Middeleeuws Islamitische methoden voor het vinden van de richting van Mekka

J.P. Hogendijk
Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht

In de Nieuwe Wiskrant van augustus 1991 beschrijven F.J. van den Brink en M. Meeder de achtergronden van het nieuwe W12-16 pakket *Mekka* voor klas drie of vier mavo. De auteurs maken duidelijk hoe het probleem van het vinden van de richting van Mekka op allerlei interessante manieren gebruikt kan worden voor (intercultureel) wiskunde onderwijs.
Het behoort tot de religieuze plichten van elke Moslim vijf maal per dag in de richting van Mekka te bidden, preciezer gezegd, in de richting van de Kaaba. Dit is een heiligdom te Mekka, dat op zichzelf geen magische betekenis heeft, maar wel een symbool is voor de centrale positie die God in het leven van de Moslim inneemt. Het vinden van de *qibla*, dat wil zeggen de richting van de Kaaba te Mekka, is in de middeleeuwse Islamitische beschaving steeds onderwerp van studie en discussie geweest, en het probleem is op vele manieren opgelost, met en zonder wiskunde.[1] Al omstreeks het jaar 750 hadden de Moslims een enorm wereldrijk veroverd, dat zich uitstrekte van Spanje tot India. Zo ontstond het probleem de qibla te vinden ook voor zeer ver van Mekka verwijderde plaatsen. In het bijzonder moest bij het bouwen van een nieuwe moskee zeer zorgvuldig over het vinden van de qibla worden nagedacht.

In dit artikel zullen enkele van de gebruikte methoden voor het vinden van de qibla aan de orde komen. Het hier gepresenteerde materiaal is grotendeels gebaseerd op recent historisch onderzoek van D.A. King (Institut für Geschichte der Naturwissenschaften, Frankfurt am Main), en de geïnteresseerde lezer kan in de artikelen van King in de literatuurlijst een schat aan verdere informatie en illustraties vinden.

Eenvoudige methoden

De 'metgezellen' (aṣḥāb) van de profeet, dat wil zeggen de Moslims die de profeet persoonlijk gekend hadden, werden aan de latere generaties vaak tot voorbeeld gesteld vanwege hun grote zuiverheid van karakter. Omdat de metgezellen die te Medina verbleven, naar het zuiden baden, werd hun voorbeeld ook in dit opzicht nagevolgd, ook in plaatsen waar de qibla feitelijk in een heel andere richting lag (bijvoorbeeld Cordoba in Spanje). Hierbij moet gezegd worden dat het volgens sommige wetsgeleerden slechts nodig was, ongeveer naar de richting van Mekka te bidden. Met andere woorden: de intentie was belangrijker dan de precieze wiskundige uitwerking.
Een andere niet-wiskundige methode werd in Samarkand gebruikt. Omdat de weg van Samarkand naar Perzië eerst in westelijke richting liep, en men via Perzië naar Mekka trok, namen sommigen in Samarkand als qibla het westen aan.

De kaaba als naaf van de wereld

In een aantal middeleeuws Arabische werken over aardrijkskunde werd de Kaaba als midden van de wereld gezien, en de (bewoonde) wereld werd in een aantal zones opgedeeld (in figuur 1 zijn 12 zones getekend).

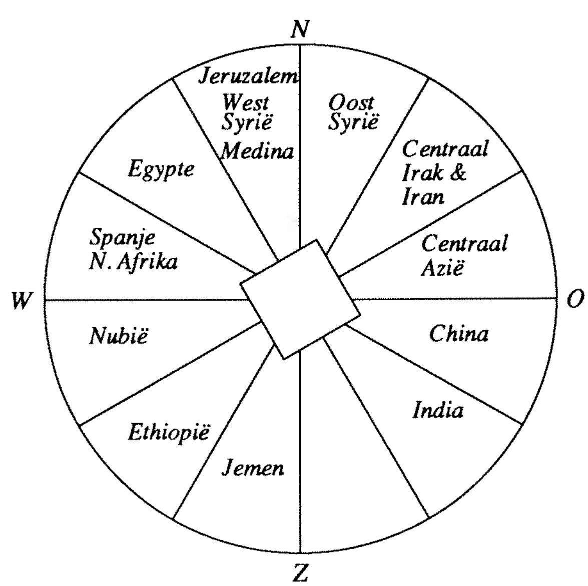


fig. 1

De qibla werd als in het volgende voorbeeld door een symmetrieargument bepaald. Stel men kijkt vanaf de

Kaaba in de richting van de zone van Irak, en men ziet in die richting een bepaalde ster uit de Tweelingen opgaan. Wie in Irak naar de Kaaba wil bidden, moet zorgen dat de plaats waar die ster opgaat precies achter hem ligt.[2]

Dit systeem berust deels op het feit dat de Kaaba (net als vele andere bouwwerken uit de oudheid) zelf astronomisch georiënteerd is. Dit was aan de Islamitische geleerden bekend. De Kaaba is een rechthoekig gebouw, waarvan de grote as naar het punt aan de zuidoostelijke horizon wijst waar de ster Canopus opgaat (dit is een ster, die in onze breedten nooit zichtbaar is, maar in Mekka wel boven de zuidelijke horizon uitkomt); en de geleerden namen aan dat de korte as wijst naar het punt in het noordoosten waar de zon op de langste dag opgaat, en dus ook naar het punt in het zuidwesten waar de zon op de kortste dag ondergaat.[3]

Lengte- en breedtegraden

In de achtste eeuw kwamen de Islamitische geleerden in contact met de wiskunde en sterrenkunde uit Perzië en India, en vanaf de negende eeuw werden ook de (moeilijke) Griekse werken op dit gebied in het Arabisch vertaald. Vanaf die tijd werden wiskundige methoden ontwikkeld voor het vinden van de qibla. Al deze methoden gaan uit van de bolvorm van de aarde, en ze gebruiken plaatscoördinaten *lengte* en *breedte*. Deze waren in de oudheid ingevoerd in de *Geografie* van Ptolemaeus van Alexandrië (ca. 150 n. Chr.). De geografische breedte van Ptolemaeus is dezelfde als de onze, met dien verstande dat de breedte van Ptolemaeus vrijwel altijd noorderbreedte is; over het zuidelijk halfrond was destijds zeer weinig bekend.

De *lengte* van Ptolemaeus werd gemeten vanaf de Canarische Eilanden (het meest westelijke punt van de toen bekende wereld), en daarom is de *lengte* van Ptolemaeus ca. 15° groter dan de moderne oosterlengte. De bekende wereld strekte zich niet verder dan China uit, en dus kwamen plaatsen met lengte groter dan 180 graden bij Ptolemaeus niet voor.

De *Geografie* werd in het begin van de negende eeuw in het Arabisch vertaald. Helaas kwamen niet alle in de Islamitische wereld belangrijke plaatsen erin voor (sommige bestonden nog niet eens in de tijd van Ptolemaeus), en de coördinaten die er wel in voorkwamen waren niet alle nauwkeurig. In het begin van de negende eeuw werd in Bagdad een groot onderzoeksprogramma gestart, met als doel onder meer het bepalen van de coördinaten van vele belangrijke plaatsen in de Islamitische wereld. Dit programma stond onder de bezielende leiding van het toenmalige staatshoofd Kalief al-Ma'mūn, die veel interesse in exacte wetenschappen had, en zich zelf bezighield met het beoordelen van de metingen.

De geografische breedte kan gemakkelijk bepaald worden; hij is ruwweg gelijk aan de hoogte van de poolster.[4]

Overdag bepaalde men de breedte ϕ uit de maximale hoogte van de zon $90° - \phi + \delta$, waarbij δ de declinatie van de zon is, dat is de afstand (in booggraden) van het middelpunt van de zon naar de hemelequator. De declinatie kan gemakkelijk worden berekend op basis van de lengte λ van de zon in de dierenriem, door middel van de formule $\sin \delta = \sin \lambda \sin \varepsilon$,[5] waarin ε de hoek is tussen de hemelequator en de dierenriem. Tegenwoordig is deze 23° 27′; Ptolemaeus gebruikte $\varepsilon = 23° 51'$; de astronomen van Kalief al-Ma'mūn vonden de (nauwkeuriger) waarde $\varepsilon = 23° 35'$.

Omdat wij een zonnekalender gebruiken, kunnen wij λ voor elke dag van het jaar gemakkelijk uit het hoofd schatten.[6]

Het was veel moeilijker de geografische lengte te bepalen, preciezer gezegd, het lengteverschil tussen twee gegeven plaatsen. Hiervoor waren in de oudheid en middeleeuwen slechts twee methoden beschikbaar. De eerste methode was de afstand tussen de twee plaatsen (in oost-westelijke richting) te meten of te schatten op basis van gegevens van reizigers (bijvoorbeeld aantallen dagreizen tussen de twee plaatsen). Om deze afstand om te zetten in een geografisch lengteverschil moest men de omtrek van de aarde weten. Hiervoor had men in de oudheid al een schatting gegeven, maar de precieze lengte-eenheid waarin de omtrek was uitgedrukt was niet bekend aan de Arabische vertalers. Daarom liet de al eerder genoemde Kalief al-Ma'mūn twee expedities vertrekken vanuit een punt midden op een grote vlakte in Noord Irak in de buurt van Mosul. De ene expeditie reisde naar het zuiden, en de tweede naar het noorden, net zolang tot de geografische breedte (gemeten aan de hoogte van de zon) één graad kleiner respectievelijk groter geworden was dan die van het uitgangspunt. Ondertussen werd de afgelegde afstand nauwkeurig bijgehouden (waarschijnlijk met behulp van eenvoudige landmeetkundige instrumenten). Daarna keerden de expedities naar het punt van uitgang terug, en de gemeten afstanden werden vergeleken.

Op basis hiervan concludeerde men dat één breedtegraad met ofwel 56 ofwel $56\frac{2}{3}$ mijl[7] overeenkomt (1 mijl was 4000 el; 1 el ≈ 50 cm, dus 1 mijl ≈ 2 km.) Dus komt 1 lengtegraad overeen met circa $56 \cos \phi$ mijl, waarin ϕ de geografische breedte is.

