Hertentamen Complexe functies 22 Juli 2021

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam, je studentnummer en op de eerste pagina ook het aantal vellen dat je inlevert.
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt. In het bijzonder, als je een stelling gebruikt moet je ook nagaan dat aan de voorwaarden is voldaan.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel in het vervolg uiteraard wel gebruiken.
- Boek(en en dictaten), cursusmateriaal en aantekeningen mogen gebruikt worden, electronische apparaten mogen niet gebruikt worden.
- Alle 13 deelopgaves tellen even zwaar.
- *SUCCES!*

1. Zij $k \in \mathbb{N}$, $0 \neq z_0 \in \mathbb{C}$ en $w_0 \in \mathbb{C}$ met $w_0^k = z_0$. Doel van deze opgave is existentie en eenduidigheid van het blad van $\sqrt[k]{z}$ lokaal rond z_0 met waarde w_0 in z_0.

   (i) Ga na dat z_0 een open omgeving U samen met een holomorfe functie $g : U \longrightarrow \mathbb{C}$ heeft waarvoor $g(z_0) = w_0$ en $(g(z))^k = z$ voor alle $z \in U$.

   (ii) Zij (U, g) het paar uit (i) en (V, h) nog een paar met de eigenschappen uit (i). Laat zien dat $g = h$ op een omgeving W van z_0. Waarom werkt $W = U \cap V$ niet altijd?

2. Zij $A := \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$ de open ring rond de oorsprong begrensd door de cirkels
$$C_1 = \{\, |z| = 1 \,\} \quad \text{en} \quad C_2 = \{\, |z| = 2 \,\} \; .$$

   (i) Toon aan dat de op A harmonische, continue functie $g : \overline{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ met $g(z) \equiv 1$ op C_1 en $g(z) \equiv 0$ op C_2 in poolcoördinaten een product $g(z) = g(re^{\mathrm{i}\varphi}) = u(r) \cdot v(\varphi)$ is.

   (ii) Kun je een functie $h : A \longrightarrow \mathbb{R}$ construëren waarvoor $f(z) = g(z) + \mathrm{i}h(z)$ holomorf is?

3. Beschouw de functie

$$f(z) \quad = \quad \frac{\exp\frac{1}{z}}{z^2-1} \quad = \quad \frac{e^{\frac{1}{z}}}{2}\left(\frac{1}{z-1} \quad - \quad \frac{1}{z+1}\right) \quad .$$

(*i*) Bepaal de singulariteiten van f op $\mathbb{C}$.

(*ii*) Bereken de bijbehorende residuen in de polen.

(*iii*) Is f meromorf op $\mathbb{C}$? Indien niet, bereken dan de bijbehorende residuen in de essentiële singulariteiten.

4. Doel van deze opgave is om de hoofdstelling van de algebra met behulp van het windingsgetal W te bewijzen. Zij

$$p \quad = \quad a_0 \; + \; a_1 z \; + \; \ldots \; + \; a_n z^n$$

een complexe veelterm van graad $n \geq 1$, dus $a_n \neq 0$.

(*i*) Bepaal een constante $R > 0$ met $p(z) \neq 0$ voor alle $|z| > R$.

(*ii*) Pas R desnoods zodanig aan, dat er een constante $C > 0$ bestaat waarvoor

$$|\frac{p'(z)}{p(z)} \; - \; \frac{n}{z}| \quad \leq \quad \frac{C}{|z|^2}$$

voor alle $|z| > R$.

(*iii*) Voor $\gamma_r(t) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ ga na dat

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} \frac{p'(z)}{p(z)} \; - \; \frac{n}{z}\,\mathrm{d}z \quad = \quad 0 \quad .$$

(*iv*) Laat zien dat

$$\int_{\gamma_r} \frac{p'(z)}{p(z)}\,\mathrm{d}z \quad = \quad 2n\pi\mathrm{i}$$

voor alle r voldoende groot.

(*v*) Concludeer (gedetailleerd) dat p een complexe wortel heeft.

(*vi*) De samenstelling $\eta_r = p \circ \gamma_r$ is de gesloten kromme $t \mapsto p(\gamma_r(t))$. Toon aan dat $W(\eta_r, 0) = n$ voor alle $r > R$. Wat kan voor $r \leq R$ gebeuren?