Tentamen differentiaalvergelijkingen 16 april 2014

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam, je studentnummer en op de eerste pagina ook de naam van je werkcollegeleider: Ori Yudilevich (groep 1), Joey van der Leer Duran (groep 2) of Thom Klaasse (groep 3).
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel in het vervolg uiteraard wel gebruiken.
- Alle 14 deelopgaven tellen even zwaar.
- *SUCCES!*

1. Beschouw op $\mathbb{R}^3$ het lineaire systeem $\dot{y} = Ay$ met

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

   (*i*) Bereken de eigenwaarden van A.

   (*ii*) Geef de Jordan-normaalvorm van A en een basis ten opzichte waarvan A in deze Jordan-normaalvorm is.

   (*iii*) Bepaal de algemene oplossing $y(t)$ van $\dot{y} = Ay$.

   (*iv*) Voor welke beginvoorwaarden $y^0 \in \mathbb{R}^3$ geldt $\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{tA} y^0 = 0$?

   (*v*) Ga na dat

$$\left\{ y^0 \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \lim_{t\to-\infty} \mathrm{e}^{tA} y^0 = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\} .$$

2. Beschouw op $\mathbb{R}^2$ het door $H(q,p) = 3p^2 q - q^3 + 3(p^2 + q^2)$ gegeven Hamiltoniaanse vectorveld

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial p} \\ -\dfrac{\partial H}{\partial q} \end{pmatrix} .$$

(i) Geef alle evenwichtspunten (q_0, p_0).

(ii) Bereken de linearizeringen in de evenwichtspunten en de eigenwaarden.

(iii) Bepaal de types van de evenwichtspunten en voor de zadels ook de bijbehorende eigenruimten.

(iv) Ga na dat de rechte lijn $\{(q,p) \in \mathbb{R}^2 \mid q = -1\}$ onder de stroming invariant is.

(v) Gebaseerd op je bevindingen in (i), (iii) en (iv) begin een schets van het faseportret, maak een gok welke twee rechte lijnen eveneens invariant zijn en maak daarmee het faseportet af.

3. We noemen een stroming

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{2n} \\ & (t, x, y) & \mapsto & \varphi_t(x, y) \end{array}$$

reversibel ten opzichte van de spiegeling

$$\begin{array}{rccc} \rho : & \mathbb{R}^{2n} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{2n} \\ & (x, y) & \mapsto & (-x, y) \end{array}$$

als $\varphi_{-t}(-x, y) = \rho(\varphi_t(x, y))$ voor alle $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$ en $t \in \mathbb{R}$.

(i) Controleer dat het systeem

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & y \\ \dot{y} & = & -x \end{array}$$

van differentiaalvergelijkingen op $\mathbb{R}^2$ een reversibele stroming heeft.

(ii) Zij $\alpha(t) = \varphi_t(\alpha(0))$ een stroomlijn met baan $\operatorname{im} \alpha$ die

$$\operatorname{Fix} \rho \quad = \quad \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^{2n} \;\middle|\; x = 0 \right\}$$

niet snijdt. Ga na dat $\rho(\operatorname{im} \alpha)$ eveneens een baan is. In welke richting wordt deze doorlopen, bv. wanneer α (onder variatie van t) dichter bij $\operatorname{Fix} \rho$ komt? *Hint:* neem $n = 1$ en schets $\operatorname{Fix} \rho$, $\operatorname{im} \alpha$, $\rho(\operatorname{im} \alpha)$ en de tijdsrichting.

(iii) Zij $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ een stroomlijn die $\operatorname{Fix} \rho$ snijdt. In welke stroomlijn wordt α getransformeerd als we de spiegeling ρ toepassen en de tijd omkeren?

(iv) Beargumenteer dat elke baan die $\operatorname{Fix} \rho$ twee keer snijdt een periodieke baan is.