Distributies 2018

Extra opgaven

E.1 Definieer

$$\phi_{a,b}(x) \quad := \quad \psi(x-a)\,\psi(b-x) \ ,$$

waar ψ de C^∞–functie met $\psi(x) = \exp(-\frac{1}{x})$ voor $x > 0$ uit Lemma 2.7 is.

a). Laat zien dat $\phi_{a,b} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ met $\operatorname{supp}\phi_{a,b} = [a,b]$ en maak een schets.

b). Construeer m.b.v. $\phi_{a,b}$ een monotoon stijgende functie $\Psi_{a,b} \in C^\infty(\mathbb{R})$ met $\Psi_{a,b}(x) = 0$ als $x \leq a$ en $\Psi_{a,b}(x) = 1$ als $x \geq b$. *Hint:* integreer!

c). Definieer $\Phi(x) := \Psi_{-2,-1}(x)\,(1-\Psi_{1,2}(x))$ en ga na dat $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Welke eigenschappen heeft Φ ? Maak een schets.

E.2 Toon aan dat de Cantorverzameling

$$C \quad = \quad \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \;\middle|\; (a_n)_n \in \{0,2\}^{\mathbb{N}} \right\} \quad \subseteq \quad [0,1]$$

ten opzichte van de Lebesgue-maat verwaarloosbaar is.

E.3 Bereken een afschatting naar beneden voor de Lebesgue-maat van

$$\left\{ x \in [0,1] \;\middle|\; |x - \frac{p}{q}| \;\geq\; \frac{\gamma}{q^\tau} \ \text{ voor alle } p,q \in \mathbb{N} \right\}$$

voor vaste $\tau > 2$ en $\gamma > 0$.

E.4 Veronderstel dat $f \in C(\mathbb{R})$, gezien als distributie, een afgelede $g \in C(\mathbb{R})$ heeft. Toon aan dat $f \in C^1(\mathbb{R})$ en dat ook voor de ‘gewone’ afgeleide $f' = g$ geldt.