Infima en suprema

Wat is Wiskunde

In de onderstaande tekst is A telkens een **niet-lege** deelverzameling van $\mathbb{R}$.

Definitie 1.
Zij m een element van A. We noemen m het ***grootste element*** (of ***maximum***) van A, en schrijven $m = \max(A)$, als voor elke $a \in A$ geldt dat $a \leq m$. Als voor elke $a \in A$ geldt dat $a \geq m$ dan is m het ***kleinste element*** (of ***minimum***) van A en schrijven we $m = \min(A)$.

Merk op dat als een verzameling $A \subseteq \mathbb{R}$ een maximum heeft dit uniek is, en dat uiteraard het zelfde opgaat voor het minimum. Het is echter niet waar dat elke verzameling A een maximum heeft.

Voorbeelden.

- Het gesloten interval $[1, 2]$ heeft zowel een grootste element, $\max([1, 2]) = 2$, als een kleinste element, $\min([1, 2]) = 1$. Voor elke $x \in [1, 2]$ geldt immers dat $x \leq 2$ en $x \geq 1$.
- Het open interval $(1, 2)$ heeft geen grootste (of kleinste) element. Dit kunnen we aantonen door middel van een bewijs uit het ongerijmde. We behandelen alleen de uitspraak dat $(1, 2)$ geen grootste element heeft.

  Stel dat dit interval wel een grootste element heeft, zeg $x = \max((1, 2))$. Omdat $x \in (1, 2)$ geldt dan dat $1 < x < 2$. Bekijk het gemiddelde van x en 2, oftewel het getal $y = \frac{1}{2}(x + 2)$. Dit getal voldoet aan de ongelijkheden $1 < y < 2$ en $x < y$ (ga dit na), dus y is een element van $(1, 2)$ dat groter is dan x. Dit weerspreekt de aanname dat x het grootste element is van $(1, 2)$, dus we concluderen dat dit interval geen grootste element kan hebben.

Hoewel het open interval $(1, 2)$ geen grootste element heeft geldt voor elk element $x \in (1, 2)$ wel dat $x \leq 2$. Dit motiveert de volgende definitie.

Definitie 2.
Zij b een reëel getal. We noemen b een ***bovengrens*** van A als voor elk element $x \in A$ geldt dat $x \leq b$. Als voor alle $x \in A$ geldt dat $x \geq b$ dan heet b een ***ondergrens*** van A.

Als A een bovengrens heeft zeggen we dat A ***naar boven begrensd*** is. We noemen A ***naar onderen begrensd*** als A een ondergrens heeft.

We zagen zojuist dat het interval $(1, 2)$ het getal 2 als bovengrens heeft. Maar het getal 3 is ook een bovengrens van $(1, 2)$, dus bovengrenzen zijn niet uniek.

We kunnen ons afvragen of er misschien een kleinste bovengrens is.

Definitie 3.
Zij b een reëel getal. Als b de kleinste bovengrens is van A noemen we b het ***supremum*** van A en schrijven we $b = \sup(A)$. Als b de grootste ondergrens is van

A noemen we b het ***infimum*** van A en schrijven we $b = \inf(A)$.[†]

Als b het supremum is van A betekent dit dat b een bovengrens is van A en dat voor elke (andere) bovengrens b' van A geldt dat $b \leq b'$. Analoog is het infimum van A een ondergrens is van A met de eigenschap dat voor elke (andere) ondergrens b' van A geldt dat $b' \leq \inf(A)$.

Het supremum en infimum van een verzameling A hoeven niet altijd te bestaan. Zelfs als het supremum bestaat kan het best zo zijn dat $\sup(A)$ geen element is van A. Dezelfde uitspraken gelden uiteraard ook voor het infimum van A.

Voorbeelden.
Hier volgen enkele voorbeelden van deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ en hun suprema/infima.

- Voor het open interval $(1, 2)$ geldt dat $\sup((1, 2)) = 2$ en $\inf((1, 2)) = 1$.

  We tonen dit eerste aan. Het is duidelijk dat $x \leq 2$ voor alle $x \in (1, 2)$, dus 2 is een bovengrens van $(1, 2)$. We controleren dat het ook de kleinste bovengrens is. Neem een bovengrens b van $(1, 2)$. Dan geldt zeker dat $b > 1$ (ga dit zelf na). Stel nu dat b kleiner is dan 2 en bekijk het gemiddelde $y = \frac{1}{2}(b + 2)$. Hiervoor geldt dat $1 < y < 2$, oftewel $y \in (1, 2)$. Omdat verder $y > b$ zien we dat b geen bovengrens is van $(1, 2)$. Dit is een tegenspraak. Er bestaat dus geen bovengrens van $(1, 2)$ die kleiner is dan 2, oftewel 2 is de kleinste bovengrens van $(1, 2)$.