De tweede methode voor het bepalen van het lengteverschil berustte op het gelijktijdig observeren van één maansverduistering[8] op twee verschillende plaatsen. De data waarop maansverduisteringen zouden plaatsvinden konden met methoden uit de *Almagest* van Ptolemaeus, het standaardwerk over Griekse astronomie, nauwkeurig worden voorspeld. Wanneer een maansverduistering plaatsvond, bepaalden de astronomen op beide plaatsen de lokale tijd van het begin of einde van de maansverduistering (in astronomische uren voor of na middernacht), en hieruit het tijdsverschil. Elk uur tijdsverschil komt overeen met 15 graden lengteverschil. Voor deze

methode was veel georganiseer nodig, maar toch was ze voor grotere afstanden de enige min of meer betrouwbare. In de negende eeuw werd op deze wijze het lengteverschil tussen Bagdad en Mekka bepaald,[9] met als uitkomst 3°. De werkelijke waarde is 4° 46′.
Er zijn in de middeleeuwen talloze astronomische tabellenboeken samengesteld, en elk handboek bevat een tabel met plaatscoördinaten voor (meestal ongeveer honderd) plaatsen. Van al deze coördinaten is door E.S. en M.H. Kennedy een database opgesteld, die door het Institut für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften te Frankfurt am Main is gepubliceerd (zie de literatuurlijst). Het blijkt dat de geografische breedten meestal met een fout van maximaal 1° bekend waren. Wanneer in een stad een goede astronoom was, leidde dit vaak tot een nauwkeuriger waarde (met een fout van minder dan 10 boogminuten). De lengteverschillen waren veel onnauwkeuriger, fouten van enkele graden zijn niet ongewoon.
We nemen nu aan dat we over de volgende drie gegevens beschikken: De geografische breedte ϕ_P van de plaats P waar wij ons bevinden, de geografische breedte ϕ_M van Mekka, en het lengteverschil $\Delta\lambda$ tussen de plaats waar wij ons bevinden en Mekka. $\Delta\lambda$ wordt voor plaatsen ten oosten en voor plaatsen ten westen van Mekka positief genomen. Voor ϕ_M wordt in de meeste middeleeuwse handschriften 21° of 21° 40′ opgegeven (de correcte waarde is 21° 26′). We noteren $\Delta\phi = |\phi_P - \phi_M|$.

Benaderingsmethoden voor het bepalen van de qibla

Vanaf de negende eeuw zijn er diverse eenvoudige methodes ontwikkeld, waarmee goede benaderingen van de qibla kunnen worden gevonden. We noemen er hier twee; een benaderende berekening en een benaderende meetkundige constructie.
Deze methoden en de exacte methoden uit het volgende hoofdstukje leveren als uitkomst altijd een hoek, die de 'afwijking van de qibla' (Arabisch: inḥirāf al-qibla) heet, en die wij met q zullen noteren. Dit is de hoek tussen de qibla en het zuidpunt aan de horizon. De qibla kan westelijk of oostelijk van het zuiden liggen, al naar gelang P ten oosten of ten westen van Mekka ligt.
De eerste methode (die door de astronomen van Kalief al-Ma'mūn gebruikt werd) gaat er vanuit, dat de aarde voor plaatsen niet al te ver van Mekka bij benadering als een plat vlak kan worden beschouwd.
Figuur 2 is een kaart van zo'n stukje plat vlak, met lengtegraden en breedtegraden (de lengtegraden zijn cos ϕ_M maal zo lang als de breedtegraden). De hoek q werd nu bepaald via een methode, die door de figuur wordt aangegeven (voor $\Delta\lambda = 4°$, $\Delta\phi = 3°$), en op de volgende formule neerkomt:

$$\tan q = \frac{\Delta\lambda \cos\phi_M}{\Delta\phi}.$$

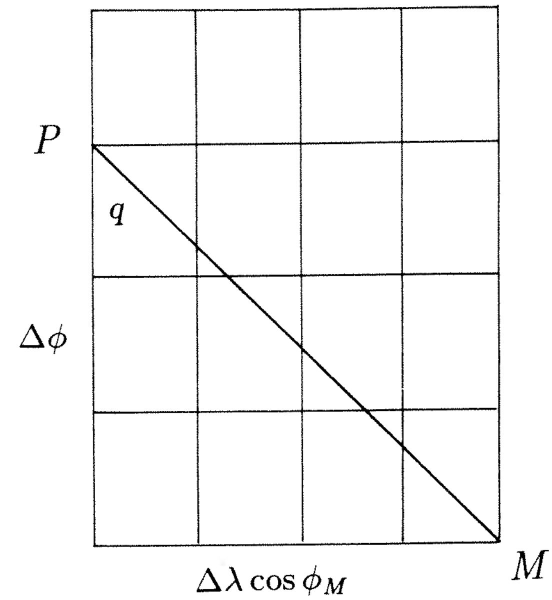


fig. 2

Deze methode gaf goede resultaten voor het Midden oosten. De formule is enigszins misleidend omdat tangens-tabellen in de negende eeuw nog niet algemeen verspreid waren. Men berekende daarom uit tan q eerst sin q en kon dan q uit de sinustabel terugzoeken.[10]
Voor P_1 = Bagdad, ten oosten van Mekka ($\Delta\lambda = 4° 37′$, $\phi_P = 33° 20′$) geeft de methode $q_1 = 19° 48′$ (naar het westen), voor P_2 = Utrecht, ten westen van Mekka ($\Delta\lambda = 34° 42′$, $\phi_P = 52° 6′$) geeft de methode $q_2 = 46° 48′$ (naar het oosten).

De tweede methode is meetkundig (figuur 3).

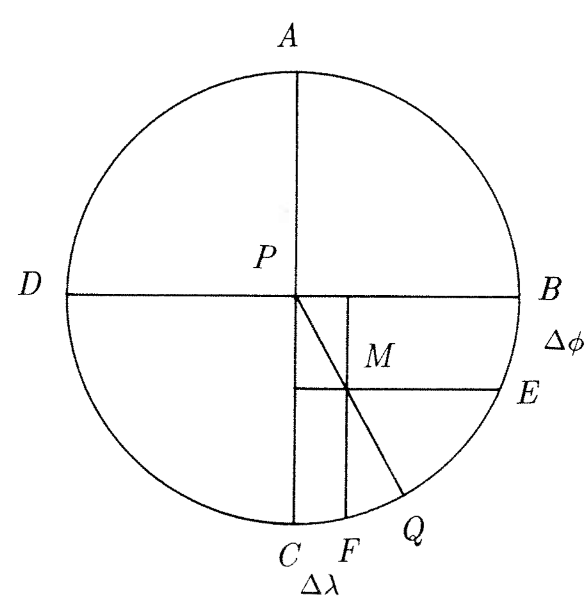


fig. 3

We nemen een in 360 graden verdeelde cirkel met middelpunt P, die door twee loodrechte lijnen AC en BD in

vier kwadranten verdeeld is. Hierbij is A het noorden, B het oosten, C het zuiden en D het westen. Als P ten noordwesten van Mekka ligt, zetten we op het gedeelte rechts onder vanaf punt B de horizontale lijn, een boog $BE = \Delta\phi$ af, en vanaf punt C op de verticale lijn een boog $CF = \Delta\lambda$, als in figuur 3. We trekken door E een lijn evenwijdig aan BD en door F een lijn evenwijdig aan AC; deze twee lijnen snijden elkaar in M. We trekken PM en verlengen hem tot hij de in graden verdeelde cirkel in Q snijdt. Lijn PQ geeft de richting van de qibla aan, en de 'afwijking van de qibla' is boog CQ. Voor plaatsen ten noordoosten van Mekka zetten we $\Delta\phi$ vanaf D af op boog DC, en $\Delta\lambda$ vanaf C op boog CD, enz.
Voor P_1 = Bagdad en P_2 = Utrecht geeft de methode respectievelijk $q_1 = 21° 16' W$. en $q_2 = 48° 25' O$.

Een exacte methode voor het bepalen van de qibla

Het heeft enige tijd geduurd voordat men in de Islamitische wiskunde de qibla op exacte manier uit $\Delta\lambda$, ϕ_M en ϕ_P kon bepalen. In de negende eeuw werden de eerste methoden gevonden, maar deze waren tamelijk omslachtig. We bespreken hier een methode die vanaf de tiende eeuw veel gebruikt werd, en als 'methode van de astronomische handboeken' (Arabisch: ṭarīq al-azyāj, van zīj = astronomisch handboek) bekend stond. Voor het gemak geven we alle stappen in moderne notatie en in de moderne sinus en cosinusfuncties weer. Verder gebruiken we het begrip 'hoek' in een boldriehoek, hetgeen in die tijd nog niet algemeen werd gebruikt. Door deze wijzigingen verandert er niets wezenlijks aan de methoden.
We beschouwen in figuur 4 de aardbol: N is de noordpool, M is Mekka en P is de plaats waar wij ons bevinden. We verbinden deze punten door bogen van grootcirkels (dat zijn cirkels waarvan het middelpunt met het middelpunt van de bol samenvalt).

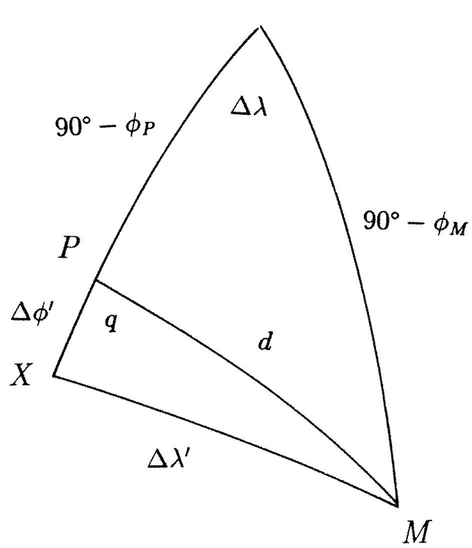


fig. 4

We kunnen nu het probleem formuleren als een probleem over deze boldriehoek MNP.
Gegeven zijn $\angle MNP = \Delta\lambda$, boog $NM = 90° - \phi_M$, boog $NP = 90° - \phi_P$. Gevraagd $\angle MPN = 180° - q$.

Dit probleem wordt opgelost door toepassing van twee regels voor een rechthoekige boldriehoek, die we eerst zullen afleiden.

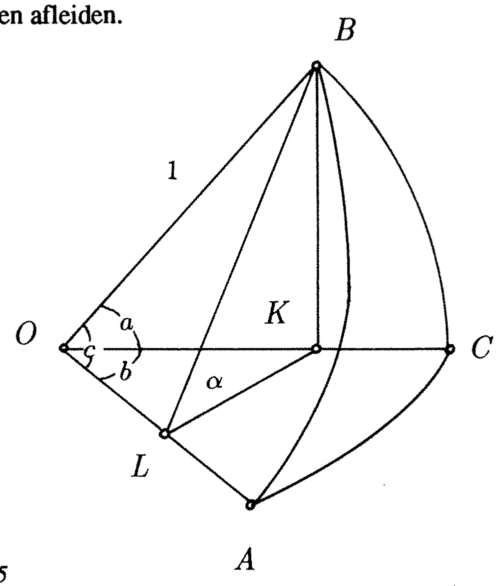


fig. 5

In figuur 5 is O het middelpunt van een bol en ABC is een boldriehoek met $\angle C = 90°$. Noteer de zijden van de boldriehoek als $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ (deze worden in graden gemeten) en de hoeken $\alpha = \angle A$, $\beta = \angle B$, $\gamma = \angle C$.

We verbinden O met A, B en C. Nu is ook $a = \angle BOC$, $b = \angle COA$, $c = \angle AOB$, en verder is α de hoek tussen de vlakken BOA en COA, en γ (= 90°) de hoek tussen de vlakken BOC en AOC. We laten uit B een loodlijn BK op OC neer en een loodlijn BL op OA. Met enig denkwerk is in te zien dat OA loodrecht staat op LK. Hieruit volgt $\alpha = \angle BLK$.

Stellen we de straal van de bol 1, dan is $BK = \sin a$, $BL = \sin c$. Verder $\frac{BK}{BL} = \sin\alpha$. Dus

(1) $\sin\alpha = \dfrac{\sin a}{\sin c}$.

