Tenslotte volgt uit de machtreeksontwikkeling voor de e-macht dat

$$e^{iy} = \sum_{n=0} i^n \frac{y^n}{n!}.$$

Door reëel en imaginair deel te nemen vinden we dat

$$\cos y = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Re}(i^{2k}) \frac{y^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!}$$

en

$$\sin y = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Im}(i^{2k+1}) \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Dit zijn de bekende Taylorreeksontwikkelingen voor sinus en cosinus.

Laat in het vervolg V een open deelverzameling van $\mathbb{C}$ zijn en $f : V \to \mathbb{C}$ een analytische functie. Volgens Definitie 4.22 betekent dit dat er voor elk punt $a \in V$ een in V gelegen open cirkelschijf D met middelpunt a bestaat zo dat f op D gegeven wordt door een machtreeks:

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n (z-a)^n \tag{4.22}$$

met $c_n \in \mathbb{C}$.

Wegens Stelling 4.35 en Gevolg 4.36 is de analytische $f : V \to \mathbb{C}$ willekeurig vaak complex differentieerbaar, en zijn de afgeleide functies $f^{(n)}$ weer analytisch. Verder moeten de coëfficiënten in (4.22) wegens Gevolg 4.36 gelijk zijn aan

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}. \tag{4.23}$$

Derhalve is de machtreeksontwikkeling overal uniek bepaald door de functie.

Een belangrijk resultaat is de volgende stelling, die in schril contrast staat met de situatie voor differentieerbare functies van één reële variabele.

Stelling 4.41 *Zij $V \subset \mathbb{C}$ open, en $f : V \to \mathbb{C}$ complex differentieerbaar. Dan is f analytisch op V. In het bijzonder is f willekeurig vaak complex differentieerbaar op V.*

Voor het bewijs van deze bijzondere stelling, dat berust op een toepassing van de stelling van Cauchy voor gesloten lijn-integralen, verwijzen we naar de niveau 3 cursus Complexe Functies.

Bewijs Schrijf $c_n = 1/n!$. Dan geldt dat

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

Met Gevolg 4.20 volgt hieruit dat de reeks (4.20) convergentiestraal ∞ heeft, dus convergeert voor alle $z \in \mathbb{C}$. Met Lemma 4.34 volgt hieruit weer dat f complex differentieerbaar is op $\mathbb{C}$, met afgeleide $f' = f$. Het is evident dat $f(0) = 1$, dus het bestaan van f is aangetoond.

We gaan nu de uniciteit van f en tegelijkertijd (4.19) aantonen. De functie $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, gedefinieerd door

$$\varphi(z) := f(z)f(-z)$$

is complex differentieerbaar op $\mathbb{C}$, met afgeleide gelijk aan:

$$\varphi'(z) = f'(z)f(-z) - f(z)f'(-z) = 0$$

(gebruik produkt en kettingregel). Wegens Gevolg 4.30 volgt hieruit dat $D_1\varphi = D_2\varphi = 0$, dus φ is constant op $\mathbb{C}$. Door $z = 0$ te substitueren vinden we dat $\varphi = 1$, dus $f(z)f(-z) = 1$ voor alle $z \in \mathbb{C}$. Hieruit concluderen we dat $f(z) \neq 0$ voor alle z en

$$f(z)^{-1} = f(-z).$$

Laat $w \in \mathbb{C}$ willekeurig, maar vast zijn. Laat $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ complex differentieerbaar zijn en voldoen aan $g' = g$ en $g(0) = 1$. Dan is de functie $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gedefinieerd door

$$h(z) := f(z)^{-1}g(z+w)$$

complex differentieerbaar, met afgeleide

$$\begin{aligned} h'(z) &= -f(z)^{-2}f'(z)g(z+w) + f(z)^{-1}g'(z+w) \\ &= -f(z)^{-1}g(z+w) + f(z)^{-1}g(z+w) = 0. \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat h constant is en gelijk aan $h(0) = g(w)$. We concluderen dat $g(z+w) = f(z)g(w)$ voor alle $z \in \mathbb{C}$. Deze conclusie geldt voor iedere w, dus ook voor $w = 0$, en we zien dat $g = f$. Dus f is uniek, en tevens geldt (4.19). □

Op grond van de bovenstaande stelling definiëren we de complexe e-macht door

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Voor $z \in \mathbb{R}$ komt deze definitie overeen met de vroeger gegeven definitie. Wegens bovenstaande stelling geldt dat

$$\frac{d}{dz}e^z = e^z \qquad \text{op } \mathbb{C}.$$

Tevens gelden de volgende eigenschappen:

