Hertentamen Bewijzen in de Wiskunde (WISB102)
Dinsdag 20 december 2022, 17:00 - 20:00

Docenten: *Dirk van Bree*, *Gunther Cornelissen*, *Heinz Hanßmann*, *Willemien Kets*, *Niall Taggart*, *Guido Terra-Bleeker* and *Marieke van der Wegen*

- GEBRUIK EEN APART VEL VOOR IEDERE OPGAVE. Het tentamen bestaat uit zeven opgaven. Schrijf je naam en studentnummer op elk vel.
- Leg je ID kaart op de tafel. Zet je mobiele telefoon uit en stop hem in je tas.
- Het gebruik van communicatie-middelen, telefoons, computers, rekenmachines, boeken of ander cursusmateriaal is niet toegestaan. Wel mag je één vel (A4-formaat, voor- en achterzijde) met zelfgemaakte aantekeningen gebruiken als referentie-materiaal.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt en bewijs al je beweringen. Tenzij anders aangegeven, mag je elke uitspraak gebruiken die in het cursusboek is bewezen, zonder haar opnieuw te hoeven bewijzen, behalve als de uitspraak (deel van) een opgave in het cursusboek is. Geef het aan als je een resultaat uit het boek gebruikt en ga na dat aan de voorwaarden is voldaan van de stellingen die je gebruikt.
- Het tentamen bestaat uit zeven opgaven die elk voor hetzelfde aantal punten tellen. Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt bewijzen, dan mag je dat resultaat in het vervolg van de opgave wel gebruiken.
- Dit tentamen bevat een NEDERLANDSE en een ENGELSE VERSIE. Beide bevatten dezelfde vragen. De Engelse versie staat na de Nederlandse versie.

Instructions in English

- USE A SEPARATE SHEET OF PAPER FOR EACH EXERCISE. The exam consists of seven problems. Write your name and student number on each sheet.
- Put your ID card on the table. Turn off your cell phone and put it in your bag.
- The use of means of communication, telephones, computers, calculators, books or other course materials is not permitted. You may, however, use a sheet of paper (A4 format, front and back) with notes you have made yourself as reference material.
- Do not just give answers, but show clearly how you arrived at your answers for each (partial) problem and prove all your claims. Unless otherwise stated, you may use any statement proven in the course book without having to prove it again, unless the statement is (part of) an exercise in the course book. Indicate if you use a result from the book and check that the conditions of the statements you use have been met.
- The exam consists of seven questions, each of which carries the same weight for the final grade. Even if you cannot prove a part of a problem, you may use that result in the rest of the problem.
- This exam contains a DUTCH and an ENGLISH VERSION. **The English version follows after the Dutch version. Both comprise the same questions.**

Nederlandse versie

Opgave 1 (nieuw vel papier)

Stel dat P, Q en R uitspraken zijn. Bewijs dat de volgende twee samengestelde uitspraken logisch equivalent zijn

$$(P \Longleftrightarrow Q) \implies R,$$

en

$$(\,P \wedge (\sim Q)\,) \;\vee\; (\,(\sim P) \wedge Q\,) \;\vee\; R,$$

door middel van een waarheidstabel.

Opgave 2 (nieuw vel papier)

Zij $(a,b) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, en beschouw de volgende deelverzameling van $\mathbb{R}^3$:

$$V_{(a,b)} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by = 0\}$$

(a) Bewijs dat

$$\bigcup_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} V_{(a,b)} = \mathbb{R}^3.$$

(b) Bewijs dat

$$\bigcap_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} V_{(a,b)} = \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}.$$

Opgave 3 (nieuw vel papier)

In deze opgave beschouwen we twee gehele getallen $a, b \in \mathbb{Z}$. Bewijs nu voor elke $x \in \mathbb{Z}$ dat

$$x \equiv a \pmod 3 \qquad \wedge \qquad x \equiv b \pmod 4$$

dan en slechts dan als

$$x \equiv 4a - 3b \pmod{12}.$$

Opgave 4 (nieuw vel papier)

Bewijs dat

$$5^{2^n} \equiv 5^{2^{n-1}} \bmod 2^{n+1},$$

voor alle natuurlijke getallen n.

Opmerking: $5^{2^n} = 5^{(2^n)} \neq (5^2)^n$.

Z.O.Z.

Opgave 5 (nieuw vel papier)

(a) Bekijk de functie $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ gegeven door $f(n) = \{x \in \mathbb{R} : \lfloor x \rfloor = n\}$. Bewijs dat f injectief is.

(b) Bewijs dat de functie van vraag (a) niet surjectief is.

Opgave 6 (nieuw vel papier)

Stel dat $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een convergente rij reële getallen is waarvan de limiet L is. Bewijs dat voor een vast positief reëel getal c, de rij $(cx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeert, en bepaal de limiet.

Opgave 7 (nieuw vel papier)

Laat A en B verzamelingen zijn. Stel dat $|A \cup B| = |A \cap B|$. Bewijs dat $|A| = |B|$.

EINDE TENTAMEN - ENGELSE VERTALING OP VOLGENDE PAGINAS - END OF DUTCH VERSION - ENGLISH TRANSLATION ON SUBSEQUENT PAGES

English version

Exercise 1 (new sheet of paper)

Let P, Q and R be statements. Show that the two statements

$$(P \iff Q) \implies R,$$

and

$$(\, P \wedge (\sim Q)\,) \ \vee \ (\,(\sim P) \wedge Q\,) \ \vee \ R,$$

have the same truth tables.

Exercise 2 (new sheet of paper)

Let $(a, b) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, and consider the following subset of $\mathbb{R}^3$:

$$V_{(a,b)} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by = 0\}$$

(a) Prove that

$$\bigcup_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} V_{(a,b)} = \mathbb{R}^3.$$

(b) Prove that

$$\bigcap_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} V_{(a,b)} = \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}.$$

Exercise 3 (new sheet of paper)

In this exercise, we consider two fixed integers $a, b \in \mathbb{Z}$. Prove, for every integer $x \in \mathbb{Z}$, that

$$x \equiv a \pmod 3 \qquad \wedge \qquad x \equiv b \pmod 4$$

if and only if

$$x \equiv 4a - 3b \pmod{12}.$$

Exercise 4 (new sheet of paper)

Prove that

$$5^{2^n} \equiv 5^{2^{n-1}} \bmod 2^{n+1},$$

for all natural numbers n.

Note: $5^{2^n} = 5^{(2^n)} \neq (5^2)^n$.

Z.O.Z. / P.T.O.

Exercise 5 (new sheet of paper)

(a) Consider the function $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ given by $f(n) = \{x \in \mathbb{R} : \lfloor x \rfloor = n\}$. Prove that f is injective.

(b) Prove that the function f from part (a) is not surjective.

Exercise 6 (new sheet of paper)

Let $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a convergent sequence of real numbers whose limit is L. Prove that for a fixed positive real number c, the sequence $(cx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converges, and determine its limit.

Exercise 7 (new sheet of paper)

Let A and B be sets. Suppose that $|A \cup B| = |A \cap B|$. Prove that $|A| = |B|$.

EINDE TENTAMEN - END OF EXAM