Ook $OL = \cos c$, $OK = \cos a$ en $\frac{OL}{OK} = \cos b$.
(2) Dus $\cos c = \cos a \cos b$.
Voor later gebruik merken we het volgende op:
$\cos\alpha = \frac{KL}{BL}$, $\tan b = \frac{KL}{LO}$ en $\tan c = \frac{BL}{LO}$, dus

(3) $\cos\alpha = \dfrac{\tan a}{\tan b}$,

$\tan\alpha = \frac{BK}{KL}$, $\tan a = \frac{BK}{KO}$ en $\sin b = \frac{KL}{KO}$, dus

(4) $\tan\alpha = \dfrac{\tan a}{\sin b}$.

We keren nu terug naar figuur 4. Uit M trekken we een boog van een grootcirkel MX waarbij X op NP of het verlengde daarvan ligt en $\angle NXM = 90°$. We noteren boog $MX = \Delta\lambda'$[11] en boog $PM = d$. Stel ϕ' is de geografische breedte van X, dan is boog $NX = 90° - \phi'$. We stellen $\Delta\phi' = \phi_P - \phi'$. We berekenen nu achtereenvolgens[12] $\Delta\lambda'$, ϕ', d en q door toepassing van (1), (2), (2) en (1):

(5) $\sin \Delta\lambda' = \sin \Delta\lambda \cos \phi_M$,

(6) $\sin \phi_M = \sin \phi' \cdot \cos \Delta\lambda'$,

$\Delta\phi' = \phi_P - \phi'$,

(7) $\cos d = \cos \Delta\lambda' \cos \Delta\phi'$,

(8) $\sin \Delta\lambda' = \sin q \sin d$.

In de situatie van figuur 4 ligt P westelijk van Mekka, en hoek q geeft de oostelijke afwijking van de qibla aan ten opzichte van het zuiden. Als P oostelijk van Mekka ligt (dit is bijvoorbeeld het geval voor Bagdad), blijven alle formules hetzelfde; q geeft nu de westelijke afwijking van de qibla van het zuiden aan. $\Delta\lambda$ wordt steeds als positief beschouwd (in de middeleeuwen rekende men niet met negatieve grootheden). Als $\phi_P < \phi'$, hetgeen bijvoorbeeld voor zuidelijk gelegen plaatsen in Soedan of Jemen kan voorkomen, bekeek men $\Delta\phi' = \phi' - \phi_P$; q wordt dan de afwijking van de qibla van het noordpunt van de horizon.

We vermelden hieronder alle hulpgrootheden en de uitkomst voor Bagdad, Cordoba en Utrecht (gebruik makend van moderne waarden van de plaatscoördinaten).

	Bagdad	Cordoba	Utrecht
ϕ	33° 20′	37° 53′	52° 6′
$\Delta\lambda$	4° 37′	44° 35′	34°42′
$\Delta\lambda'$	4° 18′	40° 47′	32° 0′
ϕ'	21° 30′	28° 51′	25° 31′
$\Delta\phi'$	11° 50′	9° 2′	26° 35′
d	12° 35′	41° 36′	40° 41′
q	20° 8′ W.	79° 41′ O.	54° 23′ O.

Qiblatabellen

Diverse middeleeuwse Islamitische wiskundigen hebben tabellen berekend, waarin de qibla voor elke ϕ_P en $\Delta\lambda$ eenvoudig kon worden afgelezen.
De oudste van deze tabellen zijn gebaseerd op eenvoudige benaderingsmethoden. Vanaf de twaalfde eeuw zijn er ook tabellen berekend die op de (veel ingewikkeldere) exacte methoden waren gebaseerd. De meest nauwkeurige hiervan is berekend door de veertiendeeeuwse astronoom al-Khalīlī uit Damascus. Al-Khalīlī geeft voor elke waarde van $|\Delta\lambda|$ tussen 1° tot 60° en voor elke gehele waarde van ϕ tussen 10° en 56° en daarbij ook nog voor $\phi = 33°\ 30'$ de bijbehorende waarde van q. Voor tussenliggende waarden kon de qibla met lineaire interpolatie worden gevonden.
De tabel bevat in totaal $60 \times 48 = 2880$ waarden. De meeste zijn correct, of wijken (door afrondfouten tijdens de berekening) hoogstens 1 of 2 boogminuten van de correcte waarden af. Om deze tabel met de hand uit te rekenen is een onvoorstelbare hoeveelheid rekenwerk nodig geweest.
We geven hieronder de waarden in de tabel van al-Khalīlī waarmee de qibla voor punten in Nederland kan worden gevonden (met daarbij de namen van tegenwoordige plaatsen die vlakbij die punten liggen).[13] We geven ook de fout (dat wil zeggen waarde in de tabel minus correcte waarde).

$\phi = 51°$:	$\Delta\lambda = 34°$	(Sittard)	$q = 54°\ 41'$	(fout: + 1′)
$\phi = 52°$:	$\Delta\lambda = 33°$	(Winterswijk)	$q = 52°\ 27'$	(fout: – 1′)
	$\Delta\lambda = 34°$	(Oosterbeek)	$q = 53°\ 41'$	(fout: – 1′)
	$\Delta\lambda = 35°$	(Oudewater)	$q = 54°\ 54'$	(fout: – 1′)
$\phi = 53°$:	$\Delta\lambda = 33°$	(Stadskanaal)	$q = 51°\ 30'$	(fout: – 2′)
	$\Delta\lambda = 34°$	(Joure)	$q = 52°\ 45'$	(fout: – 2′)
	$\Delta\lambda = 35°$	(Den Helder)	$q = 54°\ 0'$	(fout: + 2′)

De hoek q is hier steeds de afwijking van de qibla in oostelijke richting vanaf het zuidpunt van de horizon.

De zon als richtingaanwijzer naar Mekka

Een tabel voor de bepaling van de qibla kon pas gebruikt worden als de richting van het zuiden bekend was, maar de bepaling daarvan was weer een apart probleem. In de praktijk omzeilde men dit vaak door de qibla te koppelen aan de hoogte van de zon. De positie van de zon in de dierenriem kon elke dag gemakkelijk worden berekend[6], en hieruit kon men (door berekening of met behulp van het astrolabium)[14] de hoogte van de zon boven de horizon bepalen op het moment dat hij precies in de richting van Mekka staat. Die hoogte hangt natuurlijk af van de plaats waar de waarnemer zich bevindt, en de methode kan niet voor alle plaatsen op alle momenten gebruikt worden (zie hieronder, het voorbeeld van Utrecht).
Voor de belangrijkste steden in het Midden Oosten is de methode wel altijd bruikbaar, omdat de zon het hele jaar door boven de horizon is als hij in de richting van de qibla staat.
We geven nu in moderne notatie een gestroomlijnde beschrijving van een berekening, die in hoofdzaak al te vinden is[15] bij de uit Marrakesh afkomstige astronoom al-Marrākushī (dertiende eeuw). In figuur 6 zien we enkele boldriehoeken op de bovenste helft van de hemelbol.
H is de hemelnoordpool, P is het zenith van de plaats waar wij ons bevinden, Q is de richting van Mekka op

de horizon, S, O, W en N zijn het zuidpunt, het oostpunt, het westpunt en het noordpunt van de horizon.

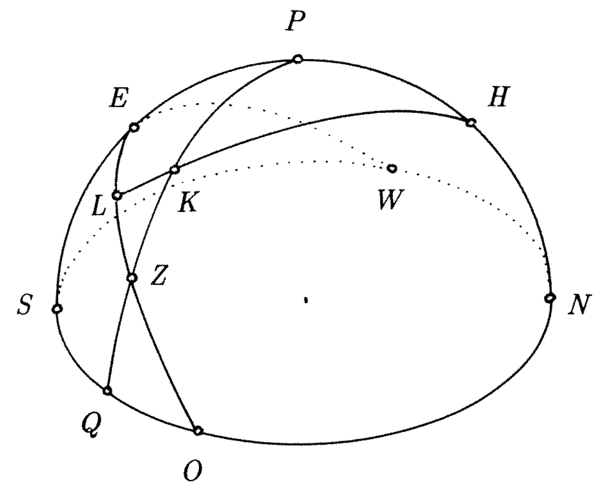


fig. 6

We trekken door O en W de hemelequator, die PS in E en PQ in Z snijdt. We noteren $h_0 = ZQ$. Nu zijn van driehoek PEZ de volgende elementen bekend: $\angle EPZ = q$, boog $PE = \phi_P$, de geografische breedte van de plaats waar wij ons bevinden, en $\angle PEZ = 90°$. We kunnen boog PZ uitrekenen met (3):

$$\cos\angle EPZ = \frac{\tan PE}{\tan PZ} .$$

Gevolg:[16]

$$(9) \quad \tan h_0 = \frac{\cos q}{\tan\phi_P} .$$

Als de declinatie van de zon 0° is, staat hij op de hemelequator, dus is h_0 de hoogte van de zon als hij in de richting van Mekka staat. Stel nu de declinatie van de zon is $\delta \neq 0$, en stel de zon staat in punt K als hij precies de richting van Mekka aangeeft. Dan ligt K op PQ. Trek uit H een grootcirkel door K, deze zal de hemelequator in een punt L loodrecht snijden. Nu is boog KL de declinatie δ. We noteren $\Delta h =$ boog KZ.
We kunnen Δh berekenen door twee maal de sinusregel (1) toe te passen:

$$\sin\angle PZE = \frac{\sin PE}{\sin PZ} = \frac{\sin KL}{\sin KZ} .$$

Hieruit volgt:

$$(10) \quad \frac{\sin\phi_P}{\cos h_0} = \frac{\sin\delta}{\sin\Delta h} .$$

De gevraagde hoogte van de zon is $h \pm \Delta h$. Het teken is + bij noordelijke declinatie, – bij zuidelijke declinatie van de zon.