(a) $e^0 = 1$;

(b) $e^z e^{-z} = 1$;

(c) $e^{z+w} = e^z e^w$;

Definitie 4.22 Zij $V \subset \mathbb{C}$ een open deelverzameling en $f : V \to \mathbb{C}$ een functie. Als $a \in V$ dan heet de functie f *analytisch in het punt* a als er een complexe machtreeks $\sum c_n(z-a)^n$ bestaat, en een in V gelegen open schijf D met middelpunt a zo dat

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(z-a)^n, \qquad (z \in D).$$

De functie f heet *complex analytisch* (of *holomorf*) in V als voor iedere $a \in V$ geldt dat f analytisch is in het punt a. ⊘

Voor een open deel $V \subset \mathbb{R}$ wordt op een soortgelijke manier het begrip reëel analytische functie $f : V \to \mathbb{C}$ gedefinieerd. In de definitie moet de schijf D dan vervangen worden door een in V gelegen open interval dat a bevat.

Voorbeeld 4.23 Zij $f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$ gedefinieerd door $f(z) = 1/(1-z)$. Zij $a \neq 1$. Dan is

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1-a}\,\frac{1}{1-\frac{z-a}{1-a}} \\ &= (1-a)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{1-a}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(1-a)^{-(n+1)}\,(z-a)^n. \end{aligned}$$

Hieraan zien we dat f analytisch is in het punt a. De machtreeks van f rond a convergeert voor $|z-a| < |1-a|$, dus heeft een convergentiestraal ρ die minstens gelijk is aan $|1-a|$. Uit

$$\limsup_{n\to\infty} |1-a|^{-(n+1)/n} = |1-a|^{-1}$$

blijkt dat ρ precies gelijk is aan $|1-a|$, dus aan de afstand van a tot het singuliere punt 1 van de functie f. ⊘

4.2 Complex differentieerbare functies

Voor functies $\mathbb{C} \supset\!\to \mathbb{C}$ bestaat een speciaal begrip van differentieerbaarheid.

Definitie 4.24 Zij $U \subset \mathbb{C}$ een open verzameling, $f : U \to \mathbb{C}$ een functie en $a \in \mathbb{C}$. De functie f heet complex differentieerbaar in het punt a indien de limiet

$$\lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a} \tag{4.15}$$

bestaat. Is dit het geval heet de limiet de complexe afgeleide van f in het punt a, en wordt hij genoteerd met

$$f'(a) = \frac{df}{dz}(a).$$

De functie f heet complex differentieerbaar op U indien hij complex differentieerbaar is in ieder punt van U. ⊘

Bewijs Fixeer z_0 met $|z_0| < \rho$; kies r zo dat $|z_0| < r < \rho$. We definiëren een rij functies $(g_n)_{n \geq 1}$ op de gesloten schijf $\bar{D}(0; r)$ door:

$$g_n(w) = c_n \frac{w^n - z_0^n}{w - z_0} \tag{4.18}$$

als $w \neq z_0$, en door $g_n(z_0) = nc_n z_0^{n-1}$. Zij voorts g_0 de constante functie 0. Dan is elke functie g_n continu in z_0. Verder is voor elke w met $|w| \leq r$:

$$|g_n(w)| = |c_n(w^{n-1} + w^{n-2}z_0 + \ldots + z_0^{n-1})| \leq n|c_n|r^{n-1}.$$

Uit het uniforme majorantiekenmerk gecombineerd met Lemma 4.34 volgt nu dat de reeks $\sum_{n \geq 0} g_n$ uniform convergeert op $|w| \leq r$. De somfunctie is derhalve continu in z_0, dus

$$\lim_{w \to z_0} \frac{f(w) - f(z_0)}{w - z_0} = \lim_{w \to z_0} \sum_{n=0}^{\infty} g_n(w) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(z_0).$$

Hieruit volgt dat f complex differentieerbaar is in z_0, met de gewenste afgeleide. □

Door herhaald toepassen van de bovenstaande stelling volgt direkt:

Gevolg 4.36 *Een machtreeks stelt binnen zijn convergentiecirkel een willekeurig vaak complex differentieerbare functie voor. Heeft $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$ convergentiestraal $\rho > 0$ en is*

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n, \qquad (|z| < \rho),$$

dan is $f^{(n)}(0) = n! c_n$.

