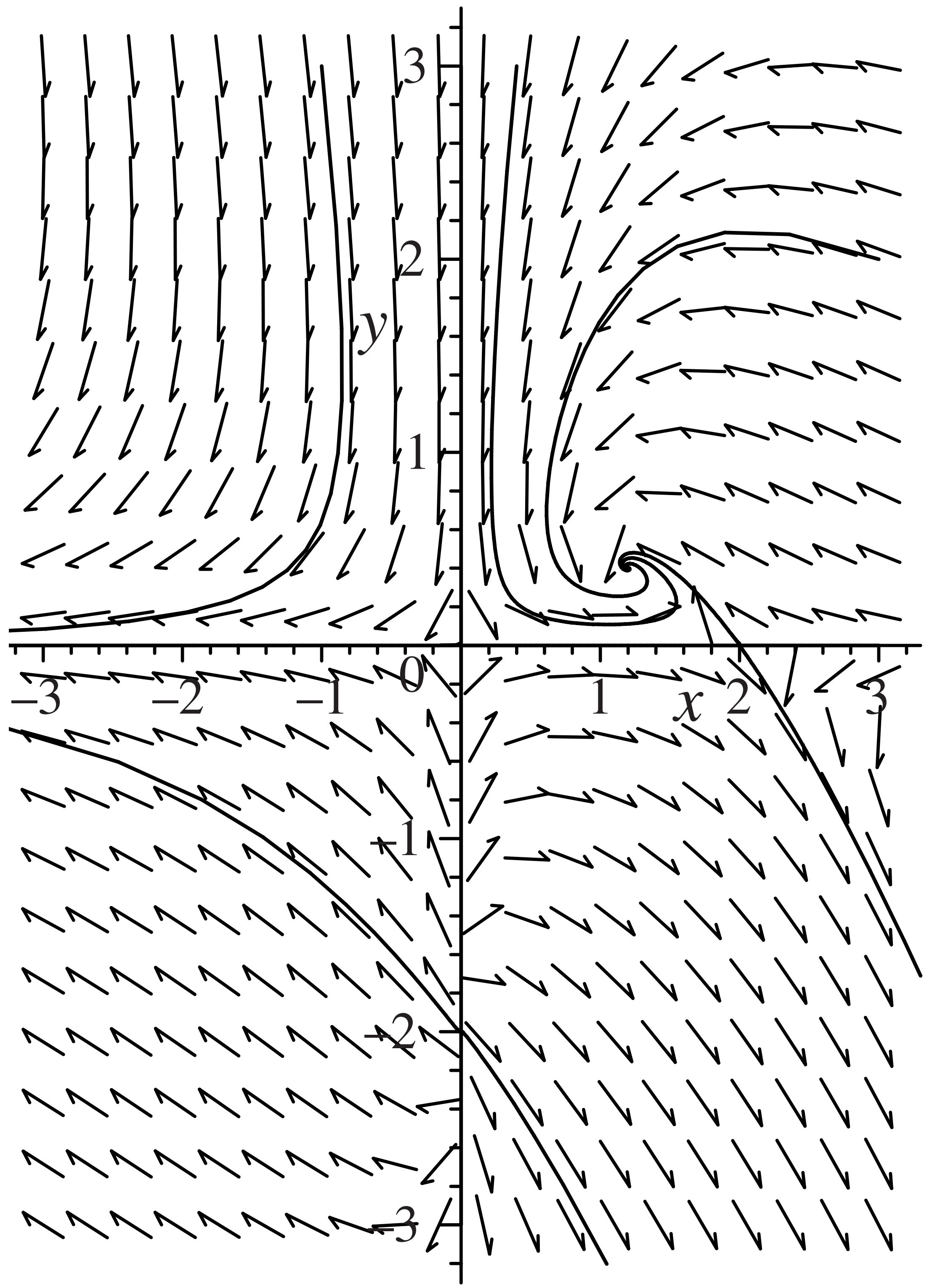


$d=s^2/4$, case II

Stelling van Hartman-Grobman

- Een evenwicht α is *hyperbolisch* als het reële deel van elk eigenwaarde van Df(α) niet nul is.
- Stelling van Hartman: Als α een hyperbolisch evenwicht is, dan is er een gebied rondom het evenwicht waar de faseportret "lijkt op" die van het gelineariseerde stelsel.
- Hiermee kunnen we een aardig indruk krijgen van de fase ruimte van een niet-lineaire DV.