Voor Utrecht geldt het volgende tabelletje:

data		declinatie zon	hoogte zon
21 dec.		23° 27′ Z	(onder de horizon)
21 jan.	21 nov.	20° 10′ Z	0° 57′
21 feb.	21 okt.	11° 29′ Z	11° 6′
21 mrt.	21 sept.	0°	24° 23′
21 apr.	21 aug.	11° 29′ N	37° 40′
21 mei	21 juli	20° 10′ N	47° 49′
21 juni		23° 27′ N	51° 43′

Deze informatie werd op slimme wijze vastgelegd op de achterkant van vele astrolabia.[17]

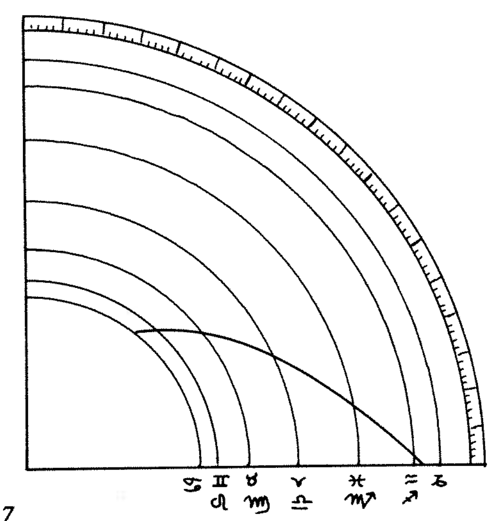


fig. 7

Op het rechter bovenkwadrant (figuur 7) werd een schaalverdeling (van 1 tot 90 graden) aangebracht, die gebruikt werd om de hoogte van de zon te meten. Vlak daarbinnen werden zeven concentrische cirkelbogen getekend;[18] hiervan is de binnenste cirkelboog voor zon in 0° Kreeft (langste dag); de een na binnenste voor de zon in 0° Tweelingen en 0° Leeuw, enzovoort, en de buitenste voor zon in 0° Steenbok (kortste dag). Op elke boog markeren we de hoogte van de zon op het moment dat hij in de richting van Mekka staat. Door deze punten te verbinden ontstaat een kromme lijn. Dit kan men voor verschillende plaatsen doen, en zo werden er op de achterkant van een astrolabium vaak een stel van deze lijnen gegraveerd.[19] Als men nu op een bepaalde dag de positie van de zon in de dierenriem weet, kan men op de lijn markeren hoe hoog de zon zal staan op het moment dat hij de richting van Mekka aangeeft. Men kan nu af en toe met het astrolabium de hoogte van de zon meten, totdat deze de gewenste hoogte heeft bereikt; de richting van de zon is dan de richting van Mekka.

Zo is een methode tot stand gekomen waarmee ook een leek op exacte manier, maar zonder veel wiskundige voorkennis 'in het veld' de qibla kan bepalen.
Tegenwoordig kan men de qibla exacter bepalen dan de middeleeuwse Islamitische geleerden, omdat (met behulp van geavanceerde landmeetkundige apparatuur, radar, satellieten, etc.) meer nauwkeurige waarden van de plaatscoördinaten kunnen worden gemeten.
De benodigde wiskunde is sinds de middeleeuwen niet wezenlijk veranderd. De bepaling van de qibla is een probleem dat door de middeleeuws Islamitische wiskundigen volledig is opgelost. Genoeg stof voor intercultureel wiskundeonderwijs, niet alleen voor mavo, maar ook voor havo en vwo!

Noten

[1] Dit betekent ook, dat men in één stad in verschillende moskeeën verschillende qiblas kan vinden.

[2] Deze methode houdt geen rekening met de bolvorm van de aarde, en dit kon tot problemen leiden voor plaatsen die veel noordelijker dan Mekka liggen. Bepaalde sterren uit de Grote Beer, die voor het bepalen van de richting gebruikt werden, gingen in Mekka wel op en onder, maar staan in het veel noordelijker gelegen Perzië altijd boven de horizon. Daarom werden ook meteorologische kenmerken gebruikt. Aangenomen werd, dat de vier meest voorkomende winden in Mekka frontaal tegen de zijden van de Kaaba bliezen. Perzië ligt in de zone tegenover de zijde van de Kaaba waar de noordoostenwind tegenaan blaast, dus wie in Perzië de qibla wil vinden, moet de noordoostenwind in de rug hebben, enz.

[3] Moderne metingen hebben aangetoond dat de korte as wijst naar het meest zuidelijke punt aan de westelijke horizon waar de maan op de kortste dag kan ondergaan.

[4] Niet precies, omdat de poolster niet precies in de hemelpool staat; wie preciezer wilde meten nam het gemiddelde van de minimale hoogte en de maximale hoogte van een willekeurige circumpolaire ster.

[5] Deze regel is een toepassing van formule (1) verderop in het artikel.

[6] Wie wel eens een horoscoop heeft gelezen, weet op welke dagen van het jaar de zon in welke tekens van de dierenriem staat. De zon staat aan het begin van de lente (21 maart) in 0° Ram, op dit punt is $\lambda = 0°$. Elk teken van de dierenriem heeft een lengte van 30°. Op 21 april staat de zon in 0° Stier, dan $\lambda = 30°$, op 21 Mei in 0° Tweelingen, dan $\lambda = 60°$ enz. De zon beweegt elke dag circa 1 graad, dus op 1 juni staat hij ongeveer in 11° Tweelingen ($\lambda = 71°$).

[7] Beide waarden worden opgegeven. Zie de beschrijving van Al-Bīrūnī (literatuurlijst) 178-180.

[8] Een zonsverduistering is hiervoor niet bruikbaar, omdat die op verschillende plaatsen op aarde op verschillende momenten plaatsvindt.

[9] Voor een gedetailleerde beschrijving van de methode en talrijke voorbeelden zie het in de literatuurlijst genoemde werk van Al-Bīrūnī, 120-191.

[10] In feite ligt de zaak nog iets ingewikkelder, omdat de middeleeuws Arabische tangens en sinus anders gedefinieerd zijn dan de onze, en daarom elk een constante factor van het moderne equivalent verschillen, maar het zou te ver voeren hier in detail in te gaan op de geschiedenis van de trigonometrie.

[11] In het Arabisch heet deze boog: de gecorrigeerde lengte.

[12] De methode kan worden vereenvoudigd; men kan bijvoorbeeld (7) en (8) vermijden door na (6) te gebruiken
$$\tan q = \frac{\tan\Delta\lambda'}{\sin\Delta\phi'}.$$
(Dit is een toepassing van (4)). Met (3) en (4) vindt men de volgende formule, die handig is voor computerberekeningen:
$$\tan q = \frac{\sin\Delta\lambda}{\sin\phi_P\cos\Delta\lambda - \cos\phi_P\tan\phi_M}.$$

[13] In de tabel van al-Khalīlī staat niet $\Delta\lambda$ maar de *lengte* zelf (waarbij de *lengte* van Mekka verondersteld wordt 67° te zijn).

[14] Zie Michel of mijn artikel *Occulte Wiskunde*.

[15] Zie de vertaling van Sédillot, I, Ch. 64.

[16] Hier heb ik de methode van Al-Marrākushī iets vereenvoudigd. Hij vermijdt namelijk in (9) het terugzoeken van h_0 in een tangenstabel door een hulphoek x in te voeren zodat $\sin q \cos \phi_P = \sin x$, dan $\cos h_0 \cos x = \sin \phi_P$.

[17] Zie mijn *Occulte wiskunde* voor een beschrijving van het astrolabium en verdere literatuur.

[18] De stralen zijn om traditionele redenen gelijk aan $c\cdot \tan(\frac{1}{2} \times (90° - \delta))$. Zie Michel p. 80.

[19] Deze zijn mooi te zien op het midden van de voorplaat van het boek van Berggren (de min of meer horizontale bundel door elkaar heen lopende lijnen).

Literatuur

Berggren, J.L. (1986). *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam.* New York, Springer.

Al-Bīrūnī (1967). *The determination of the coordinates of positions for the correction of distances between cities*, transl. from the Arabic by Jamil Ali, Beirut.

Brink, F.J. van der en M. Meeder (1991). Mekka. *Nieuwe Wiskrant 10* (1), 80-84.

Hogendijk, J.P. (1988). Occulte Wiskunde. *Nieuwe Wiskrant* 7 (3) , 35-44.

Kennedy, E.S. and M. H. Kennedy (1987). *Geographical coordinates of localities from Islamic sources.*

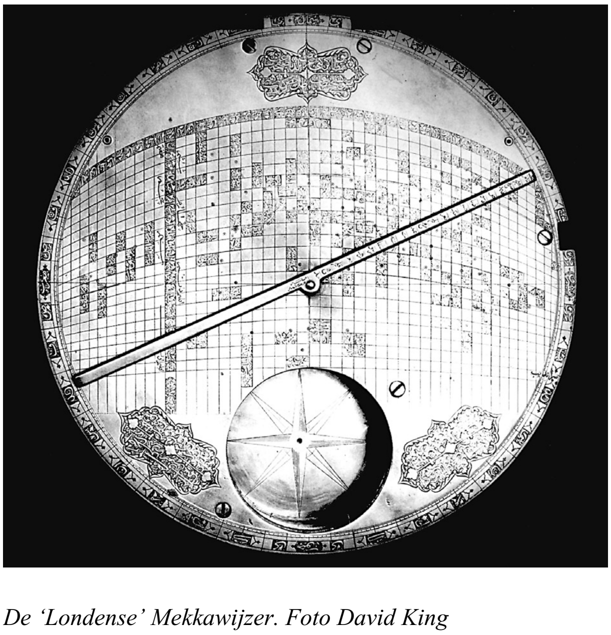
Frankfurt am Main, Institut für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften.
King, D.A. (1985). The sacred direction in Islam. A study of the interaction of religion and science in the Middle Ages. *Interdisciplinary science reviews 10*, 315-328.
King, D.A. (1975). Al-Khalīlī's Qibla table. *Journal of Near Eastern Studies 34*, 81-122. Herdrukt in: D.A. King (1986), *Islamic mathematical astronomy*. London, Variorum reprints.
King, D.A. (1986). The earliest Islamic mathematical methods and tables for finding the direction of Mecca. *Zeitschrift für Geschichte der arabisch-islamischen Wissenschaften 3*, 82-149.
King, D.A. Science in the service of religion: the case of Islam. *Impact of science on society*, no. 159, 245-262.
Michel, H. (1947). *Traité de l'astrolabe*. Paris.
Sédillot, J.-J. et L.-A. Sédillot (1834). *Traité des instruments astronomiques des Arabes*. Paris, herdruk Frankfurt, Institut für Geschichte der arabisch-islamischen Wissenschaften. 1984.

In 1989 duikt het instrument dat de omslag van deze wiskrant siert op in Londen. Waarschijnlijk drie eeuwen geleden vervaardigd in Iran. Maar waar komt het idee vandaan? En moet de visie over de oorspronkelijkheid van de Islamitische wiskunde in onze middeleeuwen worden herzien? En terwijl u zelf met behulp van de bouwplaat uitzoekt waar de drie wijzen echt vandaan kwamen onthult **Jan Hogendijk** voor u:

Het mysterie van de Mekkawijzers van Isfahan

De ontdekking van de Mekkawijzers

Elke Moslim is verplicht vijfmaal per dag te bidden met het gezicht naar Mekka. Al in de middeleeuwen hebben Islamitische wiskundigen daarom methoden ontwikkeld om de richting van Mekka in iedere plaats op aarde te vinden. Veel van die methoden zijn in een eerder artikel in de *Nieuwe Wiskrant* beschreven.[1] Sindsdien zijn er nieuwe ontdekkingen gedaan.
In 1989 werd bij Sotheby's in Londen een metalen Islamitisch instrument geveild van een onbekend type, met een diameter van circa 22,5 cm. Met dit instrument kan niet alleen de richting, maar ook de afstand tot Mekka gevonden worden. In 1995 vond iemand een tweede instrument van hetzelfde soort in een antiekwinkel in Parijs, en in 2001 is er een derde exemplaar gevonden, dat nu in het Sackler museum van de Harvard University wordt tentoongesteld. Uit de Perzische inscripties blijkt dat alledrie exemplaren in de zeventiende of achttiende eeuw in Isfahan in Iran zijn gemaakt.
Het instrument bestaat uit een wijzer die draait over een platte schijf, met daarop een soort kaart van een deel van de aarde. We zullen het instrument daarom Mekkawijzer noemen. Op de schijf zit ook een kompas, en op een van de instrumenten is een zonnewijzer met een scharnier aan de rand van de schijf vastgemaakt. We zullen niet verder ingaan op deze zonnewijzer, die met de rest van het instrument weinig of niets te maken heeft.