Gevolg 4.37 *Zij $r > 0$ en veronderstel dat de complexe machtreeksen $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ en $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ convergent zijn op $D(0; r)$. Dan zijn de volgende beweringen gelijkwaardig.*

(a) *$a_n = b_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$;*

(b) *$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ voor alle $z \in D(0; r)$.*

$$|c_n z^n| \leq |nc_n z^{n-1}|$$

voor $n \geq |z|$ zou daaruit door toepassing van het majorantiekenmerk de absolute convergentie van de reeks $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$ volgen, tegenspraak. □

Stelling 4.35 *Laat de machtreeks $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$ convergentiestraal $\rho > 0$ hebben. Dan is de functie $f : D(0; \rho) \to \mathbb{C}$, gedefinieerd door*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

complex differentieerbaar, met afgeleide gegeven door

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n z^{n-1} \quad (|z| < \rho).$$

Als (a) en (b) gelden, dan geldt bovendien dat

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Bewijs Voor alle $\beta > c$ geldt

$$\int_a^\beta f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^\beta f(x)\,dx$$

De uitspraken volgen hieruit door de limiet voor $\beta \uparrow b$ te nemen. □

Voorbeeld 2.22 We beschouwen de functie $f : x \mapsto x^s$ op $I = [1, \infty[$, met $s \in \mathbb{R}$ een constante, ongelijk aan -1. Deze functie is continu, dus lokaal Riemann-integreerbaar. Voor $\beta > 1$ geldt dat

$$\int_1^\beta f(x)\,dx = \left.\frac{x^{s+1}}{s+1}\right|_1^\beta = \frac{\beta^{s+1} - 1}{s+1}. \tag{2.16}$$

De laatste uitdrukking heeft een limiet voor $\beta \uparrow \infty$ dan en slechts dan als $s + 1 < 0$. In dit geval is de functie f oneigenlijk Riemann integreerbaar over $[1, \infty[$, met als oneigenlijke integraal de limiet:

$$\int_1^\infty x^s\,dx = \lim_{\beta\to\infty} \frac{\beta^{s+1} - 1}{s+1} = -\frac{1}{s+1}, \qquad (s < -1).$$

De uitdrukking (2.16) heeft geen limiet voor $s > -1$, ofwel, de integraal divergeert in dat geval.

Tenslotte beschouwen we ook nog het geval dat $s = -1$. Dan heeft $f(x) = 1/x$ de functie $\log x$ als primitieve, en dus heeft

$$\int_1^\beta \frac{1}{x}\,dx = \log \beta$$

geen limiet voor $\beta \to \infty$. De bijbehorende integraal $\int_1^\beta x^{-1}\,dx$ is dan ook divergent. Samenvattend concluderen we dat het onderstaande lemma geldt. ⊘

Lemma 2.23 *Zij $s \in \mathbb{R}$. Dan convergeert de oneigenlijke Riemann-integraal*

$$\int_1^\infty x^s\,dx \tag{2.17}$$

dan en slechts dan als $s < -1$. In dat geval is de waarde van de integraal gelijk aan $1/(-s-1)$.

Soortgelijke beschouwingen als hier boven leiden tot een andere karakterisering van oneigenlijke Riemann-integreerbaarheid op intervallen van de vorm Opmerking 2.19 (c), dus $I =]a, b]$ met $-\infty \leq a < b < \infty$. Een interessant voorbeeld wordt gegeven door het onderstaande lemma.

Lemma 2.24 *Zij $s \in \mathbb{R}$. De oneigenlijke integraal*

$$\int_0^1 x^s\,dx$$

is convergent dan en slechts dan als $s > -1$. In dat geval is de oneigenlijke integraal gelijk aan $1/(s+1)$.

Hieruit volgt dat

$$\left|\int_{J_1^+} f(x)\,dx - \int_{J_2^+} f(x)\,dx\right| = \left|\int_{J_1} f(x)\,dx - \int_{J_2} f(x)\,dx\right| < \epsilon.$$

We concluderen met behulp van Lemma 2.25 dat f oneigenlijk integreerbaar is over $[c, b[$. Op soortgelijke wijze zien we dat f oneigenlijk integreerbaar is over $]a, c]$. Dus (b) geldt.

