Inleveropgave 4, in te leveren op woensdag 12 oktober 2022 aan het begin van het college

---

LET OP: Het is verplicht om deze inleveropgave uit te schrijven m.b.v. LaTeX!

Voor deze vierde inleveropgave beschouwen we twee *verschillende* priemgetallen p en q en definiëren we de relatie R op $\mathbb{Z}$, voor gehele getallen a en b door de voorwaarde dat aRb dan en slechts dan als

$$b - a \text{ deelbaar is door zowel } p \text{ als } q.$$

Bewijs nu het volgende over deze relatie R.

a. R is een equivalentierelatie.

b. Voor alle gehele getallen a en b geldt de relatie aRb dan en slechts dan als

$$a \equiv b \quad (\text{modulo } pq).$$

c. De verzameling van alle equivalentieklassen van R is gelijk aan $\mathbb{Z}_{pq}$.

Voor deze opgave mag u (*zonder het bewijs te geven*) gebruikmaken van het volgende:

Lemma. *Zij $m, n \in \mathbb{Z}$ en p een priemgetal. Als $p \mid mn$, dan moet ook gelden dat $p \mid m \vee p \mid n$.*

Vermeld wel expliciet waar en wanneer u dit lemma in het bewijs gebruikt.

ENGLISH TRANSLATION:

BEWARE: You are required to write this fourth assignment using LaTeX!

For this fourth assignment, we consider two *distinct* prime numbers p and q and define the relation R on $\mathbb{Z}$ for integers a and b by the condition that aRb if and only if

$$b - a \text{ is divisible by both } p \text{ and } q.$$

Prove the following facts about this relation R.

a. R is an equivalence relation.

b. For any integers a and b the relation aRb holds if and only if

$$a \equiv b \quad (\text{modulo } pq).$$

c. The set of all equivalence classes of R is equal to $\mathbb{Z}_{pq}$.

For this assignment you are allowed to use (*without providing the proof*) the following:

Lemma. *Let $m, n \in \mathbb{Z}$. If p is prime and $p \mid mn$, then it must also be true that $p \mid m \vee p \mid n$.*

Do indicate explicitly at which steps in your proof you invoke this lemma.