$$\dot{x} = x\left(1 - \frac{x}{2} - y\right), \qquad \dot{y} = y\left(x - 1 - \frac{y}{2}\right)$$



Stelling van Poincare-Bendixson

- Een verzameling $\mathcal{D} \subset \mathbf{R}^d$ is *invariant* als geldt

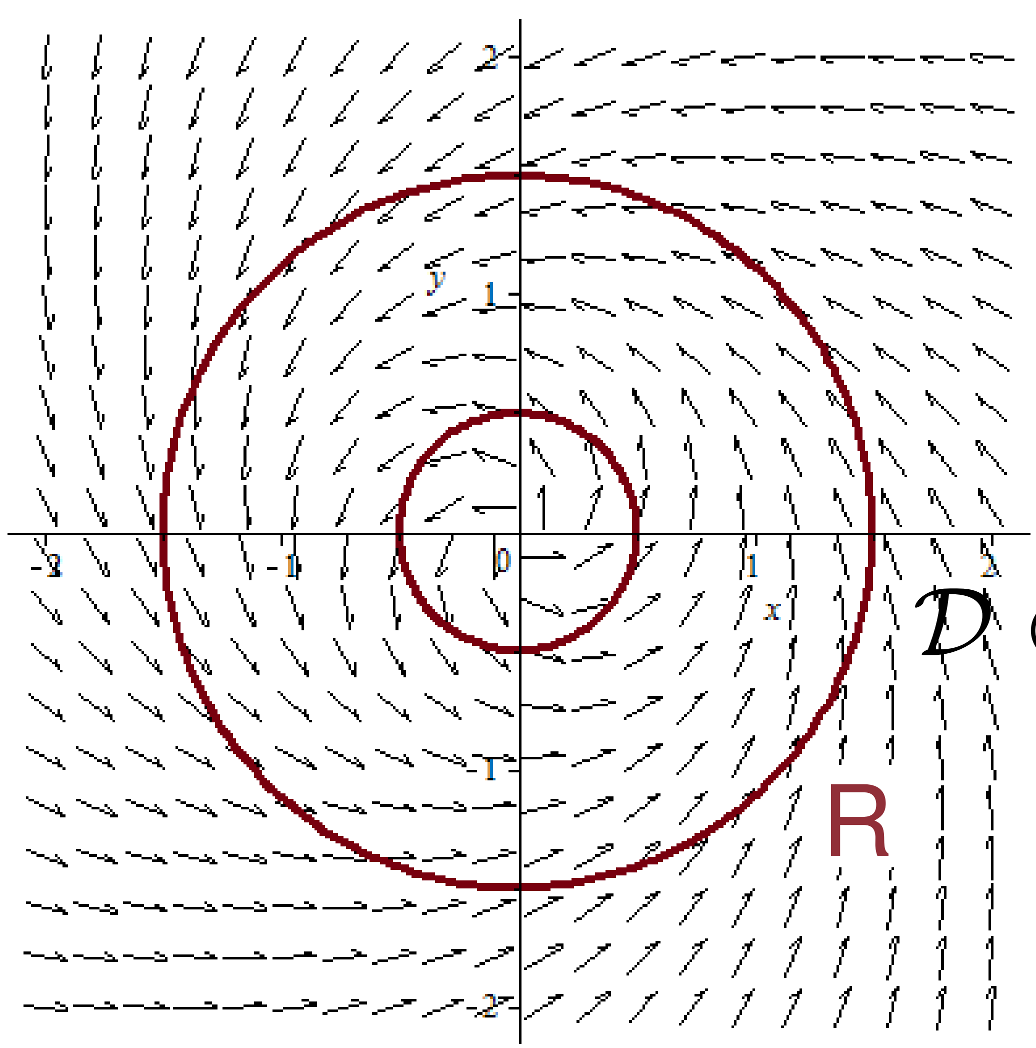
$$y_0 \in \mathcal{D} \quad \Rightarrow \quad y(t) \in \mathcal{D}, \forall t > 0$$

- Stelling Poincaré-Bendixson: als (open) $\mathcal{D} \subset \mathbf{R}^2$ invariant is, en er bevinden zich geen evenwichten erin, dan convergeert de oplossing naar een limietcykel: een periodieke baan die alle ander banen aantrekt.