Veronderstel nu dat (b) geldt. Zij $\epsilon > 0$. Dan is er een gesloten en begrensd interval $[c, b_0]$ zo dat voor elk gesloten en begrensd interval $[c, \beta]$ met $I_0^+ \subset [c, \beta] \subset [c, b[$ geldt dat

$$\left|\int_c^\beta f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx\right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Evenzo is er een gesloten en begrensd interval $[a_0, c] \subset]a, c]$ zo dat voor elk interval $[\alpha, c]$ met $[a_0, c] \subset [\alpha, c] \subset]a, c]$ geldt dat

$$\left|\int_\alpha^c f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx\right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Zij $I_0 = [a_0, b_0]$. En zij $[\alpha, \beta]$ zo dat $[a_0, b_0] \subset [\alpha, \beta] \subset]a, b[$. Dan geldt $[c, b_0] \subset [c, \beta] \subset [c, b[$ en $[a_0, c] \subset [a_0, c] \subset]a_0, c]$. Uit de twee bovenstaande schattingen volgt nu met behulp van de driehoeksongelijkheid dat

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)\,dx - \left(\int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx\right)\right| < \epsilon.$$

Hieruit concluderen we met Definitie 2.16 dat f oneigenlijk integreerbaar is over $]a, b[$ en bovendien dat

$$\int_I f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

□

De integraal in het linkerlid van (2.19) schrijven we in het vervolg ook als $\int_a^b f(x)\,dx$.

Stelling 2.27 (Majorantie-kenmerk voor integreerbaarheid) *Laat $I \subset \mathbb{R}$ een niet-leeg interval met grenzen $-\infty \leq a < b \leq \infty$, en veronderstel dat $f, g : I \to \mathbb{R}$ lokaal Riemann-integreerbaar zijn, $C > 0$ en $|f(x)| \leq Cg(x)$ voor alle $x \in I$.*

Indien g oneigenlijk Riemann-integreerbaar is op I, dan is f dat ook, en er geldt bovendien dat

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq C \int_a^b g(x)\,dx. \tag{2.20}$$

Bewijs Uit de voorwaarden blijkt in het bijzonder dat $g \geq 0$ op het interval I. Zij $\epsilon > 0$. Dan is er een gesloten en begrensd interval $I_0 \subset I$ zo dat voor elk tweetal gesloten en begrensde intervallen J_1, J_2 met $I_0 \subset J_j \subset I$ geldt

$$\left|\int_{J_1} g(x)\,dx - \int_{J_2} g(x)\,dx\right| < \epsilon/2C.$$

In het bijzonder volgt hieruit voor dergelijke intervallen dat

$$\int_{J_j \setminus I_0} g(x)\,dx = \left|\int_{J_j} g(x)\,dx - \int_{I_0} g(x)\,dx\right| < \epsilon/2C, \qquad (j = 1, 2).$$

Lemma 5.35

(a) *Voor alle* $0 \le r < 1$ *geldt dat* $P_r(x) > 0$, $(\forall x \in \mathbb{R})$, *en dat*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)\,dx = 1. \tag{5.36}$$

(b) *Zij* $0 < \delta < \pi$. *Dan convergeert* P_r *op* $V := [-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$ *uniform naar nul, voor* $r \uparrow 1$.

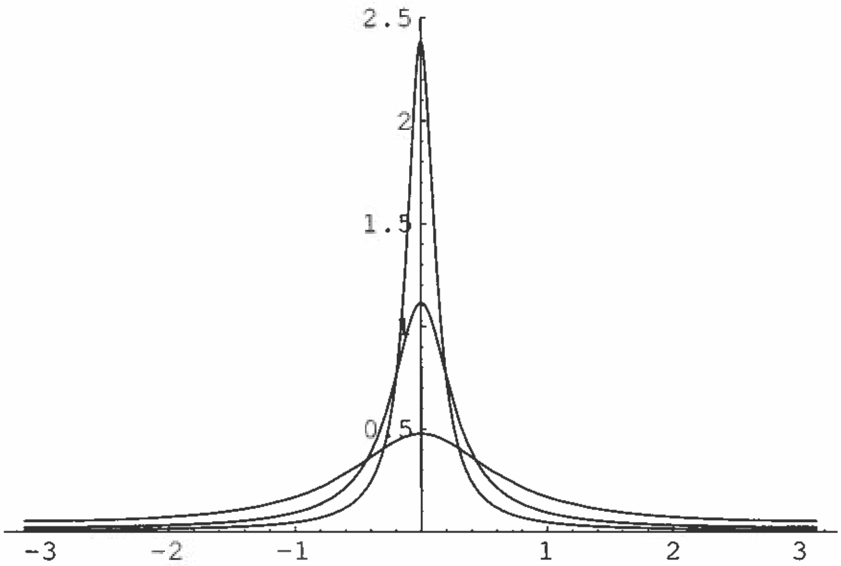
Bewijs We beginnen met (a). Uit $0 \le r < 1$ en $|\cos x| \le 1$ volgt dat teller en noemer in (5.35) strikt groter dan nul zijn, dus dat $P_r(x) > 0$.