De 'Londense' Mekkawijzer. Foto David King

Meteen na de ontdekking in 1989 heeft de Mekkawijzer allerlei mensen enthousiast gemaakt. De vraag was onmiddellijk waar en wanneer dit prachtige instrument is bedacht. Volgens de veilingcatalogus van Sotheby's was 'de (kaart)projectie Westeuropees geïnspireerd', en was 'dit ongebruikelijke instrument ... interessant bewijsmateriaal voor de overname van Europese wetenschap en technologie in het achttiende-eeuwse Perzië'.[2] In 1999 publiceerde David King (Frankfurt) een omvangrijk boek[3] over de twee toen bekende Mekkawijzers. Volgens King is de Mekkawijzer al in de negende eeuw in Bagdad uitgevonden. In 2000 heeft Elly Dekker (Utrecht) aangetoond[4] dat op de schijf een retro-azimuthale kaartprojectie is gebruikt die in de moderne vakliteratuur pas sinds 1968 bekend is. Zij stelt dat het idee van de Mekkawijzer ook in de zeventiende eeuw in Frankrijk bedacht zou kunnen zijn en naar Isfahan werd gebracht door een van de vele Europeanen die in die tijd naar Iran reisden. Ook op de zonnewijzer die aan een van de instrumenten vastzit zijn Europese invloeden te zien.
De oorsprong van de Mekkawijzer is interessant voor de discussie over de originaliteit van de middeleeuws Islamitische wiskunde. De moderne wetenschapshistorici Wilbur Knorr en Morris Kline geloven dat de Islamitische cultuur vooral een doorgeefluik was van Griekse en Indiase wiskunde naar Europa.[5] Volgens Knorr is bijna alle meetkunde in middeleeuws Arabische teksten van Griekse oorsprong. We kunnen deze visie weerleggen door aan te tonen dat de Mekkawijzer door een middeleeuws Islamitisch wiskundige uitgevonden is. De oude Grieken kunnen de Mekkawijzer niet bedacht hebben, omdat de Islam in hun tijd nog niet bestond.
Een beschrijving van een instrument wordt pas leuk als de lezer zelf met het instrument kan spelen. Daarom zal ik hieronder de Mekkawijzer uitleggen aan de hand van

modellen die kunnen worden gekopieerd en uitgeknipt en zelfs in een les worden gebruikt. Daarna wordt met formules uit de moderne bolmeetkunde aangetoond dat de Mekkawijzer wiskundig exact is.
De rest van dit artikel gaat over de vraag waar het instrument vandaan komt. Ik zal enkele nieuwe wiskundige en historische invalshoeken presenteren op basis van speurwerk in Arabische teksten. Dit artikel is geschreven voor liefhebbers van wiskundige en historische puzzels, want het mysterie is nog (lang?) niet opgelost. Gelukkig maar, want zoals David King altijd zegt: 'Die ungelösten Probleme halten einen Geist lebendig, und nicht die gelösten.' [6]
Reacties zijn welkom op hogend@math.uu.nl.

Een model van de Mekkawijzer

Op de schijf van de Mekkawijzer zien we meer dan honderd puntjes waarbij plaatsnamen gegraveerd staan, en een rooster met verticale rechte lijnen en horizontale krommen. De rechte lijnen zijn meridianen tussen Marokko en India, en de krommen zijn parallellen tussen 10 en 52°. De meridianen en parallellen zijn getekend met intervallen van 2 graden. Op de wijzer staat een schaalverdeling in parasangen (de parasang is een oude Perzische afstandsmaat, ongeveer 5 km).

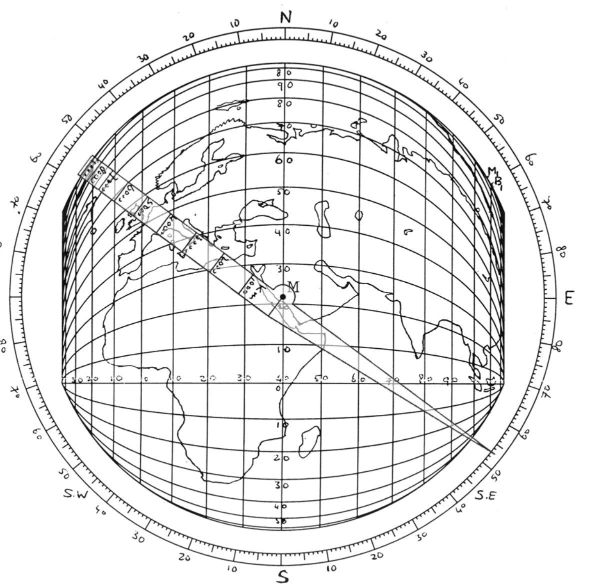


fig. 1

Op grond van wiskundige formules die hieronder uitgelegd zullen worden, heb ik het instrument uitgebreid tot de hele wereld. Op de website van de *Nieuwe Wiskrant* (www.fi.uu.nl/wiskrant/) staan tekeningen van de wijzer en van de helft van het aardoppervlak met middelpunt Mekka, met meridianen en parallellen voor elke 10 graden. Als de schijf op een stuk papier gekopieerd wordt en de wijzer op een overheadsheet, krijgen we een model van het instrument. We hebben nog een drukknoop of splitpen nodig om wijzer en schijf op de zwarte stip aan elkaar te hechten. Hoewel op de oorspronkelijke instrumenten geen kustlijnen staan, heb ik deze om didactische redenen in het model wel ingetekend.

Nu de werking: we draaien de wijzer totdat de rand van het gedeelte met de schaalverdeling door onze woonplaats loopt. Let op: we moeten wel de goede rand kiezen, namelijk die waarvan het verlengde door de stip in het midden gaat! De punt van de wijzer geeft nu op de rand van de schijf de richting van Mekka aan. De windrichtingen staan aangegeven en de rechte hoeken daartussen zijn in 90 graden verdeeld. Op de wijzer heb ik de afstand naar Mekka in kilometers vermeld.
Op de website van de *Nieuwe Wiskrant* staat ook een figuur voor de andere kant van de wereld. Ik heb deze modellen voor het eerst gepresenteerd op een workshop in New Orleans (USA). Diverse Moslims uit Texas en Californië zijn daarna met het instrument aan het werk gegaan om uit te vinden hoe zij in hun woonplaats moeten bidden!

Is de Mekkawijzer correct?

Om deze vraag te beantwoorden voeren we een coördinatensysteem op de schijf in (figuur 2). We nemen de oorsprong in Mekka, de positieve x-as naar het Oosten (E) op de rand van de schijf, en de positieve y-as naar het Noorden (N). We kiezen nu voor het gemak een plaats I ten Noordoosten van Mekka, bijvoorbeeld Isfahan. Bij deze plaats hoort een punt I' op de schijf met coördinaten (x, y). Noem d de afstand van I tot Mekka over een grootcirkel op aarde (in graden, 1 graad ≈ 110 km), en q de hoek tussen de richting van Mekka (de *qibla*) en het Zuiden. We rekenen q positief als Mekka in het Westen ligt (voorbeeld: Isfahan), negatief als Mekka in het Oosten ligt (voorbeeld: Utrecht). Als de wijzer precies over I' ligt, zoals in figuur 2, maakt hij een hoek q met de y-as.

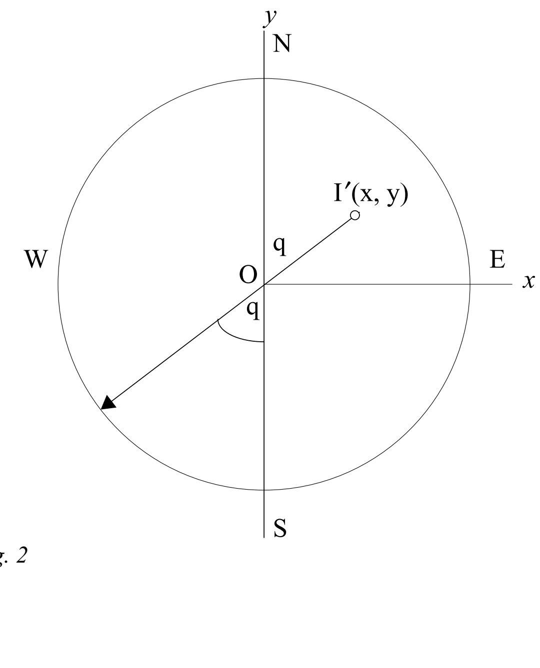


fig. 2

De streepjes op de wijzer staan niet evenver van elkaar. De lengte van het stuk van de wijzer tussen I' en de oorsprong is op het instrument evenredig met de sinus van de afstand d tot Mekka. dus $|OI'| = r \cdot \sin d$. De factor r hangt af van de grootte van het instrument; $r \approx 14$ cm op de Mekkawijzers uit Isfahan (niet het hele halfrond om Mekka is op de schijf afgebeeld). De hoek van de wijzer met de positieve y-as is q. Uit dit alles volgt:

$$x = r \cdot \sin d \cdot \sin q, \quad y = r \cdot \sin d \cdot \cos q \qquad (1)$$

Veronderstel nu dat het instrument exact is. We willen nagaan hoe de meridianen en parallellen op de schijf er dan uit zouden moeten zien. Dit kunnen we afleiden zodra we weten hoe q en d afhangen van de geografische breedte φ van I, de geografische breedte μ van Mekka en het verschil in geografische lengte $\Delta\lambda$ tussen I en Mekka (we rekenen $\Delta\lambda$ positief voor plaatsen ten oosten van Mekka en negatief voor plaatsen ten westen van Mekka). Het getal μ is een constante, in de middeleeuwen gebruikte men $\mu = 21°40'$, een moderne waarde is $\mu = 21°26'$. De makers van de instrumenten gebruikten voor Isfahan $\varphi = 32°30'$, $\Delta\lambda = 9°20'$.[7] Moderne waarden voor Isfahan zijn $\varphi = 32°41'$, $\Delta\lambda = 11°52'$.
We bekijken nu de boldriehoek *PMI* die bestaat uit bogen van grootcirkels, met *M* Mekka, *I* de plaats en *P* de noordpool. De drie zijden zijn $PI = 90° - \varphi$, $PM = 90° - \mu$, $MI = d$, en verder geldt $\angle MPI = \Delta\lambda$, $\angle PIM = 180° - q$.