  Dat $\inf((1, 2)) = 1$ kan op soortgelijke wijze worden bewezen.

- Voor het gesloten interval $[1, 2]$ geldt dat $\sup([1, 2]) = 2$ en $\inf([1, 2]) = 1$.

  Dit kan op dezelfde manier bewezen worden als de beweringen $\sup((1, 2)) = 2$ en $\inf((1, 2)) = 1$. Het is ook een gevolg van Propositie 4, die na deze voorbeelden behandeld wordt.

- De verzameling $\mathbb{R}$ van alle reële getallen heeft geen supremum en geen infimum.

  Dit is het geval omdat $\mathbb{R}$ niet naar boven (en ook niet naar onderen) begrensd is. Dit betekent dat hij geen bovengrenzen heeft, en dus zeker ook geen kleinste bovengrens.

Dat voor het gesloten interval $[1, 2]$ blijkbaar geldt dat $\max([1, 2]) = \sup([1, 2])$ is geen toeval. Als het bestaat is het maximum van A immers ook altijd een bovengrens van A.

Propositie 4.
Als A een maximum heeft dan heeft A ook een supremum en geldt $\sup(A) = \max(A)$.
Als A een minimum heeft dan heeft A ook een infimum en geldt $\inf(A) = \min(A)$.

Bewijs. We bewijzen alleen de eerste bewering.

Stel dat A een grootste element heeft, zeg $m = \max(A)$. Per definitie geldt dan dat $a \leq m$ voor elke $a \in A$, oftewel dat m een bovengrens is van A. Merk op dat m zelf ook een element is van A. Voor iedere bovengrens b van A geldt daarom dat $m \leq b$, dus m is de kleinste bovengrens. We concluderen dat het supremum van A bestaat en dat $\sup(A) = \max(A)$. $\square$

[†] De woorden supremum en infimum komen uit het Latijn en betekenen respectievelijk “hoogste deel” en “laagste deel”. Om deze termen te onthouden kan gedacht worden aan de woorden “superieur” en “inferieur”, die uiteraard verwant zijn.

We zien dat het supremum opgevat kan worden als een uitbreiding van het begrip "maximum", en het infimum als een uitbreiding van het begrip "minimum".

Voorbeelden.

- De verzameling $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ van natuurlijke getallen is niet naar boven begrensd en heeft dus geen supremum. Voor elk reëel getal $x \in \mathbb{R}$ bestaat er immers een natuurlijk getal $n \in \mathbb{N}$ dat groter is. Het infimum van $\mathbb{N}$ is het kleinste element van deze verzameling, dus $\inf(\mathbb{N}) = \min(\mathbb{N}) = 1$.
- Voor een verzameling $\{a\} \subseteq \mathbb{R}$ bestaande uit één element $a \in \mathbb{R}$ is a zowel het kleinste als het grootste element. Voor deze verzameling geldt dus $\max(\{a\}) = \min(\{a\}) = \sup(\{a\}) = \inf(\{a\}) = a$.
- Het grootste element van de verzameling $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ is 1, dus $\sup(A) = 1$. Deze verzameling heeft geen kleinste element, maar wel een infimum, namelijk $\inf(A) = 0$.

  Het getal 0 is een ondergrens van A omdat $\frac{1}{n} \geq 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Ieder positief getal $x > 0$ is geen ondergrens omdat er voor dergelijke x altijd een $n \in \mathbb{N}$ te vinden valt zodat $\frac{1}{n} < x$ (kies hiervoor $n \in \mathbb{N}$ zodat $n > \frac{1}{x}$). De grootste ondergrens van A is dus 0, oftewel $\inf(A) = 0$.

Dat de verzamelingen $\mathbb{R}$ en $\mathbb{N}$ geen supremum hadden kwam doordat deze verzamelingen niet naar boven begrensd zijn. We zouden graag willen dat elke naar boven begrensde verzameling een supremum heeft. Dat dit inderdaad het geval is is een fundamentele eigenschap van $\mathbb{R}$ die we hier niet zullen bewijzen en daarom als axioma aannemen.

Axioma 5 (Volledigheid van $\mathbb{R}$).
Elke naar boven begrensde, niet-lege deelverzameling van $\mathbb{R}$ heeft een supremum.
Elke naar onderen begrensde, niet-lege deelverzameling van $\mathbb{R}$ heeft een infimum.

De twee beweringen in het volledigheidsaxioma zoals het hierboven is geformuleerd zijn equivalent. Hiermee bedoelen we dat als een van de twee beweringen wordt aangenomen de andere hieruit kan worden afgeleid.‡

We benadrukken dat dit een axioma is, en dat het niet mogelijk is de volledigheid van $\mathbb{R}$ te bewijzen met behulp van andere eigenschappen van $\mathbb{R}$ die tijdens de colleges zijn behandeld. Het volledigheidsaxioma is in zekere zin wat de reële getallen onderscheidt van de rationale getallen: het kan gebruikt worden om te bewijzen dat de getallen die uit $\mathbb{Q}$ "ontbreken", zoals $\sqrt{2}$, e en π, wel in $\mathbb{R}$ zitten.