Uit $\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} < \infty$ volgt dat $P_r \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ met de definiërende reeks als Fourier reeks. In het bijzonder is de nulde Fourier coëfficiënt gelijk aan $r^0 = 1$. Hieruit volgt dat $\langle P_r, \epsilon_0 \rangle = 1$, dus (5.36).

Om (b) te bewijzen merken we op dat $1 - \cos x \ge 1 - \cos\delta$ voor $x \in V$, dus

$$0 < P_r(x) \le \frac{1 - r^2}{(1-r)^2 + 2r(1 - \cos\delta)}, \qquad (x \in V).$$

Het rechterlid heeft limiet nul voor $r \uparrow 1$. Hieruit volgt dat $\|P_r\|_V \to 0$. □



De functies $v \mapsto P_r(v)$ voor $r = \frac{1}{2}$, $r = \frac{3}{4}$ en $r = \frac{7}{8}$.

Omdat $f_r = P_r * f$, is de volgende stelling equivalent met Stelling 5.29.

Stelling 5.36 *Laat* $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. *Dan geldt dat* $P_r * f \to f$ *uniform op* $\mathbb{R}$, *voor* $r \uparrow 1$.

Dan geldt dat $f_{r,n} \to f_r$, uniform op $\mathbb{R}$. Er bestaat dus een $N \in \mathbb{N}$ zo dat

$$\|f_{r,N} - f_r\| < \epsilon/2.$$

Kies $p = f_{r,N}$, dan is p een Fourier polynoom, en er geldt dat

$$\|f - p\|_{\mathbb{R}} \leq \|f - f_r\|_{\mathbb{R}} + \|f_r - p\|_{\mathbb{R}} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

□

Aan het eind van de vorige paragraaf wezen we al op het belang van het volgende gevolg van Stelling 5.36.

Gevolg 5.38 *Zij $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ en veronderstel dat $(\mathcal{F}f)_k = 0$ voor alle $k \in \mathbb{Z}$. Dan is $f = 0$.*

Bewijs Definieer f_r als in (5.29). Dan volgt uit het nul zijn van de Fourier coëfficiënten dat $f_r = 0$ voor elke $0 \leq r < 1$. Volgens Stelling 5.29 geldt dat $\lim_{r \uparrow 1} f_r = f$, uniform op $\mathbb{R}$. We concluderen dat $f = 0$. □

Hiermee is Stelling 5.25 bewezen, en daarmee ook zijn belangrijke gevolg, Stelling 5.26.

5.5 Differentiëren en Fourier-transformatie

Voor $p \in \mathbb{N}$ noteren we met $C^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ de ruimte van functies $g \in C(R/2\pi\mathbb{Z})$ die bovendien C^p zijn, dwz. alle afgeleiden $g, g', \ldots, g^{(p)}$ bestaan en zijn continu. Met $C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ noteren we de ruimte van alle functies $g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ die willekeurig vaak differentieerbaar zijn.

Lemma 5.39 *Als $g \in C^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ en $h \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, dan geldt dat $g * h \in C^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ en*

$$\frac{d}{dx}(g * h) = \frac{dg}{dx} * h.$$

Bewijs Er geldt dat

$$g * h(x) = 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x, y)\, dy,$$

met $\varphi(x, y) = g(x - y)h(y)$. Hieruit blijkt dat φ continu is op $\mathbb{R}^2$, en bovendien dat φ partieel differentieerbaar is naar de eerste variabele, met partiële afgeleide

$$D_1\varphi(x, y) = g'(x - y)h(y).$$

Aangezien $D_1\varphi$ weer continu is, is differentiatie onder het integraalteken geoorloofd, zie Stelling 2.39, en we vinden:

$$\frac{d}{dx} g * h(x) = 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} D_1\varphi(x, y)\, dy = (g') * h(x).$$

Hieruit volgt dat $g*h$ differentieerbaar is met afgeleide $(g')*h$. Aangezien $g', h \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, vinden we dat de afgeleide continu is. Dus $g * h$ is C^1, en de formule voor de afgeleide geldt. □