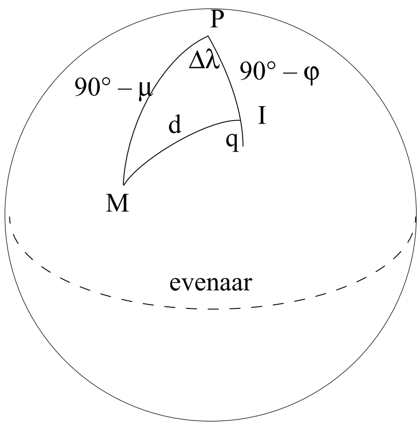


fig. 3

De sinusregel uit de boldriehoeksmeting geeft:

$$\sin q / \cos\mu = \sin\Delta\lambda / \sin d \qquad (2)$$

Er is een regel om de cotangens van een hoek uit te drukken in een aanliggende en de overstaande zijde en de ingesloten hoek. Deze regel levert hier:

$$\sin\Delta\lambda \cdot \cot q + \tan\mu \cdot \cos\varphi = \sin\varphi \cdot \cos\Delta\lambda \qquad (3)$$

We weten nu genoeg over de afbeeldingen
$(\Delta\lambda, \varphi) \to (q, d)$ en $(q, d) \to (x, y)$.
Noem f de samengestelde afbeelding: $(\Delta\lambda, \varphi) \to (x, y)$. Het rooster op de schijf bestaat uit de beelden onder f van de lijnen $\Delta\lambda$ = constant en φ = constant.

Uit (1) en (2) volgt:

$$x = r \cdot \sin\Delta\lambda \cdot \cos\mu \qquad (4)$$

Het beeld van een meridiaan op aarde (gegeven door een constant lengteverschil $\Delta\lambda$ met Mekka) is dus een rechte lijn op afstand $r \cdot \sin\Delta\lambda \cos\mu$ van de y-as. Dit klopt op de drie bewaarde Mekkawijzers. Op de foto op pagina 4 is duidelijk zichtbaar dat meridianen verder van Mekka vandaan dichter bij elkaar liggen.
Uit (1) volgt $\cot q = y/x$, uit (4) halen we:
$\sin\Delta\lambda = x/(r \cdot \cos\mu)$, en dus $\cos^2\Delta\lambda = 1 - (x/(r \cdot \cos\mu))^2$.
Als we dit alles in (3) invullen en kwadrateren komt er

$$(y/(r \cdot \cos\mu) + \tan\mu \cdot \cos\varphi)^2 = \\ = \sin^2\varphi \cdot (1 - (x/(r \cdot \cos\mu))^2) \qquad (5)$$

Dit kunnen we herschrijven als:

$$x^2 + (y + r \cdot \sin\mu \cdot \cos\varphi)^2/\sin^2\varphi = (r \cdot \cos\mu)^2 \qquad (6)$$

Voor $\varphi \neq 0, 90°$ is (6) de vergelijking van een ellips met middelpunt $(0, -r \cdot \sin\mu \cdot \cos\varphi)$ en toppen $(0, \pm r \cdot \sin(\varphi \mp \mu))$ en $(\pm r \cdot \cos\mu, -r \cdot \sin\mu \cdot \cos\varphi)$.
Voor $\varphi = \pm 90°$ komt er een cirkel[8], voor $\varphi = 0°$ levert (5) een rechte lijn.
De krommen op de drie bewaarde Mekkawijzers lijken erg op de ellipsen met vergelijking (6). Volgens David King zijn de krommen als cirkelbogen getekend omdat enkele sporen zichtbaar zijn van een passerpunt die in het middelpunt stond. Elly Dekker heeft berekend dat de gedeelten van ellipsen die afgebeeld moeten worden zo weinig van cirkels verschillen, dat het verschil binnen de meetnauwkeurigheid valt.
Conclusie: het instrument is in de praktijk exact. De wiskundige die de Mekkawijzer bedacht heeft, heeft waarschijnlijk geweten dat de (lastig te tekenen) ellipsen op het instrument goed door cirkels te benaderen zijn.

Intermezzo

Als voorbereiding voor latere hoofdstukjes behandelen we nu eerst een constructie van de richting van Mekka uit ongeveer 1020. De auteur was al-Bīrūnī, die in 973 werd geboren in de streek Khwārezm in Uzbekistan. Uit die streek kwamen meer wiskundigen, zoals 'de man uit Khwārezm' al-Khwārizmī, wiens naam voortleeft in het moderne woord 'algoritme'. In 1017 werd het gebied veroverd door Sultan Maḥmūd van Ghazna (Afghanistan) die al-Bīrūnī meenam als deel van de oorlogsbuit. Tijdens zijn reis naar Afghanistan begon al-Bīrūnī met het schrijven van een boek over het bepalen van geografische coördinaten met als toepassing de bepaling van de richting van Mekka in Ghazna. Uit dit boek stamt de volgende constructie van de richting van Mekka.[9]
Al-Bīrūnī werkte niet met de aardbol maar met de hemelbol (figuur 4). Dit is een bol met als middelpunt het middelpunt van de aarde, en straal zo groot dat we de afmeting van de aarde kunnen verwaarlozen. Elke plaats op aarde heeft een 'zenit' op de hemelbol, namelijk het punt

waar de rechte halflijn vanuit het middelpunt O van de aarde door die plaats de hemelbol snijdt. Zo is bijvoorbeeld het zenit van de Noordpool P een punt Z_P dicht bij de poolster, waaromheen de sterren (schijnen te) draaien. Het zenit van onze woonplaats I is het punt Z_I recht boven ons hoofd. Het zenit van Mekka is het punt Z_M, dat in Iran en Afghanistan in het zuidwesten staat.

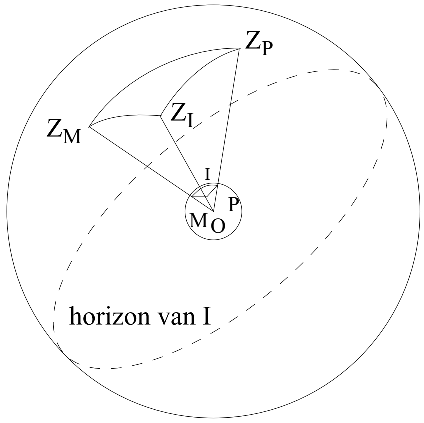


fig. 4

Natuurlijk is de driehoek $Z_PZ_MZ_I$ op de hemelbol precies dezelfde als de driehoek PMI op de aardbol; we zien de afstand tussen onze woonplaats en Mekka in graden op de hemelboog terug als de lengte van boog

$d = MI = Z_M Z_I$.

De hemelbol heeft als voordeel dat we de horizon van onze woonplaats I kunnen toevoegen, dat is het vlak door het middelpunt O loodrecht op de lijn OZ_I. Dit vlak kunnen we gelijkstellen aan de horizon die we zien, omdat we de afmeting van de aarde kunnen verwaarlozen. We kunnen nu de vier windrichtingen toevoegen (het noorden N ligt in de richting van de loodrechte projectie van Z_P op de horizon).

Van nu af aan laten we de notatie voor zenit op de hemelbol weg: we noteren het zenit van onze woonplaats, Mekka, en de Noordpool simpelweg als I, M en P.

We zullen zometeen zien hoe al-Bīrūnī de loodrechte projectie M' van M op het horizontale vlak construeert. De lijn van O naar M' geeft dan de richting van Mekka aan, zie figuur 5.

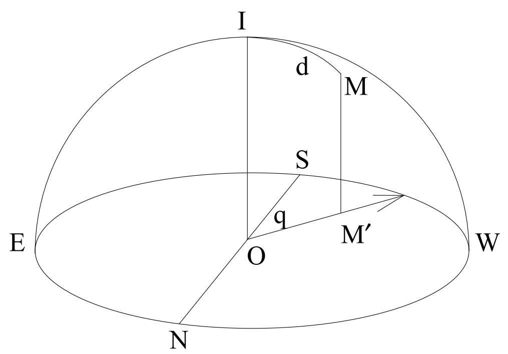


fig. 5

Al-Bīrūnī's constructie van M' wordt gegeven in figuur 6. We veronderstellen μ, φ en Δλ bekend, en we geven de constructie voor een plaats ten Oosten van Mekka. (Door de hele constructie te spiegelen krijgen we de constructie voor plaatsen ten Westen van Mekka.)

Al-Bīrūnī tekent de helft van het vlak van de horizon *NWS* met *N* het Noorden, *W* het Westen en *S* het Zuiden, en middelpunt *O*. Hij maakt de cirkel compleet, maar gebruikt de linkerhelft voor het tekenen van het vlak van de meridiaan; dit roteert hij over 90° om de lijn *NS*, zodat het in het vlak van het papier terechtkomt. Hierin vinden we punt *P*, de Noordpool, die φ graden boven de horizon staat, en het zenit *I*: $\angle NOP = \varphi$ en $\angle NOI = 90°$. De hemelevenaar snijdt dit vlak in de stippellijn loodrecht op *OP*. Het zenit van Mekka ligt op een cirkel parallel aan de evenaar, op afstand μ graden ervan (vergelijk met de aardbol!).

Al-Bīrūnī vindt de doorsnede *XY* van het meridiaanvlak met deze *parallelcirkel van Mekka* als volgt: kies punt *X* zodat $\angle POX = 90° - \mu$ en trek *XY* loodrecht op *OP*.

Al-Bīrūnī klapt daarna een deel van deze parallelcirkel uit, zodat hij ook in het vlak van het papier terechtkomt (de gestippelde cirkel in figuur 6). Punt *Y* is het middelpunt. Als het lengteverschil Δλ met Mekka 0° is, ligt het zenit van Mekka in *X*. Anders is Mekka het punt *M* op de gestippelde cirkel met $\angle XYM = \Delta\lambda$.

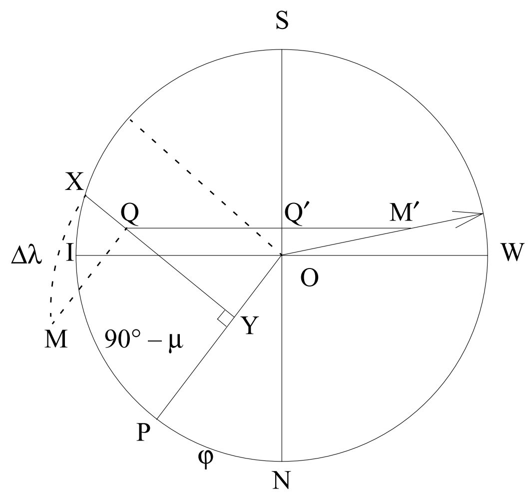


fig. 6

Nu zijn we bijna klaar! Laat een loodlijn *MQ* neer op *XY*, trek een loodlijn *QQ′* op *SN* en verleng deze lijn tot punt *M′* zodat $M'Q' = MQ$. Dan is punt *M′* de loodrechte projectie van *M*.

Voor al-Bīrūnī was dit duidelijk, want hij en zijn tijdgenoten waren aan dit soort constructies gewend. Voor ons kan het volgende helpen: knip figuur 6 uit langs de buitenste randen (inclusief het gestippelde deel), en knip langs lijn *MQ* tot punt *Q*. Vouw het stukje *XMQ* om de vouwlijn *XQ* om een hoek van 90° en vouw dan de linkerhelft van de figuur langs *SN* om een hoek van 90°. Vlak *SIPN* is dan de meridiaan, en we zien dat *QQ′* verticaal komt te liggen.