Voorbeeld.
De verzameling $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\} \subseteq \mathbb{R}$ heeft een supremum, namelijk $\sup(A) = \sqrt{2}$.

Bewijs. Aangezien $1 \in A$ is A niet leeg. De verzameling is ook naar boven begrensd. Immers, als $x \geq \frac{3}{2}$ dan geldt dat $x^2 \geq \frac{9}{4} > 2$, dus voor elke $x \in A$ moet gelden dat $x < \frac{3}{2}$. Het volledigheidsaxioma vertelt ons nu dat A een supremum heeft, zeg $s = \sup(A)$. Bovendien geeft het voorgaande ons dat $1 \leq s \leq \frac{3}{2}$.

‡Dit kan worden bewezen door de verzameling $-A = \{-a \mid a \in A\}$ te beschouwen. Als deze verzameling een supremum heeft dan heeft A een infimum en geldt $\inf(A) = -\sup(-A)$.

We gaan nu aantonen dat het bovengenoemde supremum voldoet aan de vergelijking $s^2 = 2$. Stel namelijk dat $s^2 > 2$. Dan zou gelden voor $y = s - \frac{s^2-2}{2s}$ dat $0 < y < s$, terwijl $y^2 > 2$ (ga dit zelf na en laat zien dat hieruit volgt dat y een bovengrens is). Dus s kan in dit geval niet de kleinste bovengrens zijn.

Stel vervolgens dat $s^2 < 2$. Dan zou gelden voor $y = s + \frac{2-s^2}{4}$ dat $y > s$, terwijl $y^2 < 2$. Het eerste moet u zelf kunnen nagaan, het tweede is iets subtieler. Voor het gemak noemen we $\delta = \frac{2-s^2}{4}$. Dan is

$$y^2 = (s+\delta)^2 = s^2 + 2\,s\,\delta + \delta^2 = s^2 + (2s+\delta)\,\delta < s^2 + 4\,\delta = 2,$$

waarbij we voor de ongelijkheid gebruik hebben gemaakt van het feit dat $s \leq \frac{3}{2}$ en $\delta \leq \frac{1}{2} < 1$ (ga dit zelf na). Nu zit er tussen elk tweetal reële getallen $s < y$ een rationaal getal $s < y' < y$ (het bewijs daarvan laten we hier achterwege). Hiervoor geldt dat $y' \in A$ (ga dit zelf na), terwijl $s < y'$, dus s is in dit geval geen bovengrens.

We weten nu dus dat s een positief getal is met $s^2 = 2$ en kunnen derhalve concluderen dat $s = \sup(A) = \sqrt{2}$. □

Voor meer details over de volledigheid van $\mathbb{R}$ en over infima en suprema verwijzen we naar het college Inleiding Analyse dat in blok 4 gegeven wordt.

Opgaven

Opgave 1.
Bepaal de infima en suprema van de volgende verzamelingen indien deze bestaan en bewijs je beweringen. Ga voor elke verzameling na of het supremum ook een maximum is en of het infimum ook een minimum is.

$$A = \{1,3,5\}, \qquad D = \left\{\frac{(-1)^n}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\},$$
$$B = [0,1] \cup (2,3), \qquad E = [0,1) \cap \mathbb{Q},$$
$$C = \left\{1 - \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}, \qquad F = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^3 > 1\right\}.$$

Opgave 2.
Laat zien dat elke deelverzameling van $\mathbb{R}$ ten hoogste één maximum heeft.

Opgave 3.
Laat zien dat elke deelverzameling van $\mathbb{R}$ ten hoogste één supremum heeft.

Opgave 4.
We beschouwen de reeks $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ waarbij $a_k = \frac{1}{k^2}$ voor $k \in \mathbb{N}$ en de bijbehorende rij $\{s_n\}$ van partiële sommen, gegeven door $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ voor $n \in \mathbb{N}$.

(a) Bewijs (met inductie) dat $s_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.
(Hint: laat eerst zien dat $(2 - \frac{1}{n+1}) - (2 - \frac{1}{n}) > \frac{1}{(n+1)^2}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$)

(b) Beargumenteer dat de verzameling $A = \{s_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ een supremum heeft.

Opmerking: tijdens de cursus Inleiding Analyse zal bewezen worden dat uit dit laatste volgt dat de reeks convergent is met som $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sup(A)$. Het is bovendien mogelijk om aan te tonen dat $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{\pi^2}{6}$. Dit laatste is niet eenvoudig en zal gedaan worden bij het tweedejaars vak Functies en Reeksen.