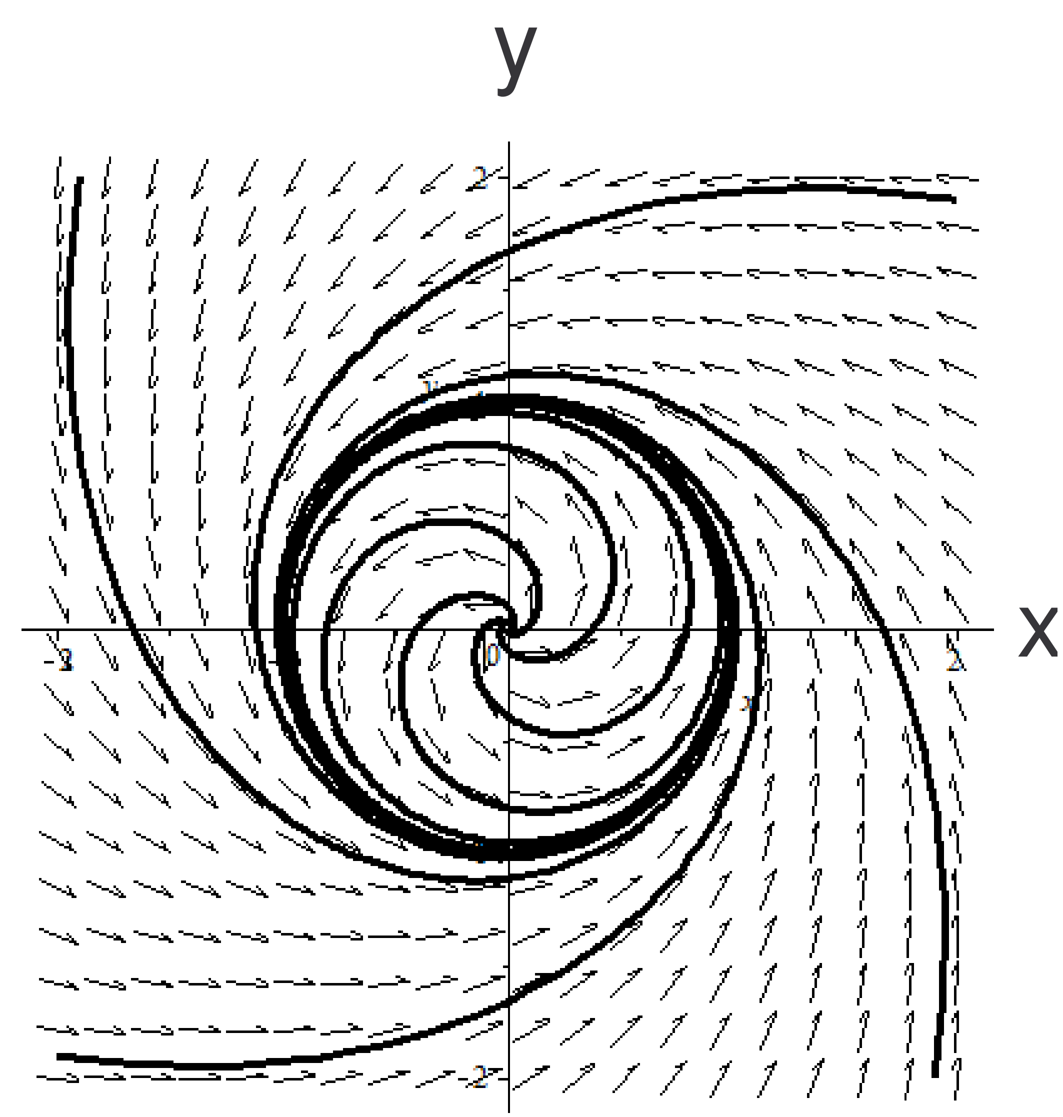
Stelling van Poincare-Bendixson

$$\frac{dx}{dt} = x - y + (-x - y)(x^2 + y^2)$$
$$\frac{dy}{dt} = x + y + (x - y)(x^2 + y^2)$$

$$\frac{dr}{dt} = r(1 - r)(1 + r)$$
$$\frac{d\theta}{dt} = 1 + r^2.$$



$\mathcal{D} \subset \mathbf{R}^2$



Werkcollege voor vandaag

- **Probleem 4.17** Klassificatie evenwichten, faseportretten DVs
- **Probleem 4.18** Toepassing