Vlak XMQ wordt het vlak van de parallelcirkel van Mekka, lijn QM is evenwijdig aan de horizon en loodrecht op SN. Omdat we $QM = Q'M'$ gekozen hebben is $QMM'Q'$ een rechthoek, dus is M' de loodrechte projectie van M. Tot zover al-Bīrūnī.

De constructie van al-Bīrūnī en de Mekkawijzer

Hoewel al-Bīrūnī de Mekkawijzer nergens noemt in teksten die bewaard zijn, heeft zijn constructie veel met het instrument te maken. We laten dit zien in figuur 5 en 6. Omdat op de hemelbol IM de afstand d tussen de twee plaatsen I en M weergeeft, geldt in figuur 5 voor de loodrechte projectie: $OM' = r \cdot \sin d$, met r de straal van de bol. Verder hebben we $\angle SOM' = q$. Als we de windrichtingen verwisselen, Noord met Zuid en Oost met West, dan kunnen we OM' in figuur 5 opvatten als een deel van de wijzer van het instrument. Het punt M' in figuur 5 komt overeen met het punt $I'(x, y)$ in figuur 2.

De schijf van de Mekkawijzer ontstaat automatisch als we de constructie van al-Bīrūnī voor verschillende plaatsen in dezelfde figuur herhalen. We krijgen steeds verschillende punten M', die we kunnen uitroepen tot de projecties van die plaatsen.

In figuur 7 (niet op schaal) is dit idee uitgevoerd voor drie verschillende plaatsen in Iran.

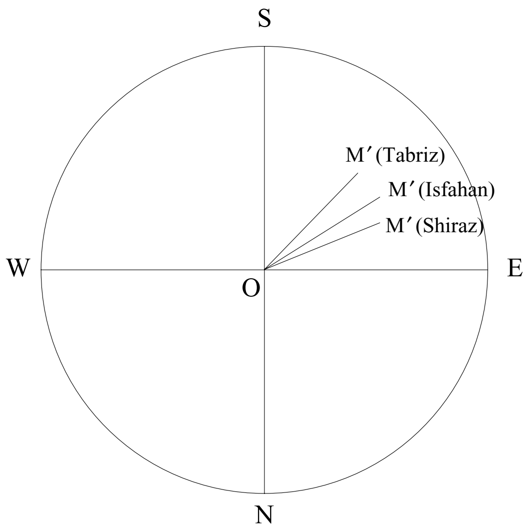


fig. 7

We kunnen de meer dan honderd gegraveerde puntjes op de schijf van de foto krijgen door de constructie van al-Bīrūnī meer dan honderd keer te herhalen, met steeds voor elke plaats de juiste coördinaten. Dit is natuurlijk onhandig; we zouden de plaatsen liever direct willen invullen met behulp van het rooster op de schijf.

Met al-Bīrūnī's constructie kunnen we ook het rooster vinden. In figuur 8 zijn de notaties dezelfde als in figuur 6. De grootte van parallelcirkel XYM is constant, want de

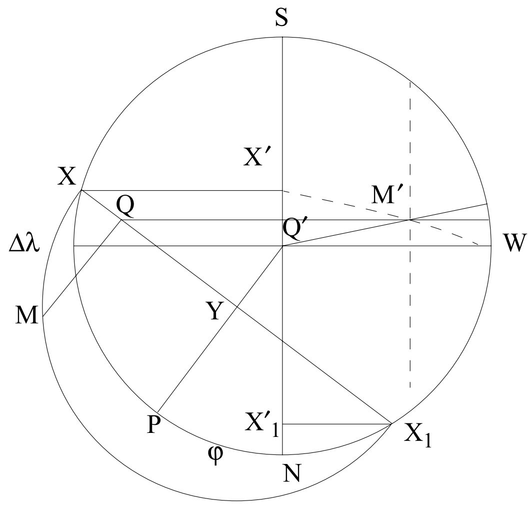


fig. 8

straal $r \cos \mu$ hangt alleen af van de geografische breedte van Mekka. Voor plaatsen op een bepaalde meridiaan is $\Delta\lambda$ vast en zal de bijbehorende φ en dus de positie van P in figuur 8 variëren, maar de lengte van MQ zal gelijk blijven aan $r \cos \mu \sin \Delta\lambda$. Daarom liggen de bijbehorende punten M' op een rechte gestippelde lijn.

Bij vaste φ en variabele $\Delta\lambda$ ligt de positie van P vast, en dus ook die van de punten Y en X. Punt M ligt dus ergens op de vaste cirkel met straal YX. Hieruit kunnen we op twee manieren afleiden dat de punten M' op een vaste ellips liggen:

a. noem X_1 het andere uiteinde van middellijn XY en noem X' en X'_1 de loodrechte projecties van X en X_1 op NS. Vanwege de cirkel geldt $MQ^2 = QX \cdot QX_1$, en omdat $QX : Q'X' = QX_1 : Q'X_1' = 1 : \sin \varphi$, een constante, is $M'Q'^2 : Q'X' \cdot Q'X_1'$ constant, dus de punten M' liggen op een ellips volgens stelling 21 van boek 1 van de *Conica* van Apollonius, het standaardwerk over kegelsneden, dat ook bekend was in Arabische vertaling.
b. Als φ vast ligt, ligt ook de positie van de parallelcirkel van Mekka vast, en de loodrechte projectie daarvan op de horizon is een ellips, zie figuur 9.

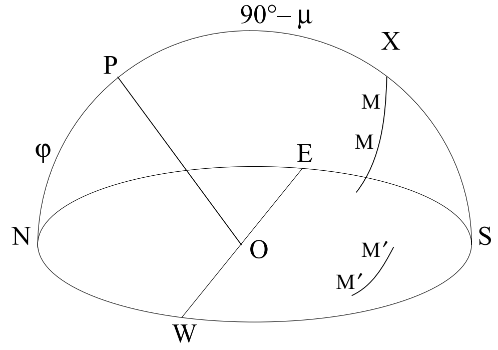


fig. 9

Een soortgelijke redenering kunnen we ook toepassen voor de meridianen: als $\Delta\lambda$ vastligt, ligt M op een cirkel parallel aan vlak *NPS*, en loodrecht op de horizon. Zo kunnen we het hele rooster op de schijf krijgen als loodrechte projectie van een stel cirkels op een bol.
En hieruit blijkt dat de loodrechte projectie in de Mekkawijzer wiskundig gezien misschien niet eens zo handig is. Als de uitvinder stereografische projectie had gebruikt met als pool het nadir (punt recht onder het middelpunt O), had hij een Mekkawijzer gekregen met alleen maar cirkels. De schaalverdeling op de wijzer was dan niet $r \cdot \sin d$ geweest maar $r \cdot \tan (d / 2)$. Stereografische projectie werd gebruikt in de standaardvorm van het astrolabium[10] en was daarom in de middeleeuwen heel bekend.

Sporen in middeleeuwse Arabische teksten?

Ondanks uitgebreid speurwerk heeft David King geen beschrijving van de Mekkawijzer in een Arabisch of Perzisch handschrift kunnen vinden, en aan niemand na hem is dat tot nu toe gelukt. Op zichzelf is dit niet verrassend, omdat een groot deel van de middeleeuws Arabische wiskundige teksten verloren is gegaan.

In het vorige hoofdstukje hebben we gezien, dat de richting van Mekka in een plaats met gegeven geografische lengte en breedte met passer en liniaal geconstrueerd kan worden, zoals aangegeven door al-Bīrūnī. Alle Islamitische constructies die nu in de literatuur bekend zijn, behalve de Mekkawijzer, werken met passer en liniaal.
In Arabische handschriften heb ik twee verwijzingen gevonden naar een constructie van de richting van Mekka met behulp van kegelsneden. Deze zouden op de Mekkawijzer betrekking kunnen hebben.

1. Het eerste mogelijke spoor vond ik toen ik een microfilm van een Arabisch handschrift per ongeluk te ver doordraaide, tijdens een bezoek aan het Institut für Geschichte der arabisch-islamischen Wissenschaften in Frankfurt. Een pagina die ik niet wilde bekijken was het begin van deel 5 van een serie teksten die volgens een anonieme auteur bestudeerd moesten worden tussen de *Elementen* van Euclides en de *Almagest* van Ptolemaeus. Het deel ging over kegelsneden, en de anonieme auteur zegt dat dit deel nuttig was voor de 'constructie van de richting van Mekka met kegelsneden'. Hij noemt ook een paar andere toepassingen (trisectie van een hoek, enzovoort), maar hiervoor waren alleen parabolen en hyperbolen nodig. In deel 5 komen wel ellipsen voor, en stelling I:21 van de *Conica* wordt bewezen. Die ellipsen waren dus misschien nodig voor het vinden van de richting van Mekka. De tekst is ongedateerd, maar in deel 3 noemt de auteur Ibn al-Haytham (circa 965-1041), dus de tekst dateert vermoedelijk van na het jaar 1000.[11]
2. De tweede verwijzing heeft te maken met een groot boekwerk van een tamelijk onbekende astronoom Muḥammad ibn Aḥmad Al-Khāzemī, die omstreeks 1060 in Isfahan werkte.[12] Helaas is het boek niet zelf bewaard, maar wel een samenvatting met de titels van alle hoofdstukjes waaruit het boek bestond. In deel 11, getiteld 'de richtingen van plaatsen en hun afstanden van elkaar en de richting van Mekka', stonden hoofdstukjes over 'inleiding met stellingen over kegelsneden voor kennis van richtingen van plaatsen', 'de richting van plaatsen met kegelsneden', en 'de kennis daarvan met ambachtelijke methodes'. Van een paar andere hoofdstukjes wordt de volledige tekst gegeven. In een daarvan staat bewezen dat de loodrechte projectie van een parallelcirkel op de horizon een ellips is (zie figuur 9), en de lengtes van beide assen worden gespecificeerd. Hieruit volgen onmiddellijk alle benodigde gegevens voor de ellipsen op de Mekkawijzer.

Wanneer en waar is de Mekkawijzer ontdekt?

We keren nu terug naar de vraag uit het begin van dit artikel. De constructie van al-Bīrūnī laat zien dat de Mekkawijzer in de middeleeuws Islamitische traditie ontdekt *kan* zijn, wat niet betekent dat dat ook gebeurd *moet* zijn. De verwijzingen naar kegelsneden in verband met de richting van Mekka kan ik alleen verklaren door de aanname dat de Mekkawijzer en de theorie daarachter bekend geweest moet zijn. Het staat de lezer uiteraard vrij andere verklaringen te bedenken. Zekerheid krijgen we pas als we een beschrijving van de Mekkawijzer kunnen vinden in een middeleeuws Arabisch of Perzisch handschrift. David King heeft aangetoond dat de geografische coördinaten van de meer dan honderd plaatsen op de Mekkawijzer waarschijnlijk afkomstig zijn van een lijst uit Centraal-Azië (Uzbekistan) uit de vijftiende eeuw. Hieruit volgt alleen dat deze gegevens in de zeventiende eeuw in Isfahan beschikbaar waren.
Stel dat de Mekkawijzer in het Islamitisch cultuurgebied is ontdekt, dan kunnen we wel wat vermoedens opstellen over de plaats en tijd waar we de ontdekker zouden kunnen zoeken. King noemt als kandidaat Ḥabash al-Ḥāsib uit het negende-eeuwse Bagdad, op grond van algemene argumenten. Ḥabash is ook auteur van een constructie van M' in figuur 6[13], die veel ingewikkelder is dan de constructie van al-Bīrūnī. Het rooster van rechte lijnen en ellipsen op de Mekkawijzer kan niet eenvoudig uit de constructie van Ḥabash worden afgeleid. Daarom vind ik hem geen plausibele kandidaat. Al-Bīrūnī zou in principe de Mekkawijzer ontdekt kunnen hebben; hij interesseerde zich voor loodrechte projectie van cirkels aan de hemelbol op de horizon en heeft zelfs een nieuw type astrolabium ontwikkeld dat daarop gebaseerd is, met ellipsen en al. Het is wel opvallend dat al-Bīrūnī de Mekkawijzer nergens noemt in zijn boeken die bewaard zijn gebleven. Een van die boeken is de *Kanon voor Masᶜūd*, een groot

overzicht van de sterrenkunde met informatie over de richting van Mekka, in 1030 geschreven voor de zoon van zijn ontvoerder. Dit zou een ideale plaats zijn geweest om de Mekkawijzer ten tonele te voeren.

Al-Khāzemī's werk geeft mij persoonlijk het gevoel dat hij alle noodzakelijke theorie voor de Mekkawijzer kende. Opvallend is dat hij in Isfahan werkte, waar de bewaarde instrumenten vandaan komen. Zijn behandeling van de ellips als loodrechte projectie van een parallelcirkel is onvolledig en niet helder. Daarom denk ik niet dat hij de Mekkawijzer bedacht heeft. Op grond van dit alles vermoed ik dat de Mekkawijzer tussen 1020 en 1060 ontdekt is. Een extra argument voor deze vroege datum is de kennis van kegelsneden in de Arabische wereld. Die was in de eerste helft van de elfde eeuw nog goed, maar ging daarna hard achteruit. Het instrument zou eventueel ook uitgevonden kunnen zijn door de beroemde Ibn al-Haytham (ca. 965-1040), die in Egypte woonde, veel van kegelsneden hield, en met wie al-Bīrūnī na zijn gedwongen verhuizing weinig of geen contact had.

We zouden dus in elfde-eeuwse literatuur moeten zoeken, maar helaas is veel daarvan verloren gegaan. We hebben meer kans een latere beschrijving te vinden. Het kan ook zijn dat de Mekkawijzer wel in de Islamitische cultuur is ontdekt, maar we dit nooit zullen kunnen bewijzen. 'God weet het het beste' zouden al-Bīrūnī en Ibn al-Haytham in zo'n geval hebben gezegd.

In het tegenwoordige Isfahan is een 'huis van wiskunde' opgericht (www.mathhouse.org). Men is er uiteraard erg geïnteresseerd in de Mekkawijzer. Ik hoop dat een oude traditie in ere wordt hersteld, dat de Mekkawijzers binnenkort weer in de bazaar van Isfahan zullen worden aangeboden en dat dit artikel daartoe zal bijdragen.[14]

Jan Hogendijk, Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht

Noten

[1] Hogendijk, J.P. (1993). Middeleeuws Islamitische methoden voor de bepaling van de richting van Mekka, *Nieuwe Wiskrant*, *12*(4), 45-52.

[2] Geciteerd uit Dana Mackenzie (2001). A Sine on the Road to Mecca. *American Scientist, 89*(3). http://www.americanscientist.org/Issues/Sciobs01/sciobs0105mecca.html

[3] King, David A. (1999). *World-Maps for Finding the Direction and Distance to Mecca*. Leiden: Brill.

[4] Dekker, Elly (2000). Cartographic Grids from Iran: An Early Version of the Retro-Azimuthal Orthographic Projection? *The Cartographic Journal, 37*, 109-116.

[5] Zie bijvoorbeeld M. Kline (1972). *Mathematical thought from Ancient to Modern Times*. 195-197; W.R. Knorr (1989). *Textual Studies in Ancient and Medieval Geometry*. Boston: Birkhäuser, 238-239.

[6] De uitspraak is van E.G. Kolbenheyer (1878-1962), geciteerd op p. 274 van King, D.A. (2001). *The Ciphers of the Monks: A Forgotten Number-notation of the Middle Ages*. Stuttgart: Steiner.

[7] Zie King p. 557. De geografische breedte was dezelfde als de onze. Er waren twee systemen voor de geografische lengte λ. In het ene systeem werd λ gemeten ten opzichte van de Canarische eilanden, in het andere systeem ten opzichte van de Westkust van Afrika. De lengte van Mekka werd in het eerste systeem aangegeven als 77°10′ en in het tweede als 67°10′. Welk systeem op de instrumenten gebruikt werd is niet uit te maken; de 10 minuten zijn wel op de foto te zien, want de meridiaan voor 77° of 67° loopt iets links van de noord-zuid lijn.

[8] Duidelijk is dat de afbeelding $f: (\Delta\lambda, \varphi) \rightarrow (x, y)$ een aantal vreemde eigenschappen heeft. In de noord- en zuidpool ontaardt de afbeelding, en het punt $(180° - \Delta\lambda, 180° - \varphi)$ heeft hetzelfde beeld als $(\Delta\lambda, \varphi)$. Ik heb daarom een extra figuur voor het halfrond rond de Stille Oceaan getekend, om op de meeste plaatsen eenduidigheid te krijgen. De punten waar het mis gaat met de afbeelding vallen uiteraard buiten de middeleeuws Islamitische wereld!

[9] Zie Al-Bīrūnī, *The Determination of the Coordinates of Positions for the Correction of Distances between Cities*, (Kitāb Taḥdīd Nihāyāt al-Amākin li-Taṣḥīḥ Masāfāt al-Masākin), translated by Jamil Ali, Beirut: American University of Beirut, 1967, 252-253, en E.S. Kennedy, *A commentary upon Bīrūnī's Kitāb Taḥdīd al-Amākin, An 11th Century Treatise on Mathematical Geography*, Beirut: American University of Beirut, 1973, 209-211. Voor informatie over al-Bīrūnī zie het artikel van E.S. Kennedy in C.G. Gillispie (ed.). *Dictionary of Scientific Biography, vol. 2.* (New York 1970), 148-158.

[10] Voor stereografische projectie en het astrolabium zie J.P. Hogendijk (1988). Occulte Wiskunde. *Nieuwe Wiskrant, 7*(3), 35-44.

[11] Het enig bekende handschrift van de hele serie van vijf delen is Algiers 1446. Dr. Djebbar in Parijs was zo vriendelijk mij een microfiche te leen te geven. Het tweede handschrift, van alleen deel 5, is in Oxford, Bodleian Library, Hunt. 237. Deel 5 is gebaseerd op een herziene versie van de *Conica* van Apollonius door Abū Ja^{c}far al-Khāzin (circa 950).

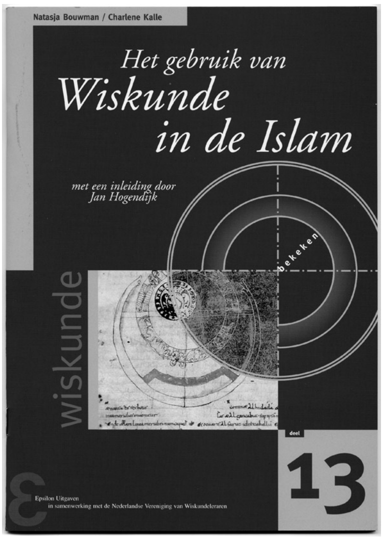
[12] Zie de editie in facsimile in: F. Sezgin (ed.). *Manuscript of Arabic Mathematical and Astronomical Treatises*, Frankfurt: IGAIW, 2001, series C vol. 66. De belangrijke passages staan op pp. 31-32 en p. 38 regels 6-8.

[13] Zie voor de constructie van Ḥabash King p. 63 (het wiskundig verband met de Mekkawijzer wordt daar niet aangegeven) en E.S. Kennedy & Yusuf ^{c}Id (1974). A Letter of al-Bīrūnī: Ḥabash al-Ḥāsib's Analemma for the Qibla, *Historia Mathematica, 1* , 3-11. Het verband tussen de constructies van Ḥabash en al-Bīrūnī wordt uitgelegd in J.L. Berg-

gren (1980). A Comparison of Four Analemmas for Determining the Azimuth of the Qibla. *Journal for the History of Arabic Science, 4*, 69-80.

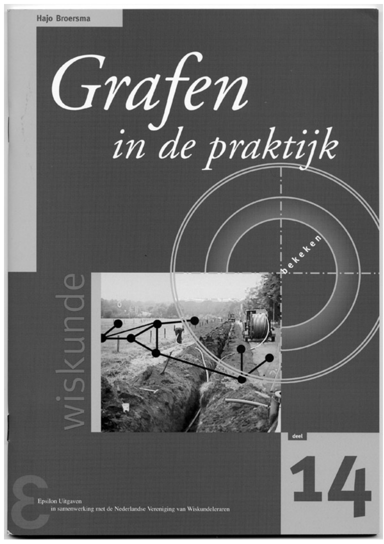
[14] Mijn artikel ‘Een workshop over Iraanse mozaïeken’ uit de *Nieuwe Wiskrant, 16*(2), 1996, 38-42, is in Perzische vertaling verschenen in het tijdschrift *Farnud* van de Vereniging van Wiskundeleraren uit het district Isfahan (de aflevering van Mordād 1377 - Juli/Aug. 1997). Het artikel dat u nu leest wordt ook in het Perzisch vertaald en ik hoop in April 2003 in Isfahan een workshop over de Mekkawijzer te geven.

Verschenen



Het gebruik van wiskunde in de Islam
Natasja Bouwman & Charlene Kalle
met een inleiding van Jan Hogendijk

De Islam kent een aantal regels waaraan moslims zich moet houden. Zo moet een moslim vijf keer per dag bidden met het gezicht naar Mekka. Hoe bepaal je die richting? Een andere regel is dat moslims zich aan de vastenperiode, de Ramadan, moeten houden. Het begin van deze vastenperiode wordt bepaald door de Islamitische kalender die samenhangt met de gang van de maan langs de hemelbol. Met deze Zebra kun je leren hoe vroeger (en nu) deze problemen door moslims werden opgelost.



Grafen in de praktijk
Hajo Broersma

Het wegennet, het internet, de spoorrails verbindingen, de buizenstelsels voor gas en water, het kabelnet voor tv, het telefoonnet zijn allemaal voorbeelden van netwerken. Dergelijke netwerken kunnen worden beschreven met een eenvoudig wiskundig hulpmiddel, de graaf. Afhankelijk van het toepassingsgebied, bijvoorbeeld een reisplanner voor de Nederlandse Spoorwegen of snel transport van emails tussen internet gebruikers, worden verschillende eisen aan de graaf gesteld.

De ZEBRA reeks wordt uitgegeven door Epsilon Uitgaven, Utrecht, in samenwerking met de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en is verkrijgbaar in de boekhandel.